petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation

deuxième édition revue et augmentée

François Rouvière

CASSINI

PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
9. V. I. Arnold, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles* (en préparation)

10-14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS*

15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *Les bases de la théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
19. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2002 et 2003 (MP)* (en préparation)

François Rouvière

PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

À L'USAGE DE LA LICENCE ET DE L'AGRÉGATION

Deuxième édition, revue et augmentée

CASSINI

François Rouvière, né en 1946, professeur de mathématiques à l'université de Nice, est spécialiste d'analyse sur les groupes de Lie et les espaces homogènes.

Adresse de l'auteur :

Laboratoire J. A. Dieudonné
Université de Nice
Parc Valrose
06108 Nice cedex 2
E-mail : frou@math.unice.fr

Mathematics Subject Classification (2000) : Primary 26-01, 53-01. Secondary 26Bxx, 53Axx.

Deuxième édition, revue et augmentée, ISBN 2-84225-069-9

(Première édition, 1999 : ISBN 2-84225-008-7)

Table des matières

Avant-propos

Mal compris, donc mal aimé, le calcul différentiel est souvent ressenti comme un obstacle majeur par les étudiants préparant **licence** ou **agrégation** de mathématiques, ou les **concours d'entrée aux grandes écoles**. Ce blocage est d'autant plus triste qu'il se réduit généralement à la seule incompréhension des notations. Dans l'écriture $\mathrm{D}f(a)h$ ou $\mathrm{D}^2f(a)(h,h)$ d'une différentielle première ou seconde, que sont les objets mathématiques $\mathrm{D}f(a)$, $\mathrm{D}^2f(a)$? Que signifient ces notations abrégées lorsque f est par exemple une fonction numérique de deux variables réelles ? Comment expliciter l'hypothèse « $\mathrm{D}_y f(a,b)$ inversible » du théorème des fonctions implicites pour un couple de fonctions de trois variables ? Au fait, qui est y (qui se nomme peut-être (x,z) dans le problème posé...) ? De telles hésitations, pour élémentaires qu'elles soient, mènent droit à la paralysie et ne peuvent être surmontées que par la pratique d'exercices variés.

Ce « petit guide » voudrait aider à vaincre ces blocages initiaux et, au-delà, à mettre en action les outils du calcul différentiel sur un choix de questions d'analyse ou de géométrie. On y trouvera :

- un **panorama du cours** en début de chapitre : énoncés commentés des définitions et des théorèmes les plus utiles, *sans démonstration* (mais avec références). On donnera en revanche sous le joli nom d'**heuristique**[1] quelques « preuves », désinvoltes mais transparentes, obtenues en remplaçant tous les epsilons de l'analyse par des points de suspension. On constatera qu'il ne reste plus alors que de l'algèbre linéaire, et c'est bien là l'apport fondamental du calcul différentiel : à epsilon près une fonction « quelconque » se ramène à une fonction linéaire ! Mais de telles « preuves », absentes (et pour cause) des livres sérieux, ont de quoi heurter les âmes rigoristes et doivent bien sûr rester confidentielles.

  Les espaces de Banach, cadre traditionnel des cours classiques (et respectables) sur le sujet, seront bien souvent laissés ici au vestiaire : à quoi bon s'embarrasser des difficultés liées à la dimension infinie si les seules applications en vue ont $\mathbb{R}^n$ pour cadre ? C'est seulement lorsqu'aucune complication nouvelle n'en résulte que l'on travaillera dans le contexte des espaces normés généraux.
- **133 exercices avec corrigés détaillés**, en présence cette fois de tous les epsilon nécessaires. De difficulté très variée, ils vont du simple pont

1. Du verbe grec *heuriskein*, trouver, dont le parfait *eurêka* montre tout l'intérêt.

aux ânes (parfois à la limite de la provocation : écrire la formule de Taylor à l'ordre trois pour une fonction de deux variables...) jusqu'à de petits problèmes, susceptibles de fournir un thème d'exposé à l'oral de l'agrégation, ou un bon entraînement pour les étudiants de licence ou des classes préparatoires. Un **astérisque** * signale les énoncés ou les questions plus difficiles, à réserver peut-être aux seuls agrégatifs.

- des **commentaires** ou des **compléments** accompagnant certaines solutions, pour en résumer les idées essentielles, ou évoquer le contexte mathématique et les liens avec d'autres exercices du volume.

Aucun de ces exercices n'a, bien sûr, de prétention à l'originalité : tout au plus ai-je fait un choix et des adaptations à partir de la littérature existante, notamment celle citée dans la bibliographie, en m'appuyant sur l'expérience de maintes années en licence et préparation à l'agrégation à l'Université de Nice. Je me suis également inspiré, en plusieurs endroits, des beaux cours polycopiés de Jacqueline Lelong-Ferrand (*Dérivées et Différentielles*, Paris 1964, et *Équations différentielles*, Paris 1966), et de Jean-Claude Tougeron (*Calcul différentiel et équations différentielles*, Rennes 1993).

À l'origine lui aussi polycopié de cent pages dactylographiées, le présent « petit guide » a, semble-t-il, pris quelque embonpoint. Si je lui ai cependant conservé son titre initial, c'est que l'ambition du livre, telle qu'on vient de la définir, n'a pas changé depuis la première version du texte ; seul a grossi le choix d'exercices pour la mettre en œuvre.

Dans la sélection des **thèmes abordés**, j'ai souhaité insister longuement (lourdement ?) sur l'idée fondamentale déjà citée (*approximation d'objets quelconques par des objets issus de l'algèbre linéaire*), et ses nombreux bienfaits. Ainsi la discussion d'un système général de n équations à p inconnues ramenée (localement) à celle d'un système linéaire (Exercices 67, 72, 82) ou son analogue géométrique, l'étude d'intersections de surfaces ramenée au même problème sur les plans tangents (Exercices 89, 91), ainsi la « linéarisation » d'une équation différentielle au voisinage d'un équilibre (Exercices 45, 46), ou l'interprétation intuitive du gradient, du jacobien, de la divergence et du rotationnel (Exercices 28 à 31), etc. L'une des manifestations les plus remarquables de cette idée, et la plus souvent utilisée en analyse ou en géométrie, est le théorème du *changement de coordonnées*[2] : on peut prendre pour nouvelles coordonnées (locales) certaines variables, dès lors que le déterminant de leurs dérivées partielles par rapport aux anciennes est non nul en un point.

Les *différentielles d'ordre deux et plus* ont été délibérément reléguées en fin de volume (Chapitres 6 et 7), puisque les résultats majeurs du

2. En langue savante : difféomorphisme.

calcul différentiel s'obtiennent déjà dans le cadre des fonctions *une fois* continûment différentiables.

Les *équations différentielles* n'apparaissent ici qu'à l'occasion de quelques exemples, sans faire l'objet d'une approche systématique, même à un niveau élémentaire : il y faudrait au moins un autre ouvrage (voir par exemple Arnold [1] ou Hubbard et West [26]). Les *formes différentielles* sont également absentes de ce livre, à part de brèves allusions dans quelques commentaires d'exercices ; on pourra s'initier à ce sujet dans Lafontaine [28] chapitre V.

L'*espace* $\mathbb{R}^n$ *sert de cadre* au cours et à la plupart des exercices. Aux puristes qui s'offusqueraient de ce qu'on ne distingue pas l'*espace affine* $\mathbb{R}^n$ de l'*espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ ni de l'*espace numérique* $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, je répondrai qu'ils ont raison bien sûr, et que j'ai cédé au souci d'alléger les notations. Au reste, le choix d'une origine dans l'espace affine fait apparaître aussitôt l'espace vectoriel sous-jacent, et le choix d'une base dans ce dernier (par exemple la base canonique) ramène à l'espace numérique ; origine et base constituent un repère affine. Le passage de l'un à l'autre des points de vue, d'un indéniable intérêt conceptuel, est donc peu de chose en pratique, et nous avons préféré remettre à plus tard (géométrie des variétés, et géométrie classique, en maîtrise) une réflexion approfondie sur ce qui les différencie[3]. Au niveau du présent livre, contentons-nous de signaler que, si un point mobile $\mathrm{M} = \gamma(t)$ décrit une courbe dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, sa vitesse $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et que le choix d'un repère affine permet d'associer à M ses coordonnées $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ dans l'espace numérique $\mathbb{R}^n$, dont les dérivées sont les composantes du vecteur tangent $\overrightarrow{\gamma}'(t)$.

Si les chapitres *Normes* et *Point fixe* peuvent sembler à première vue hors sujet, c'est que ces notions sont si profondément ancrées dans le cours de calcul différentiel qu'on a pu perdre l'habitude de les y voir. Les espaces vectoriels normés sont le cadre naturel pour approcher par des objets linéaires, et les méthodes itératives qui conduisent au théorème du point fixe sont la clef des résultats fondamentaux sur les fonctions inverses, les fonctions implicites ou les équations différentielles. On pourra toutefois se contenter d'un survol rapide de ces chapitres si l'on souhaite se consacrer au calcul différentiel proprement dit.

On ne doit, plus généralement, voir aucune obligation à lire le livre dans l'ordre de succession des pages ; il nous arrivera d'ailleurs d'utiliser dans un exercice un résultat détaillé dans un chapitre ultérieur... *Un recueil d'exercices devrait pouvoir s'ouvrir au hasard, provoquer la réflexion personnelle sur des exemples, inciter à l'aventure.* Il sera toujours temps de

3. On trouvera par exemple dans Schwartz [37] un exposé du calcul différentiel qui distingue soigneusement les aspects affines et vectoriels.

revenir sur ses pas et consolider ses points d'appui si l'on se sent chanceler. Tout s'apprend par l'exemple.

Pour clore cet avant-propos, et avant de retourner aux « on » et « nous » conformes à la tradition des écrits mathématiques, je saisis cette ultime occasion de parler à la première personne pour exprimer un regret, un vœu et ma gratitude.

Un regret. Sous l'apparence trompeuse d'un produit fini les mathématiques ont une histoire, riche en tâtonnements, en inventions, parfois même en polémiques. Je regrette de n'avoir pu inclure ici de notes historiques, faute de temps et (surtout) de compétence, et recommande vivement la consultation d'ouvrages sur l'histoire des mathématiques, par exemple ceux cités dans la bibliographie.

Un vœu. Le texte contient d'assez nombreux croquis, la plupart sans autre ambition que d'aider à visualiser et mémoriser les notations. Mais j'espère ainsi créer une sournoise accoutumance, jusqu'au point où l'on ne saura plus aborder la moindre question d'algèbre, de géométrie ou d'analyse sans traduire aussitôt l'énoncé par un petit dessin...

Ma gratitude va aux étudiants de licence et aux agrégatifs de ces dernières années qui ont testé, bien malgré eux, certains de ces exercices. C'est grâce à leurs questions que j'ai vu certains points névralgiques, que j'ai tenté de les éclaircir ou de mieux choisir les notations. Le texte doit aussi beaucoup à des conversations de couloirs, petites ou grandes, avec plusieurs collègues de l'Université de Nice : Georges Elencwajg, Stéphane Junca, Frédéric Pham, Elisa Prato, Charles Walter m'ont ici ou là ouvert les yeux ou apporté de précieuses suggestions, et je suis particulièrement reconnaissant à Bernard Candelpergher pour sa critique détaillée d'une partie du manuscrit. Aux Éditions Cassini enfin, c'est André Bellaïche qui m'a donné l'impulsion initiale, m'a fait profiter de ses conseils – sans jamais perdre patience face à mes retards à répétition – et je dois à Rached Mneimné de nombreuses et bénéfiques remarques. Les dessins sont dus à Lionel Auvergne qui a su transformer, d'un coup d'*Illustrator*, tous mes gribouillages en des figures claires et agréables.

Nice, printemps 1998

Que peut-on attendre de bon d'une **deuxième édition**, à part la correction des plus flagrantes bévues de la première ? Sans doute l'auteur, ayant pris quelque recul par rapport à son sujet, devrait-il être à même de mieux aller à l'essentiel, en éliminant quelques pages inutiles. Je n'ai pas eu cette sagesse : outre de nombreuses retouches cette deuxième édition est même légèrement augmentée, enrichie (espérons-le) d'exercices sur

l'inversion dans $\mathbb{R}^n$, l'équation du troisième degré, l'équation aux dérivées partielles de Burgers et la recherche d'applications de déterminant jacobien donné.

Nice, printemps 2003

Notations usuelles

$\mathbb{N}$
  ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbb{Z}$
  ensemble des entiers relatifs $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$\mathbb{R}$
  ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$
  ensemble des nombres complexes.

Re, resp. Im
  partie réelle, resp. imaginaire, d'un nombre complexe : $z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$. $\overline{z} = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$ est le nombre complexe conjugué de z.

$[a, b[$
  l'intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a (incluse) et b (exclue) ; définitions analogues pour $[a, b]$, $]a, b[$ ou $]a, b]$.

$x \in \mathrm{X}$
  le point x est un élément de l'ensemble X.

$\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$
  l'ensemble X est contenu dans l'ensemble Y.

$\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$, resp. $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$
  réunion, resp. intersection, des ensembles X et Y.

$\mathrm{X} \backslash \mathrm{Y}$
  ensemble des points de X qui ne sont pas dans Y.

$f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$
  application de l'ensemble X dans l'ensemble Y.

$x \mapsto y = f(x)$
  le point y est l'image du point x par l'application f.

$g \circ f$
  application composée de f (d'abord) et de g (ensuite) :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ .$$

$\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
  espace des applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F (la continuité est automatique si E est de dimension finie).

det, tr
 déterminant, trace d'une matrice carrée.

I (ou parfois I_n)
 matrice unité $n \times n$ (avec 1 sur la diagonale et 0 ailleurs).

${}^t\mathrm{A}$
 matrice transposée de la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$, d'éléments ${}^ta_{ij} = a_{ji}$.

$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tx\, y$
 produit scalaire usuel des vecteurs (colonnes) x et y de $\mathbf{R}^n$; la base canonique est orthonormée ; si A est une matrice $n \times n$ on a

$$x \cdot (\mathrm{A}y) = {}^tx\mathrm{A}y = ({}^t\mathrm{A}x) \cdot y \ .$$

$\mathrm{D}f(a)$ ou $df(a)$ ou $f'(a)$
 différentielle de l'application f au point a.

f'_i ou f'_{x_i} ou $\partial_i f$ ou $\partial_{x_i} f$ ou $\partial f/\partial x_i$
 dérivée partielle de $f(x_1, ..., x_n)$ par rapport à sa i-ème variable.

$\partial_t f|_{t=t_o}$ ou parfois $\partial_{t=t_o} f$
 dérivée partielle de f par rapport à la variable numérique t, calculée au point $t = t_o$.

C^1 (ou de classe C^1)
 continûment différentiable, c'est-à-dire (pour une fonction de plusieurs variables réelles) admettant des dérivées partielles premières continues.

grad $f(a)$
 gradient de la fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ au point a de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$; caractérisé par $\mathrm{D}f(a)h = \mathrm{grad}\, f(a) \cdot h$ pour tout vecteur h de $\mathbf{R}^n$, il a pour composantes $(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a))$ dans une base orthonormée.

cf. (abréviation du latin *confer*)
 comparer, se reporter à.

i.e. (abréviation du latin *id est*)
 c'est-à-dire.

resp.
 abréviation de respectivement.

Chapitre 1
Normes

1. Objectifs

L'idée fondamentale du calcul différentiel, développée à partir du chapitre suivant, est d'*approcher* une application « quelconque », au *voisinage* d'un point, par une application *linéaire*. Le cadre naturel pour la mettre en œuvre est donc celui des espaces vectoriels (pour donner un sens à « linéaire »), munis d'une norme sur l'espace de départ (pour avoir une notion de « voisinage ») et sur l'espace d'arrivée (pour savoir « approcher »).

Dans ce chapitre on révise quelques notions de base sur les normes, en insistant sur les normes d'applications linéaires.

2. Panorama du cours

Soit E un espace vectoriel sur le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (nombres réels ou nombres complexes).

Définition 1.1. *Une norme sur* E*, c'est une application* $x \mapsto \|x\|$ *de* E *dans* $[0, +\infty[$ *telle que, pour tous vecteurs* $x, y \in \mathrm{E}$ *et tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$*,*

- $\|x\| = 0$ *entraîne* $x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité)*
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

On dit alors que E est un *espace normé sur* $\mathbb{K}$. De là résulte immédiatement que $\|-x\| = \|x\|$ et, en remplaçant y par $y - x$, puis en échangeant x et y,

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

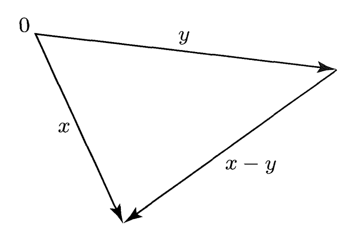


Fig. 1. L'inégalité triangulaire.

Chaque côté du triangle est donc compris entre la somme et la différence des deux autres. Mais une étrange malédiction frappe cette importante inégalité : si chacun (ou presque) connaît l'inégalité triangulaire de la définition, personne (ou presque) ne semble à même d'écrire correctement la double inégalité ci-dessus ! Elle est pourtant fort utile, ne serait-ce que pour établir la continuité de l'application norme $x \mapsto \|x\|$.

La *boule ouverte* $\mathrm{B}(a,r)$ de centre $a \in \mathrm{E}$ et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $\|x-a\| < r$. La *boule fermée* $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $\|x-a\| \leqslant r$. La *sphère* $\mathrm{S}(a,r)$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $\|x-a\| = r$.

La continuité de la norme sur E (pour la topologie d'espace métrique définie par la distance $d(x,y) = \|x-y\|$) montre que les boules ouvertes, respectivement fermées, sont bien des ouverts, respectivement des fermés, de E. De plus, une boule fermée est la fermeture (ou adhérence) de la boule ouverte correspondante : $\overline{\mathrm{B}}(a,r) = \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ si $r > 0$.

Attention ! Cette égalité, pour naturelle qu'elle semble, est fausse pour $r = 0$, et peut être fausse pour $r > 0$ dans un espace métrique quelconque : voir $\mathbb{Z}$, muni de la distance usuelle, où $\overline{\mathrm{B}}(0,1) = \{-1,0,1\}$ n'est pas l'adhérence de $\mathrm{B}(0,1) = \{0\}$.

Une partie A d'un espace vectoriel est dite *convexe* si, contenant deux points, elle contient le segment qui les joint, c'est-à-dire : pour tous $x, y \in \mathrm{A}$ et tout $t \in [0,1]$, le point $(1-t)x + ty$ appartient à A.

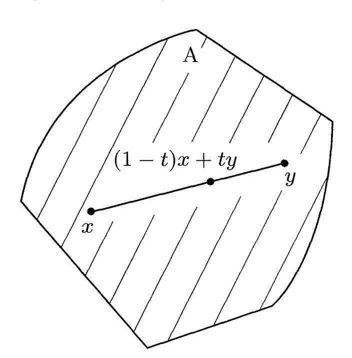


Fig. 2. Un convexe.

Une suite (x_k) d'un espace normé est dite *de Cauchy* si $\|x_j - x_k\|$ tend vers 0 lorsque j et k tendent vers l'infini, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que $j \geqslant \mathrm{N}$ et $k \geqslant \mathrm{N}$ entraînent $\|x_j - x_k\| \leqslant \varepsilon$.

On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé *complet*, c'est-à-dire où toute suite de Cauchy est convergente. Dans un espace de Banach, toute série « absolument convergente » est convergente, c'est-à-dire : la convergence de la série numérique $\sum \|x_k\|$ entraîne celle de la série

vectorielle $\sum x_k$ (réciproque fausse, bien sûr). Cette importante propriété fait des espaces de Banach un cadre très satisfaisant pour la théorie des séries.

Exemple 1. Sur les espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ on utilise souvent les normes classiques suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \qquad \text{(norme de Manhattan)}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(norme euclidienne)}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \, ;$$

on rappelle que max désigne une borne supérieure atteinte. La notation $\|.\|_\infty$ et le nom de « Manhattan » sont motivés par l'Exercice 4.

Exemple 2. L'espace C(I) des fonctions continues $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, où I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, est de Banach pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{I}} |f(x)| \ ,$$

dite *norme de la convergence uniforme sur* I, car une suite de fonctions f_n converge vers f uniformément sur I si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers zéro. La « convergence absolue » d'une série de fonctions $\sum u_n$, au sens de l'espace C(I), se traduit par $\sum \|u_n\|_\infty < \infty$; c'est donc la *convergence normale sur* I de la série $\sum u_n(x)$, i.e. l'existence de nombres $a_n \geqslant 0$ tels que

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \text{ pour tout } x \in \mathrm{I} \text{ et tout } n, \text{ avec } \sum a_n < \infty \ .$$

Ici encore, la notation $\|.\|_\infty$ est motivée par passage à la limite sur les normes L^p pour $p \to \infty$ (cf. Faraut [22] p. 47).

Théorème 1.1. *Sur un espace vectoriel* E *de dimension finie toutes les normes sont équivalentes : si* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *sont deux normes sur* E, *il existe deux constantes* $a > 0$ *et* $b > 0$ *telles que, pour tout* $x \in \mathrm{E}$,

$$a \|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b \|x\| \ .$$

De plus E, *muni d'une quelconque norme, est complet.*

Les inégalités du théorème se traduisent par la double inclusion

$$\overline{\mathrm{B}}(0, 1/b) \subset \overline{\mathrm{B}}'(0, 1) \subset \overline{\mathrm{B}}(0, 1/a)$$

entre les boules respectives des deux normes. Par exemple la figure

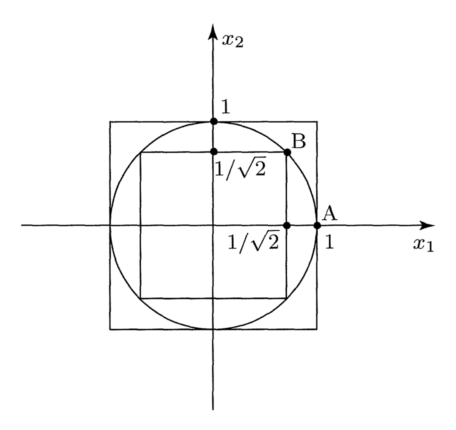


Fig. 3. Normes équivalentes et boules emboîtées.

illustre les inégalités $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$, où les coefficients $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ sont optimaux comme on voit en considérant les points A et B.

Rappelons, afin d'éviter les cercles vicieux, que la clef du théorème d'équivalence est la compacité de la boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^n$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou $\mathbb{R}^{2n}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), auquel on se ramène par choix d'une base de E. Cette boule est en effet un produit d'intervalles $[-1, 1]$, donc est compacte ; voir par exemple Choquet [10] p. 201 ou Pommellet [34] p. 68 pour les détails. L'équivalence est d'ailleurs fausse en dimension infinie (Exercice 7).

Attention ! L'équivalence des normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ revient à dire que l'application identique est continue dans les deux sens entre l'espace E muni de l'une et E muni de l'autre (voir Théorème 1.2 ci-dessous), ou encore que les deux normes définissent sur E la même topologie ; telle quelle cette notion ne soulève guère de difficultés. Mais il ne faut pas confondre avec l'*équivalence des distances* d et d' sur un ensemble E, qui par définition signifie la continuité uniforme, dans les deux sens, de l'application identique entre E muni de d et E muni de d', c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in$ E, l'inégalité $d(x, y) \leqslant \alpha$ entraîne $d'(x, y) \leqslant \varepsilon$, et de même $d'(x, y) \leqslant \alpha$ entraîne $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Bien sûr une double inégalité de la forme

$$a\, d(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant b\, d(x, y)$$

entraîne l'équivalence des distances, mais la réciproque est fausse : voir par exemple $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = \inf(1, |x - y|)$, distances équivalentes sur la droite (prendre $\alpha < 1$ ci-dessus) — pourtant l'une est bornée, l'autre pas, et une double inégalité entre d et d' est impossible. Enfin deux distances équivalentes sur un ensemble E définissent la même topologie sur E, mais la réciproque est fausse : prendre $d(x, y) = |x - y|$ et

$d'(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ sur la droite, et noter que les entiers forment une suite de Cauchy (non convergente !) pour d', mais non pour d.

Théorème 1.2. *Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire entre les espaces normés* E*, de norme $\|.\|_{\mathrm{E}}$, et* F*, de norme $\|.\|_{\mathrm{F}}$. Alors u est continue sur* E *si et seulement s'il existe une constante $\mathrm{M} \geqslant 0$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{E}$,*

$$\|u(x)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \mathrm{M}\, \|x\|_{\mathrm{E}} \ .$$

C'est toujours le cas si l'espace de départ E *est de dimension finie. La meilleure constante* M *s'appelle la norme d'application linéaire $\|u\|$ de u, associée aux normes de* E *et* F*. On a*

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}} = \sup_{\|x\|_{\mathrm{E}} \leqslant 1} \|u(x)\|_{\mathrm{F}} = \sup_{\|x\|_{\mathrm{E}} = 1} \|u(x)\|_{\mathrm{F}} \ .$$

Soit $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'espace vectoriel des applications linéaires *continues* de E dans F, normé par $u \mapsto \|u\|$. On retiendra que

$$\begin{aligned} &\|u(x)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \|u\| \cdot \|x\|_{\mathrm{E}} && \text{si } u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \text{ et } x \in \mathrm{E} \\ &\|u \circ v\| \ \leqslant \|u\| \cdot \|v\| && \text{si } v \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \text{ et } u \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \end{aligned}$$

(avec trois espaces normés E, F, G, les espaces $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$, $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ étant munis des normes associées respectives). Enfin si l'espace d'arrivée F est complet, l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est complet.

En pratique, si on a pu démontrer une inégalité de la forme $\|u(x)\| \leqslant \mathrm{M}\,\|x\|$ pour tout x, on a $\|u\| \leqslant \mathrm{M}$ et cela suffit souvent. Si on veut de plus calculer $\|u\|$ exactement, en montrant que le M obtenu est le plus petit majorant possible, on devra exhiber un vecteur non nul x_0 tel que $\|u(x_0)\| = \mathrm{M}\,\|x_0\|$ (en dimension finie, il en existera toujours : la compacité de la sphère unité assure que $\sup \|u(x)\|$ y est atteint) ou, à défaut, exhiber une suite de x_n non nuls tels que $\|u(x_n)\| \,/\, \|x_n\| \to \mathrm{M}$. Alors on aura bien $\|u\| = \mathrm{M}$.

La norme d'application linéaire est donc relativement difficile à calculer exactement, et cependant très utile à cause des propriétés rappelées ci-dessus, notamment vis-à-vis de la composition des applications. Pour visualiser cette norme et se familiariser avec son calcul, voir notamment l'Exercice 10.

Références : Choquet [10] p. 189-202 ; Dieudonné [18] chapitre 5.

3. Exercices

Ces exercices ont pour but d'approfondir la notion de norme, et particulièrement celle de norme d'application linéaire. À qui aurait hâte

d'aller vers le calcul différentiel proprement dit, on peut sans risque conseiller d'y courir tout de suite, en se contentant d'un bref regard à l'Exercice 10.

Exercice 1. ***Une boule pas ronde.*** **Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.**

Solution. On cherche à définir le parallélogramme et son intérieur par une inégalité de la forme $\|(x,y)\| \leqslant 1$, où $\|.\|$ est une norme à choisir convenablement. Or, les droites qui délimitent le parallélogramme ne passant pas par l'origine, on peut écrire leurs équations sous la forme $ax+by=1$, $cx+dy=1$ et, par symétrie, $ax+by=-1$, $cx+dy=-1$. Le parallélogramme est donc défini par les inéquations

$$-1 \leqslant ax+by \leqslant 1 \ , \ -1 \leqslant cx+dy \leqslant 1 \ ,$$

c'est-à-dire $\|(x,y)\| \leqslant 1$ en notant

$$\|(x,y)\| = \max\left(|ax+by|, |cx+dy|\right) \ .$$

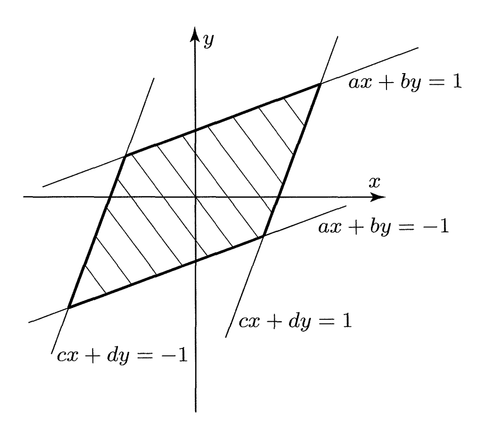


Fig. 4. Une boule pas ronde.

C'est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$ car $\|(x,y)\| = 0$ équivaut à $ax+by=0$ et $cx+dy=0$, c'est-à-dire $x=y=0$ puisque ces deux droites ont des directions distinctes ($ad-bc \neq 0$) ; les deux autres propriétés d'une norme sont immédiates.

Exercice 2. ***Les boules sont homéomorphes.*** **Soit E un espace vectoriel** ***de dimension finie*** **sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$, et soit $\mathrm{B}(a,r)$, resp. $\mathrm{B}'(a',r')$, une boule de E pour la norme $\|.\|$, resp. $\|.\|'$, avec $r>0$ et $r'>0$. Montrer que $\mathrm{B}(a,r)$ et $\mathrm{B}'(a',r')$ sont homéomorphes, et de même $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ et $\overline{\mathrm{B}'}(a',r')$.**

[On pourra se ramener aux boules unité, et utiliser alors une application de la forme $x \mapsto y = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x) \geqslant 0$.]

Solution. Une boule quelconque $\mathrm{B}(a,r)$ est homéomorphe à la boule unité $\mathrm{B} = \mathrm{B}(0,1)$ par translation et homothétie : en effet l'application $x \mapsto \frac{1}{r}(x-a)$ est une bijection de E sur E, continue ainsi que son inverse $y \mapsto ry + a$ (pour la topologie définie par une norme quelconque, d'après le théorème d'équivalence des normes), et qui transforme $\mathrm{B}(a,r)$ en B. De même pour $\mathrm{B}'(a',r')$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{B}'(0,1)$; il suffit donc de montrer que B est homéomorphe à B′.

L'application $x \mapsto y = \lambda(x)x$ donnera $\|y\|' = \|x\|$, et transformera donc B en B′, si on choisit $\lambda(x) = \|x\| / \|x\|'$. On définit donc f par

$$y = f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x \quad \text{si} \quad x \neq 0 \ , \ f(0) = 0 \ .$$

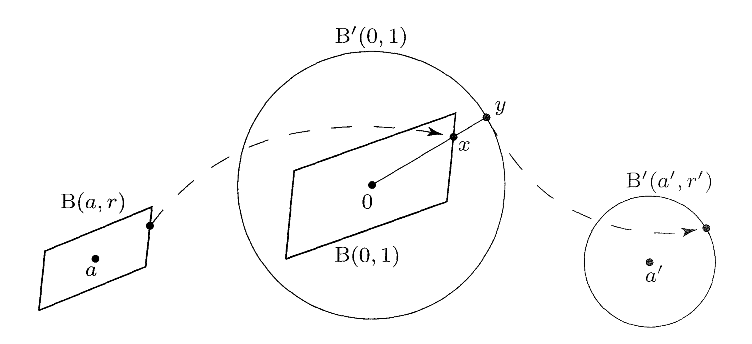


Fig. 5. Homéomorphisme entre $\mathrm{B}(a,r)$ et $\mathrm{B}'(a',r')$ (on a figuré ici la correspondance entre les sphères).

C'est une bijection de E sur lui-même, d'inverse

$$x = f^{-1}(y) = \frac{\|y\|'}{\|y\|}y \quad \text{si} \quad y \neq 0 \ , \ f^{-1}(0) = 0 \ ,$$

comme on le vérifie immédiatement. L'application f est continue à l'origine puisque $\|f(x) - f(0)\|' = \|x - 0\|$; ici on se réfère à nouveau au théorème d'équivalence des normes en dimension finie, qui permet d'utiliser aussi bien l'une que l'autre pour définir la topologie de E. De plus f est continue en tout point distinct de l'origine, d'après sa formule de définition (attention : f n'étant pas linéaire, la continuité à l'origine ne suffirait pas). De même f^{-1} est continue en tout point de E.

Ainsi f est un homéomorphisme de E sur lui-même, qui transforme B en B′ et $\overline{\mathrm{B}}$ en $\overline{\mathrm{B}'}$. En particulier, le parallélogramme de l'Exercice 1 est homéomorphe au disque unité du plan.

Exercice 3. ***Norme et convexité.*** **Montrer qu'on peut, dans la définition d'une norme, remplacer la troisième propriété (inégalité triangulaire) par la suivante :** ***l'ensemble des*** x ***tels que*** $\|x\| \leqslant 1$ ***est une partie convexe de*** **E.**

[On pourra utiliser un barycentre convenable des points $x/\|x\|$ **et** $y/\|y\|$**.]**

Solution. Si $\|.\|$ est une norme au sens de la définition classique, il est clair que sa boule unité est convexe : pour $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\lambda, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$ on a

$$\|\lambda x + \mu y\| \leqslant \lambda \|x\| + \mu \|y\| \leqslant 1 \ .$$

Inversement, supposons l'espace vectoriel E muni d'une application $x \mapsto \|x\|$, à valeurs positives, telle que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, et que l'ensemble défini par $\|x\| \leqslant 1$ soit convexe. Il faut en déduire l'inégalité triangulaire. Pour $x, y \in$ E non nuls, notons

$$z = \frac{1}{\|x\| + \|y\|}(x+y) = \left(\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}\right) \frac{x}{\|x\|} + \left(\frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}\right) \frac{y}{\|y\|} \ .$$

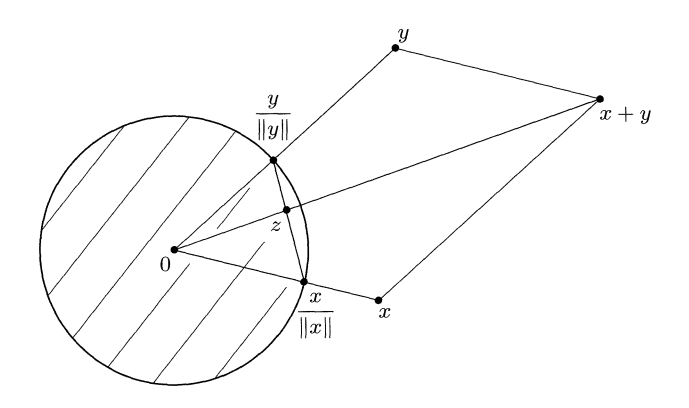


Fig. 6. Inégalité triangulaire et convexité.

On voit que z est un point du segment qui joint les points $x/\,\|x\|$ et $y/\,\|y\|$ de la boule unité. D'après l'hypothèse on a donc $\|z\| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Enfin le cas $x = 0$ ou $y = 0$ est trivial, d'où l'inégalité triangulaire.

Remarque. Ce résultat sera utilisé aux Exercices 4 et 6.

Exercice 4. ***Les normes*** $\|.\|_p$**. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p > 0$ on note**

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \, .$$

1. Dessiner l'ensemble B_p défini par $\|x\|_p \leqslant 1$ lorsque $n = 2$ et $p = 1/2$, 1, 3/2, 2, 3 ou ∞. Montrer que B_p croît avec p.

2. Montrer que $\|.\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour $0 < p < 1$.

3. Montrer que $\|x\|_p$ tend vers $\|x\|_\infty$ lorsque p tend vers l'infini.

[On pourra isoler un $|x_i|$ maximal dans $\|x\|_p$.]

4. Montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour $p \geqslant 1$.

[On pourra montrer que la fonction $x_i \mapsto x_i^p$ est convexe sur $]0, \infty[$, puis que $x \mapsto \|x\|_p^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$, et utiliser l'Exercice 3.]

Solution. 1. En notant (x, y) un point de $\mathbb{R}^2$, les boules unité fermées sont définies par $|x|^p + |y|^p \leqslant 1$, resp. $\max(|x|, |y|) \leqslant 1$. Elles sont évidemment symétriques par rapport à Ox et Oy, donc à O, et aux bissectrices. Il suffit donc de tracer le graphe des fonctions $y = (1 - x^p)^{1/p}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, ce qui n'offre aucune difficulté.

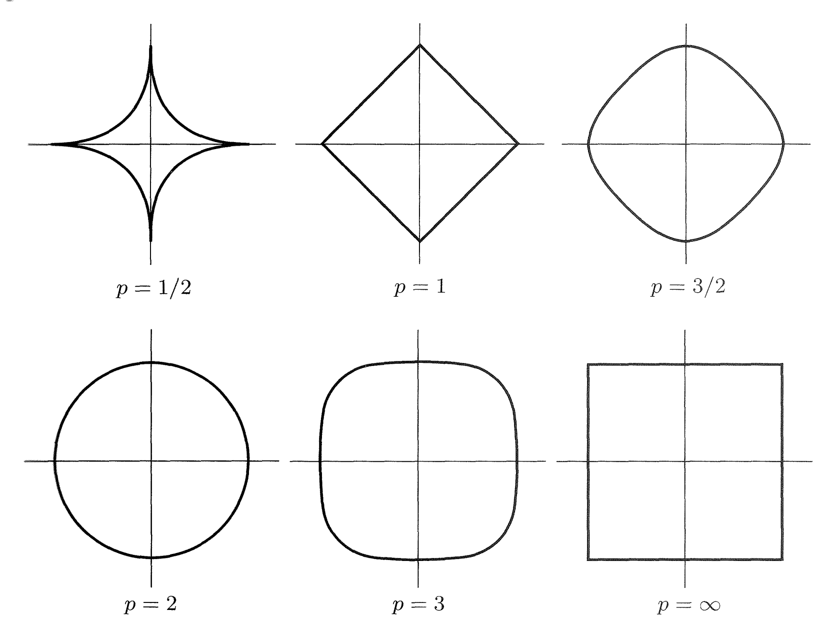


Fig. 7. Les boules B_p.

Remarque. Imaginons une mégalopole quadrillée par une famille de rues rectilignes numérotées et une famille orthogonale d'avenues rectilignes

numérotées. En prenant des axes de coordonnées selon ces directions, on se convaincra aisément que la notion naturelle de distance d'un point à un autre dans cet univers impitoyable est celle donnée par la norme $\|.\|_1$, d'où son nom de « norme de Manhattan ».

Pour établir l'inclusion $B_p \subset B_q \subset B_\infty$ si $0 < p \leqslant q < \infty$, il suffit de montrer l'inégalité

$$(1 - x^p)^{1/p} \leqslant (1 - x^q)^{1/q} \leqslant 1 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1 \ .$$

Notons pour simplifier $t = x^p$, $\alpha = q/p$; il s'agit donc de voir que

$$(1 - t)^\alpha \leqslant 1 - t^\alpha \leqslant 1 \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } \alpha \geqslant 1 \ .$$

Or on a clairement, dans ces conditions,

$$(1 - t)^\alpha \leqslant 1 - t \leqslant 1 - t^\alpha \leqslant 1 \ ,$$

d'où l'inégalité, et l'inclusion voulue. Voir Exercice 5 question 2 pour une généralisation de ce résultat à $\mathbb{R}^n$.

Complément. L'aire de B_p est

$$\operatorname{aire} B_p = 4 \int_0^1 (1 - x^p)^{1/p} dx \ ,$$

que le changement de variable $t = x^p$ ramène à une intégrale classique (fonctions bêta et gamma d'Euler). On trouve ainsi

$$\operatorname{aire} B_p = \frac{4}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 1\right)} = \frac{2}{p} \frac{\Gamma(1/p)^2}{\Gamma(2/p)} \ ,$$

qui est donc fonction croissante de $p > 0$.

2. La réponse est donnée par le dessin précédent, où la boule $B_{1/2}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est visiblement pas convexe. Plus généralement, les éléments $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifient $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ mais $\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2$ pour $0 < p < 1$. L'inégalité triangulaire est donc en défaut pour $0 < p < 1$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et j un indice tel que $|x_j| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = \|x\|_\infty$ (il peut y en avoir plusieurs). Alors

$$|x_j|^p \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p \leqslant n |x_j|^p \ ,$$

d'où en passant aux puissances $1/p$

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p} \|x\|_\infty \ ,$$

ce qui entraîne $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. *Ce résultat motive la notation* $\|x\|_\infty$, qui pouvait surprendre *a priori.*

4. Le cas de $\|.\|_\infty$ ne présente aucune difficulté ; on suppose donc $1 \leqslant p < \infty$. On rappelle que, A étant une partie convexe d'un espace vectoriel, une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si $f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{A}$ et tous $\lambda, \mu \geqslant 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$.

La fonction $t \mapsto t^p$ est convexe sur l'intervalle ouvert $\mathrm{A} =]0, \infty[$, car sa dérivée pt^{p-1} est croissante sur A pour $p \geqslant 1$ (Exercice 42). Par suite on a, pour $\lambda, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$,

$$(\lambda a + \mu b)^p \leqslant \lambda a^p + \mu b^p$$

pour $a, b > 0$ et aussi pour $a = 0$ ou $b = 0$, d'où

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda x_i + \mu y_i|^p \leqslant \sum_i (\lambda |x_i| + \mu |y_i|)^p \leqslant \sum_i (\lambda |x_i|^p + \mu |y_i|^p)$$

pour tous réels x_i, y_i, c'est-à-dire

$$\|\lambda x + \mu y\|_p^p \leqslant \lambda \|x\|_p^p + \mu \|y\|_p^p$$

pour $x, y \in \mathbb{R}^n$. Donc $\|x\|_p \leqslant 1$ et $\|y\|_p \leqslant 1$ entraînent $\|\lambda x + \mu y\|_p \leqslant 1$; c'est dire que la boule unité de $\|.\|_p$ est convexe, et $\|.\|_p$ est une norme d'après l'Exercice 3.

Remarque. L'inégalité triangulaire $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$, appelée *inégalité de Minkowski*, pourrait aussi se montrer directement à partir de l'inégalité de Hölder.

Exercice 5. *Équivalence des normes* $\|.\|_p$. Pour $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ on note $\mathrm{C}_{p,q}$ la plus petite constante positive telle que

$$\|x\|_q \leqslant \mathrm{C}_{p,q} \|x\|_p$$

pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| .$$

1. Déterminer $\mathrm{C}_{p,\infty}$ et $\mathrm{C}_{\infty,p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Désormais p et q sont *finis.*

2. Montrer que $\mathrm{C}_{p,q} = 1$ pour $p \leqslant q$.

[On pourra observer que $\left(|x_i| / \|x\|_p\right)^q \leqslant \left(|x_i| / \|x\|_p\right)^p$.]

3. Montrer que

$$\mathrm{C}_{p,q} = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \text{ pour } p \geqslant q .$$

[On pourra utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto t^{p/q}$ sur $[0, \infty[$.]

Commentaire. Comme noté à propos du théorème d'équivalence des normes, l'inégalité $\|x\|_q \leqslant \mathrm{C}\,\|x\|_p$ équivaut à l'inclusion $\overline{\mathrm{B}}_p(0,1) \subset \overline{\mathrm{B}}_q(0,\mathrm{C})$, ou encore $\overline{\mathrm{B}}_p(0,1/\mathrm{C}) \subset \overline{\mathrm{B}}_q(0,1)$, entre les boules respectives des deux normes, ce qui permet d'illustrer par un dessin (pour $n = 2$ au moins) les calculs ci-dessous.

Solution. 1. Évidemment $\mathrm{C}_{\infty,\infty} = 1$. Pour $1 \leqslant p < \infty$ on a

$$\sum_i |x_i|^p \leqslant n \max_i \left(|x_i|^p\right) = n \left(\max_i |x_i|\right)^p ,$$

avec égalité si $x = (1, 1, \ldots, 1)$, d'où $\mathrm{C}_{\infty,p} = n^{1/p}$. De même $\max |x_i|^p \leqslant \sum |x_i|^p$, avec égalité si $x = (1, 0, \ldots, 0)$, d'où $\mathrm{C}_{p,\infty} = 1$.

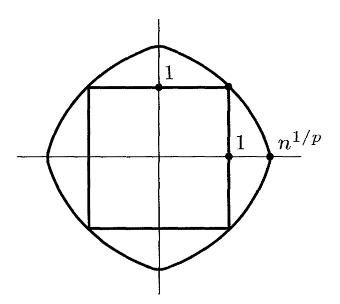


Fig. 8. $\overline{\mathrm{B}}_\infty(0,1) \subset \overline{\mathrm{B}}_p(0, n^{1/p})$, et $\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\,\|x\|_\infty$.

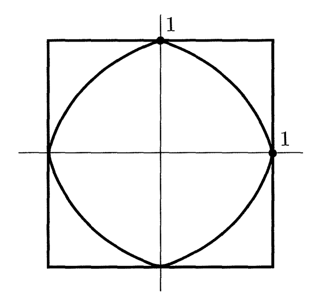


Fig. 9. $\overline{\mathrm{B}}_p(0,1) \subset \overline{\mathrm{B}}_\infty(0,1)$, et $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$.

2. Il s'agit d'établir l'inégalité $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ si $p \leqslant q$; comme c'est une égalité pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$ on aura bien $\mathrm{C}_{p,q} = 1$. Pour $x = 0$ c'est clair. Pour $x \neq 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ on a

$$|x_i| / \|x\|_p = \left(|x_i|^p / \sum_j |x_j|^p \right)^{1/p} \leqslant 1$$

d'où, pour $p \leqslant q$,

$$\left(|x_i| / \|x\|_p\right)^q \leqslant \left(|x_i| / \|x\|_p\right)^p .$$

Sommer de $i = 1$ à n donne alors

$$\left(\sum_i |x_i|^q\right) / \|x\|_p^q \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right) / \|x\|_p^p = 1 ,$$

c'est-à-dire $\|x\|_q^q \leqslant \|x\|_p^q$ comme annoncé. On voit ainsi que $\|x\|_p$ *est fonction décroissante de* $p \geqslant 1$, ce qui généralise à $\mathbb{K}^n$ le résultat de l'Exercice 4 sur les boules de $\mathbb{R}^2$.

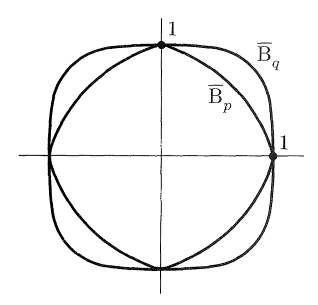


Fig. 10. Cas $p \leqslant q$: $\overline{B}_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$, et $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$.

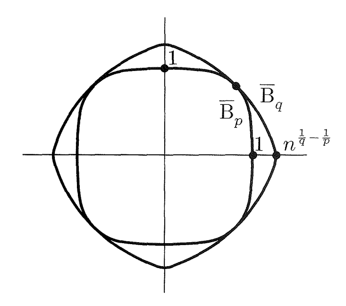


Fig. 11. Cas $p \geqslant q$: $\overline{B}_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0, n^{(1/q)-(1/p)})$, et $\|x\|_q \leqslant n^{(1/q)-(1/p)} \|x\|_p$.

3. Il s'agit d'établir l'inégalité

$$\left(\frac{1}{n}\sum_i |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{si } q \leqslant p .$$

Comme c'est une égalité pour $x = (1,\ldots,1)$ on aura bien $C_{p,q} = n^{(1/q)-(1/p)}$. En élevant les deux membres à la puissance p, et notant $y_i = |x_i|^q$, il faut voir que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_i y_i\right)^{p/q} \leqslant \frac{1}{n}\sum_i y_i^{p/q}$$

pour $y_i \geqslant 0$. Ceci résulte de la convexité de fonction $f(t) = t^{p/q}$ sur $[0,\infty[$ (sa dérivée $(p/q)t^{(p/q)-1}$ est croissante, et utiliser l'Exercice 42) : l'image par f de la moyenne des y_i est donc inférieure à la moyenne de leurs images.

Variante. Cette dernière inégalité pourrait aussi se déduire de l'*inégalité de Hölder*

$$\sum_i |y_i z_i| \leqslant \|y\|_{p/q}\,\|z\|_{p/(p-q)}$$

en prenant $z = (1,\ldots,1)$; cette autre preuve ne diffère d'ailleurs pas essentiellement de la première.

En résumé : pour $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ la norme de l'application identique de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|.\|_p$ vers $\mathbb{K}^n$ muni de $\|.\|_q$ est

$$C_{p,q} = \max\left(n^{(1/q)-(1/p)}, 1\right) ,$$

avec la convention $1/\infty = 0$.

Exercice 6. *Jauge.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la boule unité fermée d'une norme est un compact convexe, symétrique par rapport à 0, et voisinage de 0.

2. Inversement, soit K un compact convexe de E, symétrique par rapport à 0 et voisinage de 0. On note j sa *jauge* : pour $x \in E$, c'est

$$j(x) = \inf I(x) \text{ , où } I(x) = \{\lambda > 0, x \in \lambda K\} .$$

Montrer que j est une norme sur E et que K est sa boule unité fermée.

[On pourra montrer que $I(x) = [j(x),\infty[$ si $j(x) > 0$ et $I(x) =]0,\infty[$ si $j(x) = 0$, et utiliser l'Exercice 3.]

Commentaire. On a vu aux Exercices 1 et 4 divers exemples de boules unité. On en donne maintenant une caractérisation générale par des propriétés géométriques et topologiques. La topologie utilisée ici est celle définie par une norme quelconque.

Solution. 1. La boule $\|x\| \leqslant 1$ de E pour la norme $\|.\|$ est symétrique par rapport à 0 car $\|-x\| = \|x\|$, convexe grâce à l'inégalité triangulaire

$$\|\lambda x + \mu y\| \leqslant \lambda\,\|x\| + \mu\,\|y\| \leqslant \lambda + \mu = 1$$

si $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\lambda, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$, fermée car $x \mapsto \|x\|$ est une fonction continue sur E, et voisinage de 0 car elle contient l'ensemble ouvert défini par $\|x\| < 1$, qui contient 0.

Elle est compacte : le choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$ de E donne en effet un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$, qui transforme $\|.\|$ en une norme sur $\mathbb{R}^n$; il suffit donc de voir que les boules de $\mathbb{R}^n$ pour une norme quelconque sont compactes, ce qui est vrai car elles sont bornées (par équivalence avec la norme $\|.\|_\infty$) et fermées.

2. Soit x un point de E. Intuitivement le nombre $j(x)$ exprime combien de fois il faut gonfler K jusqu'à avaler le point x.

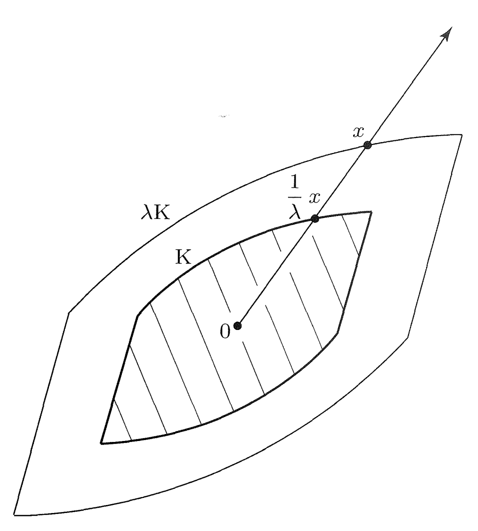


Fig. 12. Jauge de K.

Comme K *est un voisinage de* 0, *l'ensemble* I(x) *n'est pas vide* : car K contient une boule de rayon $r > 0$ centrée à l'origine, donc $\frac{1}{\lambda}x$ appartient à K dès que $\lambda > \|x\|/r$.

Comme K *est fermé*, I(x) *est une partie fermée de* $]0, \infty[$: c'est l'image réciproque de K par l'application continue $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ de $]0, \infty[$ dans E.

Comme K *est convexe et contient* 0, I(x) *est une demi-droite* : pour $\lambda \in \mathrm{I}(x)$ et $\mu \geqslant \lambda$ on a $\frac{1}{\mu}x = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{K}$ (comme barycentre des points 0 et $\frac{1}{\lambda}x$ de K), d'où $\mu \in \mathrm{I}(x)$.

Notant $j(x)$ la borne inférieure de I(x) on a donc deux cas possibles :

$$\mathrm{I}(x) = [j(x), \infty[\text{ si } j(x) > 0 \ , \ \mathrm{I}(x) =]0, \infty[\text{ si } j(x) = 0 \ .$$

Par définition de I(x), x appartient à K si et seulement si 1 appartient à I(x), c'est-à-dire $1 \geqslant j(x)$ dans l'un ou l'autre cas. On a donc

$$K = \{x \in E \text{ , } j(x) \leqslant 1\} \text{ ,}$$

partie convexe de E.

Comme K *est symétrique par rapport à* 0 *et contient* 0, *on a* $j(\alpha x) = |\alpha| j(x)$ *pour tout réel* α : en effet, pour $\alpha > 0$, $x \in \lambda K$ équivaut à $\alpha x \in \alpha\lambda K$, d'où $I(\alpha x) = \alpha I(x)$ et $j(\alpha x) = \alpha j(x)$; le cas $\alpha < 0$ se ramène au précédent par symétrie de K ; enfin $j(0) = 0$ car $I(0) =]0, \infty[$ de façon évidente.

Comme K *est compact,* $j(x) = 0$ *entraîne* $x = 0$: la fonction $x \mapsto \|x\|$ (norme quelconque), continue sur le compact K, y est bornée ; il existe donc $R > 0$ tel que K soit contenu dans la boule $\|x\| \leqslant R$. Si $j(x) = 0$ on a $I(x) =]0, \infty[$, c'est-à-dire $x \in \lambda K$ pour tout $\lambda > 0$; par suite $\frac{1}{\lambda} \|x\| \leqslant R$ pour tout $\lambda > 0$, d'où $x = 0$.

Les propriétés ci-dessus entraînent, grâce à l'Exercice 3, que j est une norme sur E, de boule unité K.

Exercice 7. ***Équivalence des normes : une réciproque.***

1. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toute forme linéaire est continue sur E.

[On pourra comparer $\|x\|$ et $\|x\|+|f(x)|$, où f est une forme linéaire.]

2. Montrer que sur un espace normé de dimension infinie il existe des formes linéaires non continues.

[On pourra prendre une base $(e_i)_{i \in I}$ de l'espace et considérer une forme f telle que $f(e_{i_n}) = n \|e_{i_n}\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.]

3. Conclure. Donner un exemple de normes non équivalentes sur $E = C([0, 1])$.

Solution. 1. Soient $\|.\|$ une norme et f une forme linéaire sur E. L'application $x \mapsto \|x\| + |f(x)|$ est alors une nouvelle norme sur E (vérification immédiate), équivalente à $\|.\|$ d'après l'hypothèse, d'où

$$\|x\| \leqslant \|x\| + |f(x)| \leqslant C \|x\|$$

pour tout x. Par suite $|f(x)| \leqslant (C - 1) \|x\|$, d'où la continuité de f sur E muni de la norme $\|.\|$ (ou de toute autre).

2. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E. Si I est un ensemble infini, il contient sûrement un sous-ensemble dénombrable $I' = \{i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$. Définissons une forme linéaire f sur E selon

$$f(e_i) = n \|e_i\| \text{ si } i = i_n \in I' \text{ , } f(e_i) = 0 \text{ si } i \notin I' \text{ .}$$

Alors f n'est pas continue sur E, l'inégalité $|f(x)| \leqslant C \|x\|$ pour tout x étant manifestement impossible.

3. D'après 1 et 2 on voit que sur tout espace normé de dimension infinie il existe des normes non équivalentes. Joint au Théorème 1 du cours, ceci

montre que *toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel si et seulement s'il est de dimension finie.*

Les normes classiques

$$\|x\|_\infty = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \ , \ \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$$

ne sont pas équivalentes sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$: on a $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty$, mais l'inégalité $\|x\|_\infty \leqslant C\|x\|_1$ pour tout x est impossible (voir $x(t) = t^n$, n tendant vers l'infini).

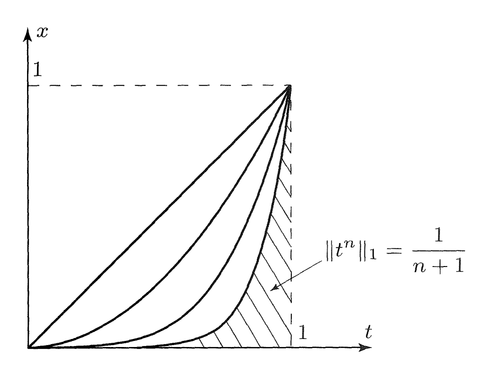


Fig. 13. Les fonctions $x(t) = t^n$.

Exercice 8. ***Norme d'une forme linéaire et distance au noyau.*** **Soient E un espace normé, f une forme linéaire *continue* sur E, non identiquement nulle, et**

$$d(a, \ker f) = \inf_{y\in\ker f} \|a-y\|$$

la distance d'un point a de E au noyau de f.

1. Montrer l'égalité

$$\|f\| = \frac{|f(a)|}{d(a,\ker f)}$$

pour tout a tel que $f(a) \neq 0$.

[On cherchera à écrire $x \in$ E sous la forme $x = \lambda(a-y)$ avec $f(y) = 0$.]

2. Montrer que l' inf est atteint dans $\inf_{y\in\ker f}\|a-y\|$ si et seulement si le sup est atteint dans $\sup_{x\in E, x\neq 0} |f(x)|/\|x\|$. Montrer que c'est le cas si E est de dimension finie, ou si c'est un espace de Hilbert.

3. Soient E l'espace des fonctions complexes continues sur $[-1,1]$, muni de la norme $\|x\| = \sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, et f la forme linéaire

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - \int_{-1}^0 x(t)\,dt\ .$$

Calculer $\|f\|$. La propriété de 2 est-elle vérifiée ici ?

Solution. 1. Comme $f(a) \neq 0$, l'espace E est somme directe de l'hyperplan $\ker f$ et de la droite engendrée par a. L'idée naturelle pour établir l'égalité demandée est donc de décomposer un x quelconque de E selon $x = \lambda a + x'$, avec $f(x') = 0$ et (nécessairement) $\lambda = f(x)/f(a)$. Si $\lambda \neq 0$ on peut alors écrire $x = \lambda(a-y)$ avec $y \in \ker f$. Inversement, cette égalité définit un x tel que $f(x) = \lambda f(a) \neq 0$.

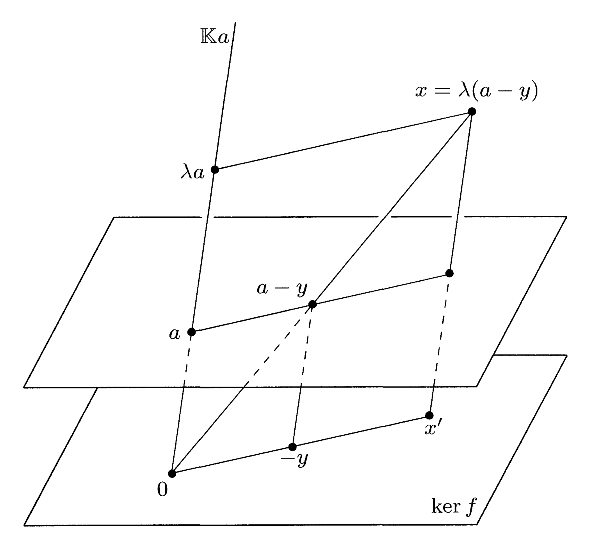


Fig. 14. La décomposition $\mathrm{E} = \ker f \oplus \mathbb{K}a$, avec $f(a) \neq 0$.

En résumé, les vecteurs $x \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) \neq 0$ sont exactement les $x = \lambda(a-y)$ avec $\lambda \neq 0$ et $y \in \ker f$; on a alors

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\|a-y\|}\ .$$

Pour calculer $\|f\| = \sup(|f(x)|/\,\|x\|)$ il suffit évidemment de prendre la borne supérieure sur tous les x tels que $f(x) \neq 0$, d'où

$$\|f\| = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{y\in\ker f} \frac{|f(a)|}{\|a-y\|}$$
$$= \frac{|f(a)|}{\inf_{y\in\ker f}\|a-y\|} = \frac{|f(a)|}{d(a,\ker f)}\ .$$

Remarque. On a donc $\|f\| = |f(a)|$ pour tout point a à distance 1 du noyau de f, ce qui donne une définition géométrique de la norme d'une forme linéaire.

2. S'il existe x_0 tel que $|f(x_0)|/\|x_0\| = \sup_x (|f(x)|/\|x\|) = \|f\|$ alors $f(x_0) \neq 0$ nécessairement (puisque $f \neq 0$) d'où, d'après 1,

$$\frac{|f(a)|}{d(a, \ker f)} = \|f\| = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{|f(a)|}{\|a - y_0\|} .$$

Donc $\inf_{y \in \ker f} \|a - y\|$ est atteint en y_0.

Inversement si $d(a, \ker f) = \|a - y_0\|$ il suffit de prendre par exemple $x_0 = a - y_0$ pour obtenir de même $\|f\| = |f(x_0)|/\|x_0\|$.

Si E est *de dimension finie* sa sphère unité est compacte, donc

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|$$

est atteint en au moins un point de cette sphère.

Remarque. Il est d'ailleurs facile de voir directement dans ce cas que $\inf_{y \in \ker f} \|a - y\|$ est atteint : ce ne peut être qu'en un point y tel que $\|a - y\| \leqslant \|a - 0\|$; or la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(a, \|a\|)$ coupe le sous-espace (de dimension finie) $\ker f$ selon un fermé borné, donc compact, sur lequel $\|a - y\|$ atteint sa borne inférieure.

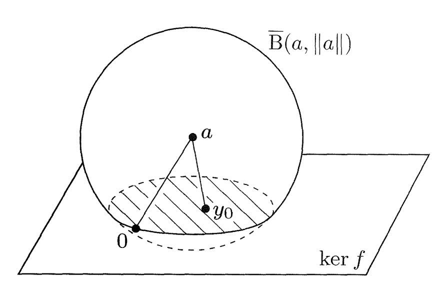


Fig. 15. Meilleure approximation de a par un point de $\ker f$.

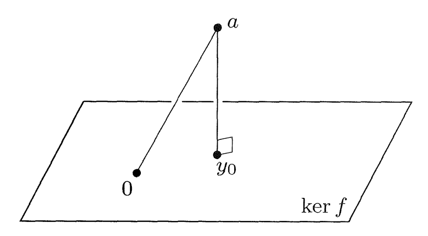


Fig. 16. Cas d'un Hilbert.

Si E est un *espace de Hilbert*, alors $\ker f$ en est un sous-espace fermé, comme noyau d'une forme linéaire continue, et $\inf_{y \in \ker f} \|a - y\|$ est atteint en un point unique, la projection orthogonale de a sur $\ker f$.

3. On a immédiatement

$$|f(x)| \leqslant \max_{[0,1]} |x(t)| + \max_{[-1,0]} |x(t)| \leqslant 2 \|x\| \ ,$$

d'où la continuité de f sur E avec $\|f\| \leqslant 2$. Cette majoration semble bonne ; on va voir qu'elle est optimale, i.e. $\|f\| = 2$, mais qu'il n'existe aucune fonction x telle que $|f(x)| / \|x\| = 2$.

Sinon on aurait, quitte à remplacer x par une fonction proportionnelle, $\|x\| = 1$ et $f(x) = 2$, d'où

$$\int_0^1 (1 - x(t))\, dt + \int_{-1}^0 (1 + x(t))\, dt = 0 \ .$$

En passant aux parties réelles on aurait $|\operatorname{Re} x(t)| \leqslant |x(t)| \leqslant 1$, et les fonctions continues positives $1 - \operatorname{Re} x$, resp. $1 + \operatorname{Re} x$, devraient être identiquement nulles sur $[0, 1]$, resp. $[-1, 0]$, d'où une contradiction en $t = 0$.

Ceci suggère de considérer les fonctions $x_n \in$ E définies pour $n = 1, 2, \ldots$ par

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n} \ . \end{cases}$$

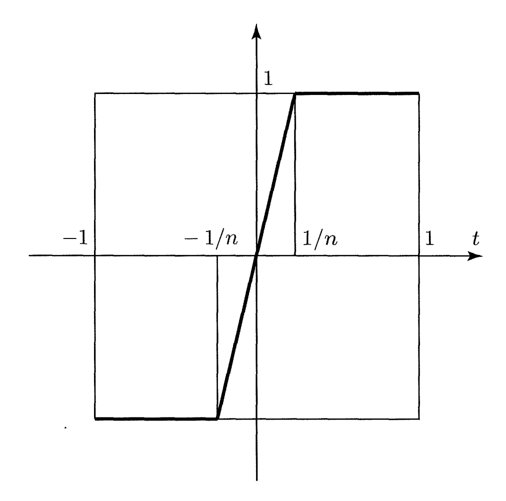


Fig. 17. Les fonctions $x_n(t)$.

Ces fonctions sont proches de la fonction $\operatorname{Re} x$ considérée précédemment, mais sont continues. Il vient immédiatement

$$\|x_n\| = 1 \ , \ f(x_n) = 2\int_0^1 x_n(t)\,dt = 2 - \frac{1}{n}$$

(aires de rectangles et de triangles), d'où $|f(x_n)| / \|x_n\| \to 2$ quand $n \to \infty$. Comme on sait déjà que $|f(x)| / \|x\| \leqslant 2$ pour tout x, on conclut que $\|f\| = \sup\left(|f(x)| / \|x\|\right) = 2$.

Exercice 9. ***Théorème de Hahn-Banach en dimension finie.*** **Soient E un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, V un sous-espace et f une forme linéaire sur V. On veut montrer que f admet un prolongement à l'espace entier, de même norme que f, i.e. qu'il existe une forme linéaire F sur E telle que**

(i) la restriction de F à V coïncide avec f

(ii) $\|\mathrm{F}\| = \|f\|$, où la première norme est celle d'une forme linéaire sur E, et la seconde celle d'une forme sur V.

1. Traiter le cas où E est muni d'une norme euclidienne.

[On pourra utiliser l'orthogonal de V.]

Désormais E est muni d'une norme quelconque. Il suffit clairement de traiter le cas où $\|f\| = 1$.

2. Soit $u \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un nombre a tel que

$$f(x) - \|x - u\| \leqslant a \leqslant f(y) + \|y - u\|$$

pour tous $x, y \in \mathrm{V}$.

3. On fixe un vecteur non nul $u \notin \mathrm{V}$, et on définit $g(x + tu) = f(x) + ta$ pour tout $x \in \mathrm{V}$ et tout t réel. Déduire de 2 que g est un prolongement de f au sous-espace $\mathrm{W} = \mathrm{V} \oplus \mathbb{R}u$, et que $\|g\| = \|f\| = 1$. Conclure.

[Pour montrer que $\|g\| \leqslant \|f\|$ on pourra prendre d'abord $t = -1$.]

4. ***Application.*** **Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ on a**

$$\|x\| = \max \frac{l(x)}{\|l\|} \ ,$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des formes linéaires non nulles l sur E.

Commentaire. Cet important théorème reste valable dans tout espace normé de dimension infinie, mais la preuve exige alors une « récurrence transfinie » basée sur le lemme de Zorn, lui-même équivalent à l'axiome du choix ; voir Rudin [35] Théorème 5.16.

L'introduction du nombre a, parachutée ici par commodité, peut être aisément motivée en examinant la solution de 3.

Solution. 1. Soit V' l'orthogonal de V dans E ; on sait que $E = V \oplus V'$. Définissons F en prolongeant f par 0 sur V' :

$$F(x + x') = f(x) \text{ , pour tous } x \in V, x' \in V' \text{ .}$$

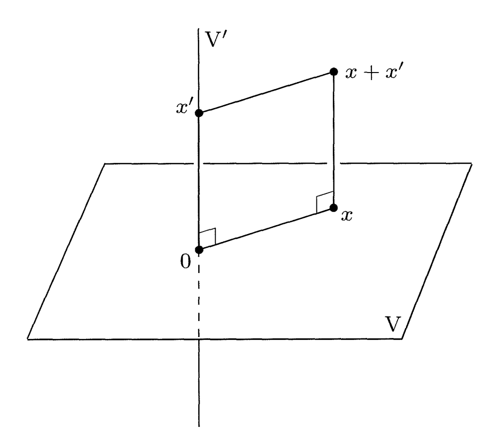


Fig. 18. Cas d'un espace euclidien.

Alors F est une forme linéaire sur E qui prolonge f, et on a d'une part

$$|F(x + x')| = |f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|f\| \cdot \|x + x'\|$$

puisque $\|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 \geqslant \|x\|^2$ par le théorème de Pythagore ; par suite $\|F\| \leqslant \|f\|$. D'autre part, pour $x \in V$,

$$|f(x)| = |F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\|$$

d'où $\|f\| \leqslant \|F\|$ et l'égalité des normes.

2. Si $f = 0$ on prend $F = 0$ et tout est dit. Sinon on peut multiplier f par un scalaire pour se ramener au cas où $\|f\| = 1$, ce qu'on suppose désormais.

Pour $x, y \in V$ et $u \in E$, considérons la différence

$$\begin{aligned}(f(x) - \|x - u\|) - (f(y) + \|y - u\|) &= f(x - y) - \|x - u\| - \|y - u\| \\ &\leqslant \|x - y\| - \|x - u\| - \|y - u\| \text{ ,}\end{aligned}$$

négative d'après l'inégalité triangulaire. On a donc

$$\sup_{x \in V}(f(x) - \|x - u\|) \leqslant \inf_{y \in V}(f(y) + \|y - u\|) \text{ ,}$$

et il suffit de choisir a entre ces deux nombres pour obtenir le résultat.

Remarque. Si u appartient au sous-espace V, on a nécessairement $a = f(u)$.

3. L'application g est évidemment une forme linéaire sur $\mathrm{W} = \mathrm{V} \oplus \mathbb{R}u$, prolongeant f, d'où $\|f\| \leqslant \|g\|$ comme à la fin de la question 1.

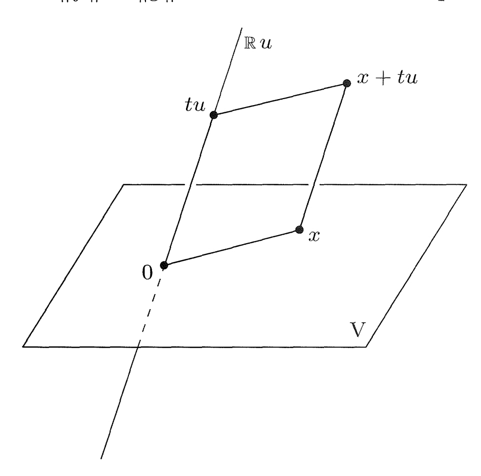


Fig. 19. Cas général : l'espace $\mathrm{W} = \mathrm{V} \oplus \mathbb{R}u$.

D'autre part la définition de a montre que $g(x-u) = f(x) - a$ est compris entre $-\|x-u\|$ et $+\|x-u\|$ d'après 2 (où on prend $y = x$), c'est-à-dire

$$|g(x-u)| \leqslant \|x-u\|$$

pour tout $x \in \mathrm{V}$. Pour $t \neq 0$ on peut remplacer x par $-x/t$ ce qui donne

$$|g(x+tu)| \leqslant \|x+tu\| \ ,$$

valable aussi pour $t = 0$ car $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|x\|$. Finalement $\|g\| \leqslant 1 = \|f\|$ et on a bien prolongé f en une forme g de même norme.

Le théorème de Hahn-Banach en résulte : si $\mathrm{V} = \mathrm{E}$ on prend $\mathrm{F} = f$ et il n'y a rien à démontrer ; sinon on peut compléter une base de V en une base de E par des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$, et on peut construire F en répétant k fois l'opération précédente, ce qui prolonge f à $\mathrm{V} \oplus \mathbb{R}u_1$, puis à $\mathrm{V} \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$,... et enfin E avec la même norme.

4. D'une part on a $|l(x)|/\|l\| \leqslant \|x\|$ pour toute forme linéaire $l \neq 0$, par la définition même de $\|l\|$.

D'autre part la forme linéaire f définie sur la droite $\mathrm{V} = \mathbb{R}x$ par $f(tx) = t\|x\|$, de norme 1, peut se prolonger par le théorème de Hahn-Banach en une forme F sur E, de norme 1, qui vérifie donc

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\|\mathrm{F}\|} = \frac{f(x)}{1} = \|x\| \ .$$

On a donc bien $\max(l(x)/\|l\|) = \|x\|$, le maximum étant atteint pour $l = \mathrm{F}$.

Remarque. Ce résultat est beaucoup plus facile si E est muni d'une norme euclidienne : le maximum est obtenu pour la forme linéaire $l(y) = x \cdot y$ (produit scalaire par x), qui vérifie $\|l\| = \|x\|$.

Exercice 10. ***Normes classiques de matrices.*** **Soit A une matrice carrée $n \times n$ d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ on note $\|A\|_{p,q}$ sa norme d'application linéaire, de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|.\|_p$ vers $\mathbb{K}^n$ muni de $\|.\|_q$. On rappelle que**

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leqslant p < \infty, \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \ .$$

On note A* la matrice transposée conjuguée de A, et $\rho(A) = \max |\lambda|$ le *rayon spectral* de A (plus grand module des valeurs propres de A ; voir Exercice 12 pour plus de détails).

On considère d'abord l'exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Représenter sur un même dessin les images par A des sphères $\|x\|_1 = 1$ et $\|x\|_\infty = 1$. En déduire $\|A\|_{1,1}$, $\|A\|_{1,\infty}$, $\|A\|_{\infty,1}$ et $\|A\|_{\infty,\infty}$.

2. Calculer de même $\|A\|_{1,2}$ et $\|A\|_{\infty,2}$.

3. Calculer $\|A\|_{2,2}$.

On revient maintenant au cas général $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

4. Vérifier que

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{ij}| \right) \ , \ \|A\|_{1,1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{ij}| \right) \ .$$

5. On note $x \cdot y = \sum_i x_i \overline{y_i}$. Montrer que

$$\|x\|_1 = \max_{\|y\|_\infty = 1} |x \cdot y| \ , \ \|y\|_\infty = \max_{\|x\|_1 = 1} |x \cdot y| \ ,$$

et retrouver ainsi l'égalité

$$\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{\infty,\infty} \ .$$

6. Si A est *hermitienne* (i.e. A* = A), montrer que

$$\|A\|_{2,2} = \rho(A) \ .$$

[On pourra diagonaliser A dans une base orthonormale.]

7. Montrer qu'on a toujours

$$\|A\|_{2,2} = (\rho(A^*A))^{1/2} \ .$$

[On pourra utiliser 6 en notant que $\|Ax\|_2^2 = A^*Ax \cdot x$.]

Commentaire. Gymnastique de santé (longue mais facile) avec les normes les plus courantes, cet exercice repose sur l'idée simple suivante : puisque

$$\|A\|_{p,q} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q \ ,$$

cette norme s'obtient en étudiant l'image par A de la sphère unité de la norme $\|.\|_p$. Le cas de la matrice unité I a fait l'objet de l'Exercice 5, où $C_{p,q} = \|I\|_{p,q}$.

Solution.

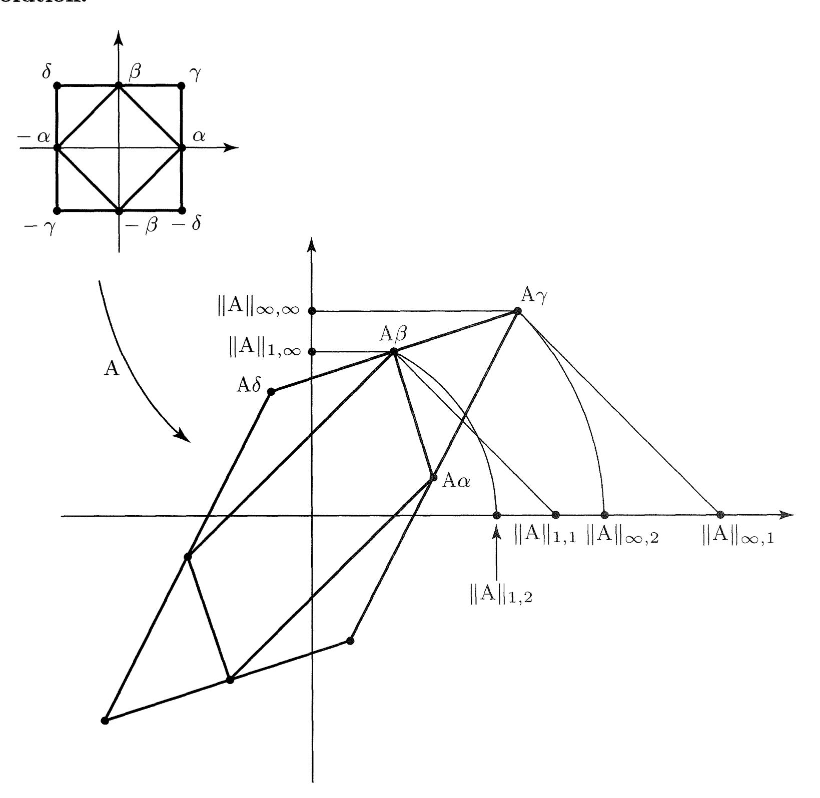


Fig. 20. Les sphères $\|x\|_1 = 1$, $\|x\|_\infty = 1$, et leurs images par A. Noter que Aβ est le milieu de Aγ et Aδ, etc.

1. Ici la sphère $\|x\|_1 = 1$ est le carré de sommets $\alpha = (1,0)$, $\beta = (0,1)$, $-\alpha$ et $-\beta$, son image par A est donc le parallélogramme de sommets $A\alpha = (3,1)$, $A\beta = (2,4)$, $-A\alpha$ et $-A\beta$, d'où facilement

$$\|A\|_{1,\infty} = \|A\beta\|_\infty = 4 \text{ et } \|A\|_{1,1} = \|A\beta\|_1 = 6 \ .$$

De même la sphère $\|x\|_\infty = 1$ est le carré de sommets $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \beta - \alpha$, $-\gamma$ et $-\delta$; son image par A a pour sommets $A\gamma = (5,5)$, $A\delta = (-1,3)$, $-A\gamma$ et $-A\delta$, d'où facilement

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \|A\gamma\|_\infty = 5 \text{ et } \|A\|_{\infty,1} = \|A\gamma\|_1 = 10 \; .$$

2. La figure montre aussi que

$$\|A\|_{1,2} = \|A\beta\|_2 = 2\sqrt{5} \text{ et } \|A\|_{\infty,2} = \|A\gamma\|_2 = 5\sqrt{2} \; .$$

3. On peut ici calculer bêtement (en attendant la question 7 pour être plus « intelligents »), en paramétrant le cercle unité $\|x\|_2 = 1$ selon $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$. Son image par A est donc l'ellipse

$$y_1 = 3\cos t + 2\sin t \; , \; y_2 = \cos t + 4\sin t \; ,$$

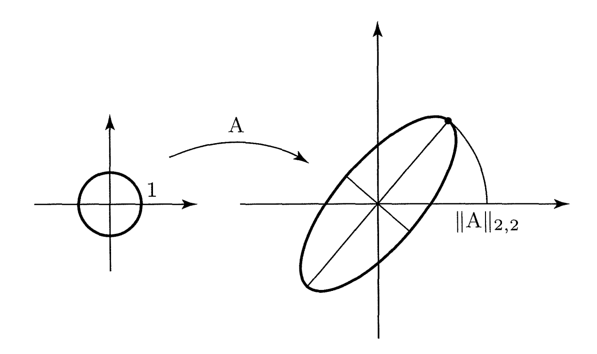


Fig. 21. La sphère $\|x\|_2 = 1$ et son image par A.

et il s'agit de trouver le maximum de la fonction

$$\begin{aligned} f(t) = y_1^2 + y_2^2 &= 5(3 + 2\sin 2t - \cos 2t) \\ &= 5(3 + \sqrt{5}\sin(2t - \theta)) \end{aligned}$$

où θ est l'angle défini par $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$. Le maximum (grand axe de l'ellipse) s'obtient donc pour $t = (\theta/2) + (\pi/4)$ et le minimum (petit axe) dans la direction orthogonale $t = (\theta/2) - (\pi/4)$. La longueur du demi-grand axe donne

$$\|A\|_{2,2} = \sqrt{5(3+\sqrt{5})} = 5{,}116...$$

4. On généralise ce qui a été fait en 1. En notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Ax = y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ d'où, pour chaque i,

$$|y_i| \leqslant \sum_j |a_{ij}||x_j| \leqslant \left(\sum_j |a_{ij}|\right) \|x\|_\infty \; ;$$

par suite

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty \ .$$

Cette inégalité est une égalité si x est un point bien choisi de la sphère unité. Soient en effet i_0 un indice donnant une valeur maximale à $\sum_j |a_{ij}|$, et des $x_j \in \mathbb{K}$ tels que $|x_j| = 1$ et $a_{i_0 j} x_j = |a_{i_0 j}|$ pour $j = 1, \ldots, n$ (par exemple $x_j = 1$ si $a_{i_0 j} = 0$). Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$$|y_{i_0}| = \sum_j |a_{i_0 j}| = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty \ .$$

Compte tenu de l'inégalité précédente, on a donc en ce point

$$\|Ax\|_\infty = \max |y_i| = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty \ ,$$

par suite

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) \ .$$

Pour $\|.\|_1$ on écrira de même

$$\sum_i |y_i| \leqslant \sum_i \left(\sum_j |a_{ij}||x_j| \right) = \sum_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) |x_j| \ ,$$

d'où

$$\|Ax\|_1 \leqslant \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) \|x\|_1 \ .$$

Si j_0 est un indice donnant une valeur maximale à $\sum_i |a_{ij}|$, on aura une égalité en choisissant $x = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 à la j_0-ième place, d'où

$$\|A\|_{1,1} = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) \ .$$

5. La symétrie des résultats trouvés en 4 vient de ce que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des *normes duales* sur $\mathbb{K}^n$. En effet, on a d'abord l'inégalité

$$\left| \sum_i x_i \overline{y_i} \right| \leqslant \left(\sum_i |x_i| \right) (\max_i |y_i|) \ ,$$

avec égalité si y est choisi tel que $x_i\overline{y_i} = |x_i|$ et $|y_i| = 1$ pour tout i (par exemple $y_i = 1$ quand $x_i = 0$), d'où

$$\max_{\|y\|_\infty=1} |x \cdot y| = \|x\|_1 \ .$$

Il y a encore égalité si on choisit $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec 1 à la i_0-ième place, où i_0 est un indice donnant à $|y_i|$ sa valeur maximale. Par suite

$$\max_{\|x\|_1=1} |x \cdot y| = \|y\|_\infty \ .$$

Comme $\mathrm{A}^*x \cdot y = x \cdot \mathrm{A}y$ on obtient alors

$$\|\mathrm{A}^*x\|_1 = \max_{\|y\|_\infty=1} |x \cdot \mathrm{A}y| \leqslant \max_{\|y\|_\infty=1} (\|x\|_1 \|\mathrm{A}y\|_\infty) = \|\mathrm{A}\|_{\infty,\infty} \|x\|_1$$

d'où

$$\|\mathrm{A}^*\|_{1,1} \leqslant \|\mathrm{A}\|_{\infty,\infty} \ .$$

De même

$$\|\mathrm{A}y\|_\infty = \max_{\|x\|_1=1} |\mathrm{A}^*x \cdot y| \leqslant \max_{\|x\|_1=1} (\|\mathrm{A}^*x\|_1 \|y\|_\infty) = \|\mathrm{A}^*\|_{1,1} \|y\|_\infty \ ,$$

d'où

$$\|\mathrm{A}\|_{\infty,\infty} \leqslant \|\mathrm{A}^*\|_{1,1} \ .$$

6. Si A est hermitienne, on sait que ses valeurs propres λ_i sont réelles, et qu'on peut diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$. Notant $'$ ce qui est relatif à cette nouvelle base, on a

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}x\|_2^2 = \|\mathrm{A}'x'\|_2^2 = \sum_i \lambda_i^2 |x_i'|^2 &\leqslant \max_i \lambda_i^2 \cdot \sum_i |x_i'|^2 \\ &= (\rho(\mathrm{A}))^2 \|x\|_2^2 \ .\end{aligned}$$

Cette inégalité devient une égalité si on choisit pour x un vecteur propre de A associé à une valeur propre de valeur absolue maximale, d'où

$$\|\mathrm{A}\|_{2,2} = \rho(\mathrm{A}) \ .$$

7. L'idée est de se ramener au cas précédent. On a d'abord

$$\|\mathrm{A}x\|_2^2 = \mathrm{A}x \cdot \mathrm{A}x = \mathrm{A}^*\mathrm{A}x \cdot x \leqslant \rho(\mathrm{A}^*\mathrm{A}) \|x\|_2^2$$

puisque $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ est hermitienne, et il y a égalité si on choisit pour x un vecteur propre de $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ associé à une valeur propre de valeur absolue maximale, d'où

$$\|\mathrm{A}\|_{2,2}^2 = \rho(\mathrm{A}^*\mathrm{A}) \ .$$

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ on trouve $A^*A = 10\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $5(3 \pm \sqrt{5})$, ce qui redonne la norme obtenue en 3 (où la matrice A^*A se dissimulait sous la fonction f).

Exercice 11. *Être ou ne pas être contractante.* On donne α réel et $\lambda > \mu \geqslant 0$. Expliciter la matrice 2×2 symétrique réelle A de valeurs propres λ et μ, qui admet $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ pour vecteur propre associé à λ. Comparer $\|A\|_{1,1}$, $\|A\|_{2,2}$ et $\|A\|_{\infty,\infty}$ (cf. Exercice 10).

En déduire des exemples de matrices *symétriques* qui sont contractantes pour certaines normes et non pour d'autres.

Commentaire. On rappelle que A est dite *contractante* pour la norme $\|.\|$ si $\|Ax\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout vecteur x, avec une constante $k < 1$. Si on renonce à la symétrie de A, les calculs de l'Exercice 10 (questions 1 et 3) montrent que pour $a > 0$ la matrice $\begin{pmatrix} 3a & 2a \\ a & 4a \end{pmatrix}$ est contractante pour $\|.\|_1$, resp. $\|.\|_2$, resp. $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$a < 1/6 = 0{,}1666\ldots \text{ , resp. } a < 0{,}1954\ldots \text{ , resp. } a < 1/5 = 0{,}2 \;.$$

Dans la mise en œuvre des méthodes itératives (chapitre 4), le choix de la norme utilisée pourra donc être essentiel ; voir aussi l'Exercice 33.

Solution. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

la matrice de rotation d'angle α. Puisque $R_\alpha e_1$ est vecteur propre de la matrice symétrique A, un vecteur orthogonal l'est aussi, d'où

$$AR_\alpha e_1 = \lambda R_\alpha e_1 \text{ et } AR_\alpha e_2 = \mu R_\alpha e_2 \;,$$

c'est-à-dire

$$R_\alpha^{-1} A R_\alpha \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ , d'où } A = \begin{pmatrix} \sigma + \delta\cos 2\alpha & \delta\sin 2\alpha \\ \delta\sin 2\alpha & \sigma - \delta\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

en notant $\sigma = (\lambda + \mu)/2$, $\delta = (\lambda - \mu)/2$.

D'après l'Exercice 10 on a alors

$$\begin{aligned} \|A\|_{2,2} &= \lambda = \sigma + \delta \;, \\ \|A\|_{\infty,\infty} &= \|A\|_{1,1} \\ &= \max\left(|\sigma + \delta\cos 2\alpha| + |\delta\sin 2\alpha|, |\sigma - \delta\cos 2\alpha| + |\delta\sin 2\alpha|\right) \;. \end{aligned}$$

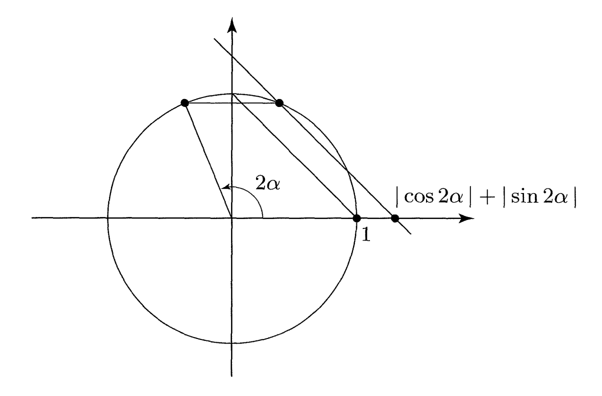


Fig. 22. L'inégalité $|\cos 2\alpha| + |\sin 2\alpha| \geqslant 1$.

Comme $0 < \delta \leqslant \sigma$, le maximum est $\sigma + \delta(|\cos 2\alpha| + |\sin 2\alpha|)$, supérieur à $\sigma + \delta$ puisque

$$(|\cos 2\alpha| + |\sin 2\alpha|)^2 = 1 + |\sin 4\alpha| \geqslant 1 \ .$$

On a finalement, pour les matrices étudiées ici,

$$\|\mathrm{A}\|_{\infty,\infty} = \|\mathrm{A}\|_{1,1} = \sigma + \delta\sqrt{1 + |\sin 4\alpha|} \geqslant \|\mathrm{A}\|_{2,2} = \sigma + \delta \ .$$

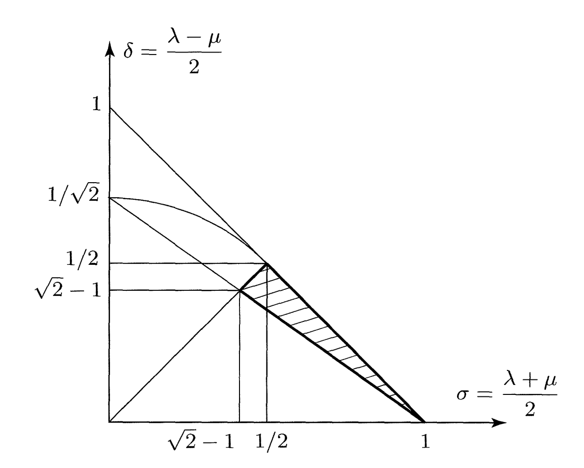


Fig. 23. La zone hachurée donne des matrices contractantes pour $\|.\|_2$, non contractantes pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

Discussion. L'écart entre les normes est maximal quand $|\sin 4\alpha| = 1$, par exemple $\alpha = \pi/8$. Les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \sigma + (\delta/\sqrt{2}) & \delta/\sqrt{2} \\ \delta/\sqrt{2} & \sigma - (\delta/\sqrt{2}) \end{pmatrix} \ , \ 0 < \delta \leqslant \sigma \ , \ \sigma + \delta < 1 < \sigma + \delta\sqrt{2} \ ,$$

sont donc contractantes pour la norme euclidienne mais non pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. Les (σ, δ) concernés forment la zone hachurée de la figure. Par exemple $\sigma = 1/2$ et $\delta = \sqrt{2}/3$ donnent

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} , \ \|\mathrm{A}\|_{\infty,\infty} = \|\mathrm{A}\|_{1,1} = 1{,}166... \ , \ \|\mathrm{A}\|_{2,2} = 0{,}971...$$

Exercice 12. ***Rayon spectral.*** **Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u une application linéaire de E dans E. On définit le *rayon spectral* de u par**

$$\rho(u) = \max_{\lambda} |\lambda|$$

où λ parcourt l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de u. Si $\|.\|$ est une norme sur E, on appelle *norme associée* de u le nombre $\|u\| = \max_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) il existe une norme sur E pour laquelle u est *contractante*, i.e. telle que la norme associée de u soit < 1 ;

(ii) $\rho(u) < 1$;

(iii) $u^n \to 0$ quand $n \to \infty$.

[Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$ on pourra utiliser la décomposition en sous-espaces caractéristiques $\mathrm{E} = \bigoplus_j \ker(u - \lambda_j \mathrm{I})^{m_j}$; pour $(iii) \Rightarrow (i)$ on pourra partir d'une norme quelconque $\|.\|_0$ sur E, et en construire une nouvelle de la forme

$$\|x\| = \|x\|_0 + \|u(x)\|_0 + \cdots + \|u^p(x)\|_0 \ ,$$

où p sera convenablement choisi.]

2. En déduire que, pour toute u,

$$\rho(u) = \inf \|u\| \ ,$$

où l'inf porte sur l'ensemble de toutes les normes d'applications linéaires associées aux différentes normes de E. Cet inf est-il atteint ?

[On pourra appliquer 1 à $(\rho(u) + \varepsilon)^{-1} u$.]

3. Montrer que, pour toute u,

$$\rho(u) = \lim_{n \to \infty} \|u^n\|^{1/n} \ ,$$

où $\|.\|$ est une norme associée quelconque.

[Même indication qu'en 2.]

Commentaire. L'ensemble des valeurs propres est le *spectre de u*, et $\rho(u)$ est donc le rayon du plus petit disque de $\mathbb{C}$, de centre 0, qui contient le spectre. Le but de l'exercice est de montrer les liens entre le rayon

spectral et diverses normes sur l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$; mais, $\rho(u)$ étant nul si et seulement si u est nilpotente, ρ lui-même n'est pas une norme sur cet espace.

Il y a bien des présentations possibles des résultats ci-dessus : comparer Demailly [13] p. 104, Demazure [14] p. 211, Horn et Johnson [25] p. 299, Rudin [35] théorème 18.9, Tauvel [38] p. 337, etc. L'accent est mis ici, en suivant Horn et Johnson, sur la question 1 : l'équivalence de (i) et (ii) répond à la question soulevée à l'Exercice 11 sur le choix d'une norme qui assure la convergence d'une méthode itérative.

L'égalité de 3, plus élégante mais moins utile, en est alors un corollaire facile. Elle peut aussi s'obtenir directement par un argument de variable complexe que l'on peut résumer ainsi (voir Demazure ou Rudin *loc. cit.* pour plus de détails). La fonction $f(z) = (z\mathrm{I} - u)^{-1}$ est holomorphe (à valeurs dans l'espace vectoriel complexe des applications linéaires), sauf aux pôles $z = \lambda$, valeurs propres de u. La plus grande couronne de centre 0 où elle soit développable en série de Laurent est donc $|z| > \rho(u)$. Or cette série s'écrit $f(z) = \sum_0^\infty (1/z)^{n+1}u^n$, et son domaine de convergence, donné par la règle de Hadamard, est $|z| > \limsup \|u^n\|^{1/n}$. Cette lim sup est donc égale à $\rho(u)$; d'autre part l'inégalité facile $\rho(u) \leqslant \|u^n\|^{1/n}$ pour tout n (cf. 3 ci-dessous) donne

$$\limsup \|u^n\|^{1/n} = \rho(u) \leqslant \liminf \|u^n\|^{1/n}$$

et la conclusion de 3.

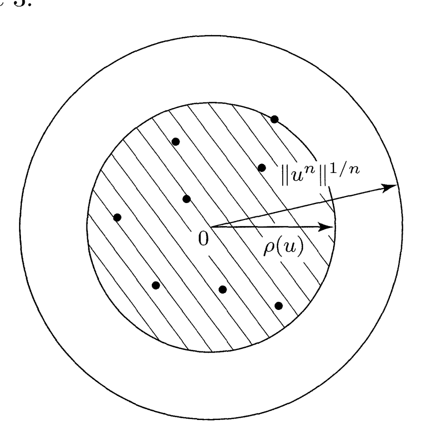


Fig. 24. Spectre de u et rayon spectral.

Tous les résultats restent valables avec $\mathbb{R}$ *pour corps de base*, au prix de quelques complications dans les démonstrations : il y a lieu de séparer parties réelle et imaginaire lorsqu'on fait intervenir valeurs propres et vecteurs propres de u ; voir Demailly ou Demazure, *loc. cit.*

Solution. 1. L'espace des applications linéaires de E dans E étant de dimension finie, toutes les normes y définissent la même topologie. On peut donc écrire $u^n \to 0$ sans préciser la norme utilisée. Si on écrit la matrice de u^n dans une base de E, cela équivaut à la convergence vers zéro de ses vecteurs colonnes, images des vecteurs de base ; par linéarité, cela revient à écrire $u^n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

(i) *entraîne* (ii). Soient λ une valeur propre de u et $x \in \mathrm{E}$ un vecteur propre associé (non nul). On a alors, avec la norme de l'hypothèse (i),

$$\|u(x)\| = |\lambda|\,\|x\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$$

d'où $|\lambda| \leqslant \|u\|$; par suite $\rho(u) \leqslant \|u\| < 1$.

(ii) *entraîne* (iii). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. On montre en algèbre linéaire que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques

$$\mathrm{E}_j = \ker(u - \lambda_j \mathrm{I})^{m_j} \ ,$$

avec $1 \leqslant j \leqslant k$ et $\dim \mathrm{E}_j = m_j$. Pour $x_j \in \mathrm{E}_j$ on a donc

$$u^n(x_j) = (u - \lambda_j \mathrm{I} + \lambda_j \mathrm{I})^n\,(x_j) = \sum_{0 \leqslant p < m_j} \mathrm{C}_n^p (u - \lambda_j \mathrm{I})^p \lambda_j^{n-p} x_j$$

par la formule du binôme. Pour $x = x_1 + \cdots + x_k \in \mathrm{E}$ on en déduit, en utilisant une norme quelconque sur E et la norme associée,

$$\|u^n(x)\| \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \|u^n(x_j)\| \leqslant \sum_j \sum_p \mathrm{C}_n^p \,\|u - \lambda_j \mathrm{I}\|^p\, |\lambda_j|^{n-p}\, \|x_j\| \ .$$

Or $|\lambda_j| \leqslant \rho(u) < 1$ et chaque C_n^p est un polynôme en n de degré $p < m_j \leqslant d = \dim \mathrm{E}$; par suite

$$\|u^n(x)\| \leqslant \mathrm{P}(n) \rho(u)^{n-d+1} \max_j \|x_j\| \ ,$$

où P est un polynôme de degré au plus $d-1$, dont les coefficients dépendent de u. Lorsque n tend vers l'infini on a donc $u^n(x) \to 0$ pour chaque $x \in \mathrm{E}$.

(iii) *entraîne* (i). Soit $\|.\|_0$ une norme quelconque sur E. En gardant la même notation pour la norme associée, l'hypothèse (iii) assure l'existence d'un entier $p \geqslant 0$ tel que $\left\|u^{p+1}\right\|_0 < 1$. Alors l'égalité

$$\|x\| = \|x\|_0 + \|u(x)\|_0 + \cdots + \|u^p(x)\|_0$$

définit une nouvelle norme sur E (car $\|x\| \geqslant \|x\|_0$, donc $\|x\| = 0$ entraîne $x = 0$), et on a évidemment

$$\|u(x)\| - \|x\| = \left\|u^{p+1}(x)\right\|_0 - \|x\|_0 \ .$$

Le second membre est strictement négatif pour $x \neq 0$ d'après le choix de p, d'où $\|u(x)\| < \|x\|$. On voit ainsi que $\|u\| = \max_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ est strictement inférieur à 1.

2. En répétant l'argument de $(i) \Rightarrow (ii)$ ci-dessus, on obtient plus généralement $\rho(u) \leqslant \|u\|$,pour toute u et toute norme associée.

D'autre part on a évidemment $\rho(\alpha u) = |\alpha|\rho(u)$ pour tout scalaire α. Si on choisit $\alpha = (\rho(u) + \varepsilon)^{-1}$ avec $\varepsilon > 0$, on a donc $\rho(\alpha u) < 1$ et l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ assure l'existence d'une norme associée telle que $\|\alpha u\| < 1$, c'est-à-dire $\|u\| < \rho(u) + \varepsilon$. Ceci entraîne l'égalité demandée $\rho(u) = \inf \|u\|$.

Cette borne inférieure n'est pas atteinte, puisque ρ lui-même n'est pas une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$: on a $\rho(u) = 0$ pour u nilpotent.

3. On va reprendre la méthode de 2, avec u^n au lieu de u. Si λ est une valeur propre de u il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, d'où $u^n(x) = \lambda^n x$, et λ^n est valeur propre de u^n. Inversement si μ est valeur propre de u^n, soit λ une valeur propre de la restriction de u au sous-espace $\mathrm{F} = \ker(u^n - \mu \mathrm{I})$; il existe alors un vecteur $x \neq 0$ de F tel que $u(x) = \lambda x$, d'où $u^n(x) = \lambda^n x = \mu x$, et $\mu = \lambda^n$. *Les valeurs propres de u^n sont donc les puissances n de celles de u.*

Par suite, comme en 2, $\rho(u)^n = \rho(u^n) \leqslant \|u\|^n$ pour toute norme associée, d'où

$$\rho(u) \leqslant \|u^n\|^{1/n} \ .$$

D'autre part si $\alpha = (\rho(u)+\varepsilon)^{-1}$ avec $\varepsilon > 0$, on a $\rho(\alpha u) < 1$ et l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ de 1 donne $(\alpha u)^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Par suite, pour toute norme (associée ou non), il existe un entier N tel que $\|(\alpha u)^n\| < 1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, c'est-à-dire

$$\|u^n\|^{1/n} < \rho(u) + \varepsilon \ .$$

On a donc $\rho(u) = \lim_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}$ pour les normes associées.

Exercice 13. ***Inégalité de Hardy.*** **Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que**

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

soit fini. On note $g(x)$ la *moyenne* de f entre 0 et x :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x \neq 0 \ , \ g(0) = f(0) \ .$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = 2\int_0^x f(t)g(t)\,dt - xg(x)^2 \ .$$

2. En déduire que

$$\left(\int_0^x g^2\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}$$

pour $x \geqslant 0$, et que g appartient à E avec $\|g\| \leqslant 2\,\|f\|$.

3. Montrer que l'application $f \mapsto g$ de E dans lui-même (muni de la norme ci-dessus) est continue, de norme 2.

Commentaire. L'inégalité de Hardy donnée ici en normes L^2 se généralise aux normes L^p, $1 < p < \infty$; voir Zuily et Queffélec [40] p. 220 pour une preuve élégante basée sur le théorème de Fubini. Ces inégalités interviennent notamment lorsqu'on étudie certaines équations aux dérivées partielles dans le cadre des espaces de Sobolev.

La version « séries » de l'inégalité de Hardy, dans le cadre de l'espace l^2, s'écrit

$$\left(\sum_{n=1}^\infty v_n^2\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^\infty u_n^2\right)^{1/2}$$

où les u_n sont réels et $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$. La preuve est essentiellement la même : notant $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, on vérifie que

$$v_n^2 + \Delta(nv_n^2) \leqslant v_n^2 + \Delta(nv_n^2) + (n-1)(\Delta v_n)^2 = 2u_n v_n$$

(analogue à $g^2 + (xg^2)' = 2fg$ ci-dessous), et il n'y a plus qu'à sommer et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution. 1. La continuité de g est claire en tout point distinct de l'origine. Pour obtenir la continuité en 0 on peut écrire, pour $x \neq 0$,

$$g(x) - g(0) = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - f(0))\,dt\ .$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|t| \leqslant \alpha$ entraîne $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ d'où, pour $|x| \leqslant \alpha$,

$$|g(x) - g(0)| \leqslant \frac{1}{|x|}\varepsilon|x| = \varepsilon\ .$$

Variante. Le changement de variable $t = xu$ donne l'égalité

$$g(x) = \int_0^1 f(xu)\,du\ ,$$

valable aussi pour $x = 0$, d'où la continuité de g sur $\mathbb{R}$ par un théorème classique sur les intégrales à paramètre (l'intervalle d'intégration est compact, et la fonction $(x, u) \mapsto f(xu)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$).

L'égalité demandée est triviale en $x = 0$. Par ailleurs, la définition montre que g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, avec $(xg)' = f$. Comme

$$g^2 + (xg^2)' = 2g^2 + 2xgg' = 2g(xg)' = 2fg \ ,$$

on a en intégrant

$$\int_\varepsilon^x g^2 + xg(x)^2 - \varepsilon g(\varepsilon)^2 = 2\int_\varepsilon^x fg$$

(où ε et x sont non nuls et de même signe), d'où le résultat en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$, grâce à la continuité de f et g.

2. Pour $x \geqslant 0$ on a $xg(x)^2 \geqslant 0$ d'où, en utilisant 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g^2 \leqslant 2\int_0^x fg \leqslant 2\left(\int_0^x f^2\right)^{1/2}\left(\int_0^x g^2\right)^{1/2} ,$$

ce qui entraîne

$$\left(\int_0^x g^2\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^x f^2\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}$$

pour $x \geqslant 0$ (y compris lorsque le premier membre est nul). En changeant x en $-x$ on a de même, d'après 1,

$$\int_{-x}^0 g^2 = 2\int_{-x}^0 fg - xg(-x)^2 ,$$

d'où

$$\left(\int_{-x}^0 g^2\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^0 f^2\right)^{1/2}$$

pour $x \geqslant 0$. Ces inégalités entraînent la convergence des intégrales $\int_0^\infty g^2$ et $\int_{-\infty}^0 g^2$, d'où $g \in \mathrm{E}$, avec

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^0 g^2 + \int_0^\infty g^2 \leqslant 4\int_{-\infty}^0 f^2 + 4\int_0^\infty f^2 = 4\,\|f\|^2 \ .$$

3. Heuristique. La norme demandée est donc au plus 2. Pour montrer qu'elle est exactement 2, on aimerait choisir f telle que $\|g\| = 2\,\|f\|$. En revoyant les majorations qui précèdent, on voit qu'on a lâché du lest en deux occasions : oubli du terme $xg(x)^2$ et inégalité de Cauchy-Schwarz. Le premier est sans gravité ; on a en effet, d'après 1, $\int_0^\infty g^2 = 2\int_0^\infty fg$ (la convergence de ces intégrales implique, d'après 1, l'existence

de $\lim_{x\to\infty} xg(x)^2$, qui ne peut être que 0 puisque $\int_0^\infty g^2$ converge). La majoration faite se résume donc à

$$\int_0^\infty g^2 = 2\int_0^\infty fg \leqslant 2\left(\int_0^\infty f^2\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g^2\right)^{1/2} .$$

et de même sur $]-\infty, 0]$. Ce serait une égalité si les fonctions f et g étaient proportionnelles, par exemple pour $f(x) = x^{-a}$. Mais cette fonction n'est pas dans E ; on va la tronquer pour éviter les difficultés à l'origine.

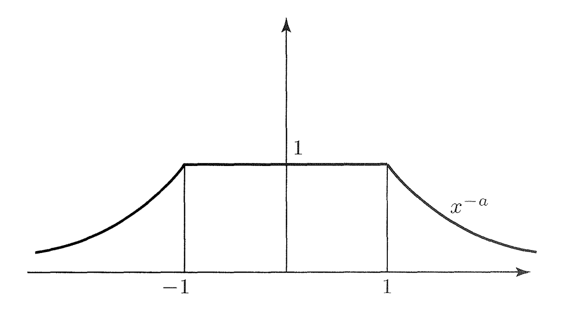


Fig. 25. Les fonctions f_a.

Soit donc $f_a(x) = \min(1, |x|^{-a})$, qui appartient à E pour $a > 1/2$ et donne g_a, paire, telle que

$$g_a(x) = 1 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ g_a(x) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{x^a} - \frac{a}{x}\right) \text{ pour } x \geqslant 1 \ .$$

Le calcul donne

$$\|f_a\|^2 = \frac{4a}{2a-1} \ , \ \|g_a\|^2 = \frac{2}{(1-a)^2}\left(\frac{1}{2a-1} + 2a^2 - 2a - 1\right) \ .$$

d'où $\|g_a\| \,/\, \|f_a\| \to 2$ lorsque a tend vers $1/2$ par valeurs supérieures. L'application $f \mapsto g$ est donc de norme 2.

Chapitre 2
Différentielles

1. Objectifs

Il s'agit de généraliser à des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ la bonne vieille dérivée

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais la variable est maintenant un vecteur de $\mathbb{R}^n$: plus question de diviser par h ! Il faut donc modifier la définition pour l'écrire sans dénominateur, ce qui est facile (même dans des espaces normés généraux), en approchant l'accroissement d'une fonction « quelconque » par une application linéaire. Cette *grande idée du calcul différentiel* s'avère déjà fructueuse dans de nombreuses questions d'analyse et de géométrie (voir les exercices de ce chapitre), sans même attendre de disposer des théorèmes généraux des chapitres suivants.

Les dérivées ainsi généralisées (« différentielles ») obéissent encore aux règles de calcul usuelles, la *seule difficulté* pour le moment étant de prendre conscience de la nouvelle signification des notations.

2. Panorama du cours

Il se réduit, pour l'essentiel, à peu de chose : la définition ci-dessous et la règle de dérivation des fonctions composées, que l'on va mettre en œuvre dans des contextes variés. Les autres résultats seront détaillés au cours des chapitres suivants.

Définition 2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces normés sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* u *un ouvert de* E. *Une application* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *est dite différentiable*[1] *au point* a *de* U *s'il existe une application linéaire* $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *telle que*

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{L}(h) + \mathrm{R}(h) ,$$

où le reste $\mathrm{R}(h)$ *est un* $o(\|h\|)$ *lorsque* h *tend vers* 0 *dans* E.

Il importe de bien comprendre le sens de cette définition. D'abord l'écriture $f(a+h)$ sous-entend que h est pris suffisamment petit pour que

1. On prendra garde de différencier *différentier* et *différencier*... « Le progrès de la matière vivante consiste dans une différenciation des fonctions » (Henri Bergson).

le point $a + h$ appartienne encore à U ; c'est pour permettre cela que U a été supposé ouvert.

Rappelons ensuite que $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ désigne l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F. Mais E et F seront *de dimension finie* dans la plupart de nos exemples, et cette continuité est alors automatique d'après le Théorème 1.2 ; par ailleurs l'équivalence des normes (Théorème 1.1) assure que la différentiabilité sera, dans ce cas, indépendante du choix des normes de E et F.

Il faut enfin rappeler le sens de la *notation de Landau* $o(\|h\|)$: elle signifie que le reste

$$\mathrm{R}(h) = f(a+h) - f(a) - \mathrm{L}(h)$$

est infiniment petit par rapport à h, ou plus précisément (en distinguant les normes de E et F)

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{\|\mathrm{R}(h)\|_{\mathrm{F}}}{\|h\|_{\mathrm{E}}} = 0 .$$

Plus généralement, l'écriture $\mathrm{R}(h) = o(\|h\|^k)$ (lire : « $\mathrm{R}(h)$ est un petit o de norme de h puissance k ») équivaut à : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|h\|_{\mathrm{E}} \leqslant \alpha \text{ entraîne } \|\mathrm{R}(h)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon \|h\|_{\mathrm{E}}^k .$$

Rappelons aussi que $\mathrm{R}(h) = \mathrm{O}(\|h\|^k)$ (lire : « $\mathrm{R}(h)$ est un grand O de norme de h puissance k ») équivaut à : il existe $\mathrm{C} > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\|h\|_{\mathrm{E}} \leqslant \alpha \text{ entraîne } \|\mathrm{R}(h)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \mathrm{C} \|h\|_{\mathrm{E}}^k ;$$

autrement dit, R est au plus de l'ordre de $\|h\|^k$ lorsque $h \to 0$.

Attention ! Il y aurait beaucoup à dire sur les dangers que fait encourir l'usage maladroit de ces notations[2] o et O qui, sous l'apparence trompeuse d'égalités, expriment en fait des *inégalités* ! Ainsi un $\mathrm{O}(\|h\|^2)$ est toujours un $o(\|h\|)$, mais un $o(\|h\|)$ n'est pas nécessairement un $\mathrm{O}(\|h\|^2)$... Voir les commentaires (lumineux) de de Bruijn [5], chapitre 1.

Si elle existe, l'application L est *unique*. On note

$$\mathrm{L} = \mathrm{D}f(a) \text{ ou } f'(a) \text{ ou } df(a) \text{ ou } \mathrm{D}_a f \text{ ou } df_a \text{ la } \textit{différentielle de } f \textit{ en } a ,$$

selon les auteurs ou les circonstances.

2. Certains étudiants croient s'en tirer en n'écrivant sur leur copie que des O de taille intermédiaire, qu'ils pourront ensuite déclarer petits ou grands selon la réaction du correcteur...

On retiendra que la différentiabilité en a d'une application f de E dans F s'écrit

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \mathrm{D}f(a)h + o(\|h\|_{\mathrm{E}}) \\ &= \mathrm{D}f(a)h + \|h\|_{\mathrm{E}}\, \varepsilon(h) \ , \end{aligned}$$

où $f(a+h)$ et $f(a)$ sont des vecteurs de F, et $\mathrm{D}f(a)$ est une application linéaire de E dans F, appliquée à un vecteur h de E. Le reste[3] $o(\|h\|_{\mathrm{E}})$ peut s'écrire aussi $\|h\|_{\mathrm{E}}\ \varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)$ est un vecteur de F qui tend vers 0 avec h.

Dans un exercice de nature théorique, la différentiabilité sera souvent établie en montrant directement, par des majorations, que le reste $\mathrm{R}(h)$ est un $o(\|h\|)$, ou même (éventuellement) un $\mathrm{O}(\|h\|^2)$. Mais si f est donnée explicitement au moyen des fonctions usuelles, on va évidemment beaucoup plus vite en la considérant comme une fonction composée, ou en constatant simplement l'existence et la continuité de ses dérivées partielles (voir Théorème 2.1 ci-dessous).

En termes moins précis, c'est la **Grande Idée du calcul différentiel** :

$$\begin{pmatrix} \text{accroissement} \\ \text{de la fonction} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{terme linéaire par rapport à} \\ \text{l'accroissement de la variable} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{petit terme} \\ \text{correctif} \end{pmatrix}.$$

Au voisinage de a, l'application f *se comporte à peu près comme l'application affine*

$$x \mapsto f(a) + \mathrm{D}f(a)(x-a)$$

(somme d'une constante et d'une application linéaire), pour laquelle on pourra utiliser les outils de l'algèbre linéaire : calcul matriciel, rang, etc. Reste à contrôler les petits restes, ce qui est parfois long et pénible et se fait en majorant des normes. D'où l'égalité (plus vague encore)

$$\text{calcul différentiel (théorique)} = \text{algèbre linéaire} + \text{majorations de normes},$$

et les espaces normés sont donc le cadre naturel. Sous forme géométrique, la Grande Idée exprime qu'une courbe est, au voisinage d'un point, à peu près confondue avec une droite (la *tangente*, du latin *tangere* : toucher), ou une surface avec son *plan tangent*, etc. L'application $\mathrm{D}f(a)$ est d'ailleurs souvent appelée *application linéaire tangente à f en a.*

Exemple 1. *Fonction réelle d'une variable réelle.* Ici $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$ et l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}$ (matrices à une ligne et une colonne), $\mathrm{D}f(a)$ étant la multiplication par le nombre dérivé $f'(a)$, tel que $f(a+h)-f(a)-f'(a)h = o(h)$. Il n'y a plus qu'à diviser par h pour reconnaître la définition classique de la dérivée. Ici *différentiable équivaut à dérivable*, et la différentielle est l'application linéaire $h \mapsto f'(a)\cdot h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3. Ou simplement $o(h)$; si E est de dimension finie, il est inutile de préciser la norme utilisée.

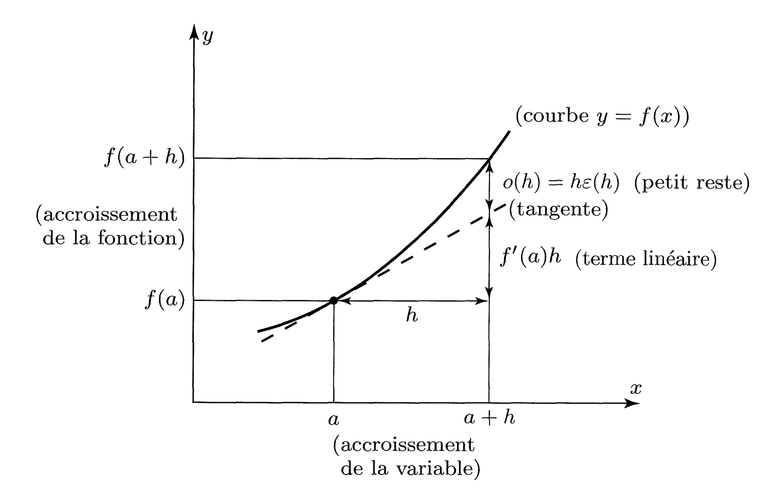


Fig. 26. Le b.a-ba du calcul différentiel :
$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h)$.

La figure 26 est aussi simple que fondamentale. Noter que l'intimité de la courbe avec sa tangente ne dure en général que l'espace d'un epsilon : passé le point a, la tangente s'éloigne de la courbe et la sagesse populaire le sait bien, qui dit « prendre la tangente » pour s'esquiver, s'enfuir[4].

Remarquons enfin qu'on peut indifféremment écrire $h\varepsilon(h)$ ou $|h|\varepsilon(h)$ lorsque h est une variable réelle : en posant $\widetilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(h)$ si $h \geqslant 0$, $\widetilde{\varepsilon}(h) = -\varepsilon(h)$ si $h < 0$, on a $h\varepsilon(h) = |h|\widetilde{\varepsilon}(h)$, et $\widetilde{\varepsilon}$ tend vers 0 si et seulement si ε tend vers 0.

Exemple 2. *Fonction vectorielle d'une variable réelle.* Ici encore $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, et la division par h est possible. la différentiabilité de f en a équivaut à l'existence de la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \in \mathrm{F}$$

(*vecteur dérivé* ou *vecteur vitesse* de f en a), et la différentielle $\mathrm{D}f(a)$ est l'application linéaire $h \mapsto h \cdot f'(a)$ de $\mathbb{R}$ dans F.

Pour $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ par exemple, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ s'identifie à $\mathbb{R}^p$ (matrices à p lignes et une colonne). L'application f s'écrit

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}, \text{ d'où } f'(a) = \begin{pmatrix} (f_1)'(a) \\ \vdots \\ (f_p)'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

4. Exemple : le candidat, qui se croyait tangent, préféra prendre la tangente.

Dans la pratique des exercices, on écrit souvent ces vecteurs en ligne pour limiter l'encombrement des formules... prudence ! *La différentiabilité de f équivaut ici encore à la dérivabilité des composantes $f_1, \ldots, f_p$.*

Revenons au cas général. Si f est différentiable en a et si v est un vecteur de E on a, t étant une variable réelle,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \mathrm{D}f(a)v$$

(*dérivée de f en a dans la direction*[5] *de v*). En particulier, si l'espace de départ est $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$, la différentiabilité entraîne l'existence des *dérivées partielles* (dérivées dans la direction des vecteurs de base) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}f(a)e_i = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t} \in \mathrm{F} ,$$

notées aussi $\partial_{x_i} f(a)$ ou $\partial_i f(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$ ou $f'_i(a)$, avec $i = 1, ..., n$. La différentielle s'écrit alors, par linéarité,

$$\mathrm{D}f(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \in \mathrm{F} \text{ , si } \mathrm{E} = \mathbb{R}^n .$$

La notation $\partial f / \partial x_i$, très couramment utilisée en Mathématiques comme en Physique, n'est pas sans inconvénients : complexité typographique, apparence trompeuse d'un quotient (c'est la dérivée de f par rapport à sa i-ième variable, et rien de plus !). Enfin la mention de la variable x_i peut être source de confusions dans des calculs de dérivées de fonctions composées (voir Exercice 20). Les notations concurrentes $\partial_i f$ ou f'_i n'ont pas ces défauts.

Attention ! L'existence des dérivées partielles de f en a ne suffit pas à entraîner la différentiabilité. Par exemple, la fonction

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ , } f(0,0) = 0$$

admet des dérivées partielles nulles à l'origine, mais n'est pas différentiable (ni même continue) en ce point. Voir cependant le théorème 2.1.

Exemple 3. *Fonction numérique de variable vectorielle.* Ici $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ (matrices à une ligne et n colonnes), et l'application f s'écrit $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. La différentielle $\mathrm{D}f(a)$ est la *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$ de composantes $(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a))$ dans la

5. Bien entendu, cette dérivée ne dépend pas seulement de la direction de v. Il serait préférable de l'appeler « dérivée de f en a selon le vecteur v » .

base canonique ; dans ce contexte, la notation $df(a)$ est souvent préférée à $\mathrm{D}f(a)$.

Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire noté $(\ \cdot\ )$, il existe un unique vecteur $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbb{R}^n$, appelé *gradient de* f *en* a, tel que

$$\mathrm{D}f(a)h = \operatorname{grad} f(a) \cdot h$$

pour tout h ; les composantes de $\operatorname{grad} f(a)$ dans une base orthonormée sont évidemment les dérivées partielles $\partial_1 f(a)$, ..., $\partial_n f(a)$.

Exemple 4. *Fonction vectorielle de variable vectorielle.* ici $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ et

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))\,;$$

la différentielle $\mathrm{D}f(a)$ est l'application linéaire définie, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, par la *matrice jacobienne*

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_p & \cdots & \partial_n f_p \end{pmatrix},$$

où les dérivées partielles sont calculées au point a. On reconnaît à la première ligne la différentielle de la première composante f_1 de f, à la première colonne la dérivée de f dans la direction de e_1 (première dérivée partielle de f), etc. Si on craint de confondre lignes et colonnes en écrivant cette matrice, on peut se souvenir qu'elle doit pouvoir être multipliée à droite par un vecteur *colonne* $h = (h_1, \dots, h_n)$ de manière à donner $\mathrm{D}f(a)h$.

Propriétés de la différentielle

Si f est différentiable en a, elle est continue en a.

Si f et g sont différentiables en a et si le scalaire λ est constant, alors $f + g$ et λf sont différentiables en a et on a :

$$\mathrm{D}(f+g)(a) = \mathrm{D}f(a) + \mathrm{D}g(a)\ ,\ \mathrm{D}(\lambda f)(a) = \lambda \mathrm{D}f(a)$$

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a l'importante formule de **différentiation des fonctions composées** :

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}g(f(a)) \circ \mathrm{D}f(a)\,;$$

à gauche on compose les applications g et f, à droite on compose leurs applications linéaires tangentes. Cette écriture sous-entend que l'on a trois espaces normés E, F, G, que f est définie sur un ouvert de E contenant a, à valeurs dans F, et que g est définie sur un ouvert de F contenant $f(a)$, à valeurs dans G.

Heuristique. Cette formule est « évidente », puisque

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= \mathrm{D}g(f(a))(f(a+h) - f(a)) + \cdots \\ &= \mathrm{D}g(f(a))\mathrm{D}f(a)h + \cdots \end{aligned}$$

où les $\cdots$ représentent les petits termes correctifs non écrits. Les accroissements de f et g étant à peu près linéaires, composer ces fonctions revient (à peu près) à composer des applications linéaires.

En pratique, prenons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$, et (pour simplifier les notations) $\mathrm{G} = \mathbb{R}$; la matrice jacobienne de $g \circ f$ est simplement le produit matriciel de celles de g et de f. Plutôt que de multiplier de volumineuses matrices on pourra retenir que, si $y = f(x)$ et $z = g(y) = g(f(x))$, les dérivées partielles de $z = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$ sont les

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \ .$$

Notation différentielle. Elle donne une autre présentation, encore plus « évidente », de ces mêmes calculs. Si $z = g(y)$ et $y = f(x)$, on écrit

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_p} dy_p \ , \text{ puis } dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y_j}{\partial x_n} dx_n \ ,$$

on reporte, d'où [6]

$$dz = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_1} \right) dx_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right) dx_n \ .$$

Il n'y a plus qu'à *identifier* les coefficients avec ceux de

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

pour obtenir l'expression voulue des $\partial z / \partial x_i$!

Comment expliquer le succès de ce calcul ? Le report effectué revient clairement à composer des applications linéaires, c'est-à-dire à multiplier des matrices, mais quelle est la signification réelle des « variables » dx_i et dy_j ? La clef du mystère est la géniale ambiguïté de la notation dy_j, vue ici comme différentielle de la j-ième fonction coordonnée, et là comme celle d'une fonction de $x_1, ..., x_n$ cette ambiguïté est autorisée par la règle de différentiation des fonctions composées. On renvoie à

6. On se gardera bien de « simplifier » par ∂y_j ! Rappelons que la notation $\partial z / \partial y_j$ ne représente pas un quotient, mais seulement la dérivée partielle de $z = g(y)$ par rapport à sa j-ième variable y_j.

Lafontaine [28] p. 22 ou Pham [33] p. 19-24 pour une discussion plus approfondie. Contentons-nous de constater la grande simplicité opératoire de la notation différentielle, dont on retrouvera notamment les bienfaits dans la manipulation des fonctions implicites.

Voyons maintenant, à titre d'exemple, comment la différentiation des fonctions composées conduit à un premier aperçu de la notion de plan tangent ; on y reviendra au chapitre 5 (sous-variétés).

Exemple 5. *Plan tangent à une surface définie implicitement.* Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, différentiable au point $\mathrm{A} = (a, b, c)$ de U, avec $\mathrm{D}f(\mathrm{A}) \neq 0$, et soit S la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$. Considérons un arc tracé sur S et passant par A, défini par une fonction $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ sur un intervalle I, avec $\gamma(\mathrm{I})$ contenu dans S, $\gamma(t_0) = \mathrm{A}$ et γ dérivable en t_0. On a donc $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout t d'où, en dérivant en t_0 la fonction composée $f \circ \gamma$, l'égalité $\mathrm{D}f(\mathrm{A})\gamma'(t_0) = 0$. Explicitement on a

$$\mathrm{D}f(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} f'_x(\mathrm{A}) & f'_y(\mathrm{A}) & f'_z(\mathrm{A}) \end{pmatrix} \text{ et } \gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} ,$$

où X, Y, Z sont les dérivées en t_0 des composantes de γ, d'où

$$f'_x(\mathrm{A})\mathrm{X} + f'_y(\mathrm{A})\mathrm{Y} + f'_z(\mathrm{A})\mathrm{Z} = 0 .$$

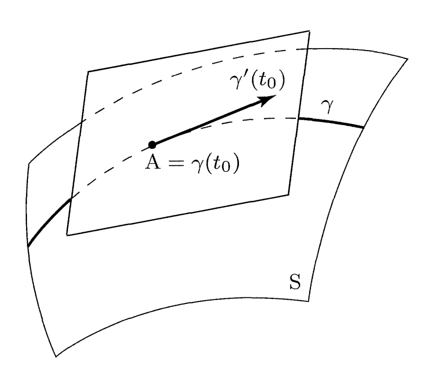


Fig. 27. Plan tangent à une surface.

Le vecteur $\gamma'(t_0)$, qui s'interprète comme vecteur tangent en A à l'arc γ (voir Exercice 17), appartient donc nécessairement au *plan vectoriel tangent* en A à S, défini par l'équation ci-dessus. On verra au chapitre 5 (Théorèmes 5.9 et 5.10) des résultats plus précis.

Exemple 6. *Plan tangent à une surface définie paramétriquement.* Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, une application différentiable au point (u_0, v_0) d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, et soit S la

surface paramétrée par u et v obtenue comme image de cette application. Un arc tracé sur S et passant par $\mathrm{A} = \varphi(u_0, v_0)$ sera défini ici par deux fonctions $u = u(t)$, $v = v(t)$, avec $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$. Supposons-les dérivables en t_0 ; en dérivant la fonction composée $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ on obtient

$$\gamma'(t_0) = \mathrm{D}\varphi(u_0, v_0)\begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix} = u'(t_0)\varphi'_u(u_0, v_o) + v'(t_0)\varphi'_v(u_0, v_0)\ .$$

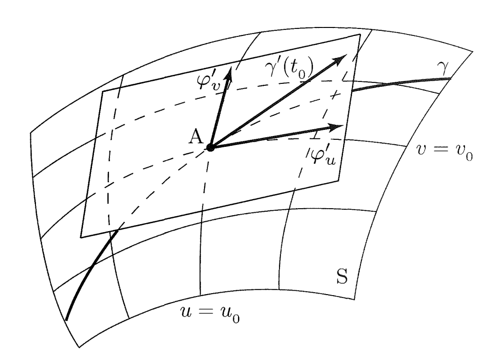


Fig. 28. Surface paramétrée, courbes coordonnées, plan tangent.

Si les vecteurs

$$\varphi'_u = \begin{pmatrix} f'_u \\ g'_u \\ h'_u \end{pmatrix} \text{ et } \varphi'_v = \begin{pmatrix} f'_v \\ g'_v \\ h'_v \end{pmatrix}$$

(calculés en (u_0, v_0)) sont indépendants, on voit donc que $\gamma'(t_0)$ appartient au plan qu'ils engendrent, appelé *plan vectoriel tangent* à S en A. Les vecteurs φ'_u et φ'_v s'interprètent eux-mêmes comme tangentes en A aux *courbes coordonnées* passant par ce point, définies par $u(t) = u_0 + t - t_0$, $v(t) = v_0$, respectivement $u(t) = u_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0$. Le Théorème 5.11 donnera un résultat plus précis, et l'équivalence des points de vue implicite ou paramétrique sur les surfaces.

Critère pratique de différentiabilité

Dans les deux énoncés qui suivent, on fait varier le point x où est calculée la différentielle ; on prendra garde que le vecteur $\mathrm{D}f(x)h$ dépend alors de l'accroissement h (linéairement) et du point x (non linéairement en général !).

Définition 2.2. *Soient* E *et* F *deux espaces normés,* U *un ouvert de* E. *Une application* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *est dite* continûment différentiable, *ou* de classe

C^1, *sur* U *si elle est différentiable en tout point de* U *et si l'application* $x \mapsto \mathrm{D}f(x)$ *est continue de* U *dans l'espace normé* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Elle est dite un difféomorphisme *de classe* C^1 *de l'ouvert* U *sur un ouvert* V *de* F *si* f *est bijective, de classe* C^1 *sur* U *et si l'application réciproque* f^{-1} *est de classe* C^1 *sur* V.

Pour $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ l'application f est donc de classe C^1, d'après la définition, si et seulement si elle est différentiable en tout point de U et si toutes ses dérivées partielles $(\partial f_j / \partial x_i)(x)$ sont fonctions continues de x. Le théorème suivant allège cet énoncé, et donne un *critère pratique de différentiabilité.*

Théorème 2.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* F *un espace normé. Pour qu'une application* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *soit de classe* C^1 *sur* U, *il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles* $\partial f / \partial x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *en tout point de* U *et que ces dérivées partielles soient continues sur* U.

Ce théorème résulte de l'inégalité de la moyenne (Exercice 38). Il permet d'établir très aisément la différentiabilité des fonctions usuelles. Par exemple, la fonction $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ est de classe C^1 sur le plan privé de l'origine, et *a fortiori* différentiable sur cet ouvert : elle y admet en effet des dérivées partielles $\partial f / \partial x = 2x/(x^2 + y^2)$, resp. $\partial f / \partial y = 2y/(x^2 + y^2)$, fonctions continues de (x, y), obtenues par un calcul élémentaire en une variable à y fixé, resp. à x fixé.

Si f est un difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ on a, par différentiation de fonctions composées,

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) \circ \mathrm{D}f(x) = \mathrm{I} \text{ , avec } y = f(x) \text{ ,}$$

où I est l'identité de $\mathbb{R}^n$. Par suite la différentielle $\mathrm{D}f(x)$ est nécessairement inversible en tout point x de U, ce qui exige $n = p$. Le théorème d'inversion locale (chapitre 5) donnera une réciproque, et nous verrons alors l'importance de la notion de difféomorphisme, dans les applications géométriques notamment.

On notera que l'application $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, mais n'est pas un difféomorphisme puisque sa dérivée s'annule à l'origine.

Références : Avez [3], chapitres 1 et 2 ; Lafontaine [28], chapitre 1.

3. Exercices

Les exercices suivants mettent en œuvre la définition de la différentielle et la différentiation des fonctions composées dans divers contextes, avec quelques interprétations géométriques. On utilise à plusieurs reprises la propriété suivante (bien connue, et qui sera revue au Corollaire 3.1) : une

fonction dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

Exercice 14. ***Pont aux ânes.***

1. Si $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.

2. Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, et $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, différentiable. Pour $a \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{E}$ dériver la fonction composée $t \mapsto f(a + tv)$ en $t = 0$.

Solution. 1. Vous obtenez $u'(x) = 0$? Que dites-vous alors de l'exemple $f(x, y) = x - y$, donnant $u(x) = 2x$? L'exercice n'était donc pas à dédaigner, malgré son titre... La réponse correcte est en effet

$$u'(x) = (\partial_1 f)(x, -x) + (\partial_2 f)(x, -x) \cdot (-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) ,$$

obtenue en différentiant la fonction composée $x \mapsto (x, -x) \mapsto f(x, -x)$. On rappelle que la notation $\partial f / \partial x$, resp. $\partial f / \partial y$, ne signifie rien de plus que la dérivée partielle de f par rapport à sa première, resp. deuxième, variable, quels que soient les noms réellement utilisés pour ces variables ; les notations $\partial_1 f$, resp. $\partial_2 f$, prêtent moins à confusion.

De même, en différentiant la fonction composée

$$(x, y) \mapsto (y, x) \mapsto f(y, x) = g(x, y) ,$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 g)(x, y) & (\partial_2 g)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(y, x) & (\partial_2 f)(y, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

d'où

$$(\partial_1 g)(x, y) = (\partial_2 f)(y, x) \text{ et } (\partial_2 g)(x, y) = (\partial_1 f)(y, x) .$$

2. Aucun piège ici ! Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ on obtient

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \mathrm{D}f(a)v$$

en dérivant $f(a + tv_1, \ldots, a + tv_n)$. Dans le cas général, le résultat se déduit directement de la définition de la différentielle, ou en considérant la fonction composée

$$\begin{array}{ccccc} t & \mapsto & a + tv & \mapsto & f(a + tv) \\ \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathrm{F} \end{array}$$

où I est un voisinage suffisamment petit de 0. La différentielle de la première application est l'application linéaire $h \mapsto h \cdot v$ de $\mathbb{R}$ dans E, d'où par composition la différentielle cherchée $h \mapsto h \cdot \mathrm{D}f(a)v$, application linéaire de $\mathbb{R}$ dans F qui s'identifie à l'élément $\mathrm{D}f(a)v$ de F.

La fonction $t \mapsto f(a+tv)$, qui traduit la restriction de f à la droite de direction v passant par a, est souvent utilisée pour se ramener au cas d'une fonction de variable numérique.

Exercice 15. ***Premiers exemples de différentielles.*** **Écrire la différentielle d'une application constante, ou linéaire, ou quadratique sur $\mathbb{R}^n$.**

Solution. Si f est *constante*, sa différentielle est nulle en tout point. La réciproque, conséquence de l'inégalité de la moyenne (chapitre 3), est un des résultats fondamentaux du calcul différentiel.

Si f est *linéaire* (continue) de E dans F sa différentielle en un point a quelconque est l'application f elle-même, puisque

$$f(a+h) - f(a) = f(h)$$

d'où $\mathrm{D}f(a) = f$, et $\mathrm{D}f$ est l'application constante $a \mapsto f$ de E dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Dans ces deux cas l'égalité de définition de la différentielle s'écrit donc sans terme correctif. Réciproquement si on a $f(a+h) - f(a) = \mathrm{D}f(a)h$ pour tout h, alors f est une application affine (somme d'une constante et d'une application linéaire).

Pour éviter des embarras inutiles en pratique, prenons maintenant $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Une application *quadratique* s'écrit

$$f(x) = \mathrm{B}(x, x)$$

où B est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, d'où

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \mathrm{B}(a+h, a+h) - \mathrm{B}(a, a) \\ &= 2\mathrm{B}(a, h) + \mathrm{B}(h, h) \ . \end{aligned}$$

Or $\mathrm{B}(h, h) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij} h_i h_j$ en calculant dans la base canonique, d'où[7]

$$|\mathrm{B}(h, h)| \leqslant \left(\sum_{i,j} |b_{ij}| \right) \|h\|_\infty^2 \ .$$

Par suite $\mathrm{B}(h, h) = \mathrm{O}(\|h\|^2)$, *a fortiori* $\mathrm{B}(h, h) = o(\|h\|)$. Il en résulte que f est différentiable en a et que

$$\mathrm{D}f(a)h = 2\mathrm{B}(a, h) \ .$$

7. Plus généralement, il serait facile d'étendre aux applications multilinéaires le Théorème 1.2 sur la continuité des applications linéaires. Voir Cartan [8] p. 24 ou Dieudonné [18] p. 103.

Variante. On peut calculer en coordonnées et écrire $f(x) = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$, d'où
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_i b_{ik}x_i + \sum_j b_{kj}x_j = 2\sum_i b_{ik}x_i$$
puisque $b_{ik} = b_{ki}$. La différentiabilité de f résulte alors de l'existence de dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^n$ (Théorème 2.1), et f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16. ***Différentielle de l'inverse, et de l'exponentielle (version douce).*** **L'espace E des matrices $n \times n$ réelles est muni d'une norme telle que**
$$\|XY\| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$$
(par exemple une norme d'application linéaire). On note I la matrice unité, $U = GL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de E et $f(X) = X^{-1}$ pour $X \in U$.

1. Montrer que pour $H \in E$ et $\|H\| < 1$ la matrice $I - H$ est inversible, inversée par la *série de Neumann* :
$$(I - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k .$$

2. En déduire que U est un ouvert de E.

3. Soit $\sum_0^{\infty} a_k z^k$ une série entière à coefficients réels, convergente au voisinage de l'origine. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ on a
$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k X^k = O(\|X\|^p)$$
lorsque X tend vers zéro dans E.

4. Calculer $Df(I)$. En déduire $Df(X)$ pour $X \in U$.

5. On note $\exp : E \longrightarrow E$ l'application exponentielle. Calculer $D\exp(0)$.

6. Soient A une matrice antisymétrique et t un réel. Pour $n = 2$ ou 3, interpréter géométriquement $\exp tA$ et son approximation donnée, pour t petit, par la différentielle.

Commentaire. On rencontre souvent les deux applications étudiées ici, le passage à l'inverse en liaison avec le théorème d'inversion locale (chapitre 5), et l'exponentielle avec les systèmes différentiels linéaires ou les groupes de matrices.

La solution de 1 à 5 ci-dessous reste valable telle quelle en dimension infinie, en remplaçant E par l'espace des applications linéaires continues d'un Banach dans lui-même. Ce n'est qu'en 2 que l'hypothèse de dimension finie pourrait apporter une simplification : on dirait simplement que U est ouvert car défini par la condition $\det X \neq 0$.

On retrouvera l'application exponentielle aux Exercices 39 et 101. Sur l'exemple de la question 6, voir aussi l'Exercice 25.

Solution. 1. Dans l'espace E la série $\sum_0^\infty \mathrm{H}^k$ est « absolument convergente », au sens que la série des normes $\sum_0^\infty \|\mathrm{H}\|^k$ converge, puisque $\|\mathrm{H}^k\| \leqslant \|\mathrm{H}\|^k$ et $\|\mathrm{H}\| < 1$. Comme E est un espace de Banach (voir remarques après le Théorème 1.2), ceci entraîne la convergence de la série $\sum_0^\infty \mathrm{H}^k$.

D'autre part

$$(\mathrm{I}-\mathrm{H})\left(\sum_{k=0}^{p} \mathrm{H}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{p} \mathrm{H}^k\right)(\mathrm{I}-\mathrm{H}) = \mathrm{I}-\mathrm{H}^{p+1}$$

pour chaque $p \geqslant 0$. Lorsque p tend vers l'infini H^{p+1} tend vers zéro, puisque $\|\mathrm{H}^{p+1}\| \leqslant \|\mathrm{H}\|^{p+1}$ et $\|\mathrm{H}\| < 1$ d'où, en passant à la limite dans les égalités précédentes,

$$(\mathrm{I}-\mathrm{H})\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}^k\right)(\mathrm{I}-\mathrm{H}) = \mathrm{I}$$

grâce à la continuité de la multiplication, à gauche ou à droite, par $\mathrm{I}-\mathrm{H}$. Le résultat est établi.

2. D'après 1 l'ensemble U contient la boule ouverte de centre I et de rayon 1, ce qui se généralise aisément. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$ on peut écrire en effet

$$\mathrm{X}+\mathrm{H} = \mathrm{X}\,(\mathrm{I}-(-\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}))\,;$$

la parenthèse est inversible, d'après 1, si $\|\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}\| < 1$, et *a fortiori* si $\|\mathrm{H}\| < \|\mathrm{X}^{-1}\|^{-1}$. Alors $\mathrm{X}+\mathrm{H}$ est inversible, donc U contient la boule ouverte de centre X et de rayon $\|\mathrm{X}^{-1}\|^{-1}$; par suite U est un ouvert de E.

3. Soit R le rayon de convergence. Pour $0 < r < \mathrm{R}$ et $\|\mathrm{X}\| \leqslant r$ on a comme en 1

$$\|a_k \mathrm{X}^k\| \leqslant |a_k|\,\|\mathrm{X}\|^k \leqslant |a_k| r^k\ ,$$

ce qui assure la convergence de $\sum_0^\infty a_k \mathrm{X}^k$ dans E. Pour $p \geqslant 1$ et $\|\mathrm{X}\| \leqslant r$ on a

$$\left\|\sum_{k=p}^{\infty} a_k \mathrm{X}^k\right\| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} |a_k|\,\|\mathrm{X}\|^{k-p}\,\|\mathrm{X}\|^p \leqslant \mathrm{C}\,\|\mathrm{X}\|^p$$

avec $\mathrm{C} = \sum_p^\infty |a_k| r^{k-p}$. La série est donc un $\mathrm{O}(\|\mathrm{X}\|^p)$ quand X tend vers zéro.

4. D'après 1 et 3, avec le rayon $R = 1$, on a

$$f(I + H) = I - H + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k H^k = I - H + O(\|H\|^2)$$

pour $\|H\| \leqslant r < 1$. Ceci montre que f est différentiable en I, avec

$$Df(I)H = -H$$

pour tout $H \in E$.

On peut, comme en 2, étendre le résultat à tout point $X \in U$, grâce à la propriété $f(XY) = f(Y)f(X)$: on écrit

$$\begin{aligned} f(X + H) - f(X) &= \big(f(I + X^{-1}H) - f(I)\big)\, X^{-1} \\ &= \big(-X^{-1}H + R\big)\, X^{-1} \end{aligned}$$

en utilisant $Df(I)$, avec $\|R\| \leqslant C\left\|X^{-1}H\right\|^2$ lorsque $\left\|X^{-1}H\right\| \leqslant r < 1$, ce qui est vérifié pour $\|H\| \leqslant r\left\|X^{-1}\right\|^{-1}$. On a alors

$$\left\|RX^{-1}\right\| \leqslant \|R\| \left\|X^{-1}\right\| \leqslant C' \|H\|^2 ,$$

d'où

$$(X + H)^{-1} - X^{-1} = -X^{-1}HX^{-1} + O(\|H\|^2) .$$

Donc f est différentiable en tout point de U et

$$Df(X)H = -X^{-1}HX^{-1} ,$$

ce qui généralise une formule bien connue pour $n = 1$.

5. Même méthode qu'en 4, avec ici le rayon $R = \infty$:

$$\exp H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H^k = I + H + O(\|H\|^2) ,$$

d'où $D\exp(0)H = H$.

Mais, en l'absence d'une expression simple de $\exp(X + H)$, on ne peut ramener ici un point quelconque à l'origine et en déduire directement $D\exp(X)$; voir Exercices 39 ou 101.

6. Une matrice antisymétrique réelle 2×2 s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$, et donne la multiplication par $i\omega$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$. Donc A^k est la multiplication par $(i\omega)^k$ et $\exp tA$ est la multiplication par $\exp it\omega$, rotation d'angle $t\omega$ autour de l'origine. La figure (avec $\omega = 1$) montre comment les termes suivants du développement de $\exp it$ précisent l'approximation du premier ordre $1 + it$.

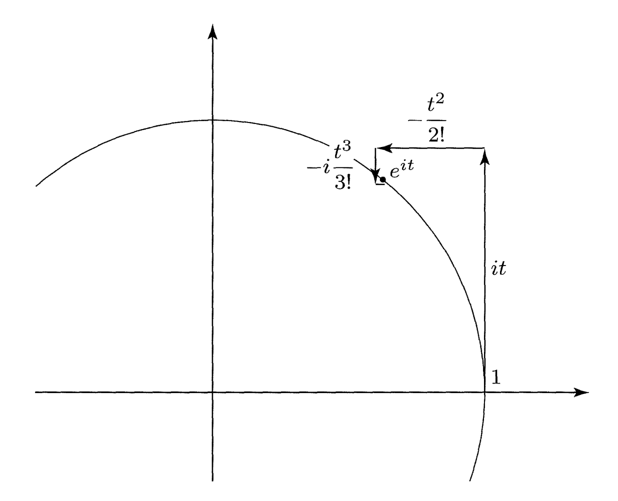


Fig. 29. $\exp(it) = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \cdots$

La convergence « en spirale » s'explique aisément : en séparant le pair de l'impair, i.e. le réel de l'imaginaire, on a

$$\begin{aligned}\exp it &= \cos t + i \sin t \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)\end{aligned}$$

et $\cos t$, $\sin t$ sont encadrés par deux sommes partielles consécutives de leurs séries respectives dès lors qu'on peut leur appliquer le théorème des séries alternées, c'est-à-dire pour $t^2 \leqslant 2$ (assurant la décroissance des termes en valeur absolue).

Une matrice antisymétrique réelle 3×3, écrite sous la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

est la matrice de l'application linéaire $v \mapsto \omega \wedge v$, produit vectoriel par le vecteur $\omega = (a, b, c)$ dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Supposons $\omega \neq 0$, soient α un vecteur unitaire orthogonal à ω et $\beta = (\omega / \|\omega\|) \wedge \alpha$. Les vecteurs α, β et $\omega / \|\omega\|$ forment alors une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, chacun étant le produit vectoriel des deux autres. En particulier

$$\omega \wedge \alpha = \|\omega\| \beta \ , \ \omega \wedge \beta = -\|\omega\| \alpha \ ,$$

et la matrice du produit vectoriel par ω est, dans la nouvelle base,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\|\omega\| & 0 \\ \|\omega\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui ramène à la situation précédente dans le plan $\mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$. L'étude faite pour $n = 2$ montre finalement que $\exp t\mathrm{A}$ est la rotation d'angle $t\,\|\omega\|$ autour de la droite $\mathbb{R}\omega$ (orientée par ω).

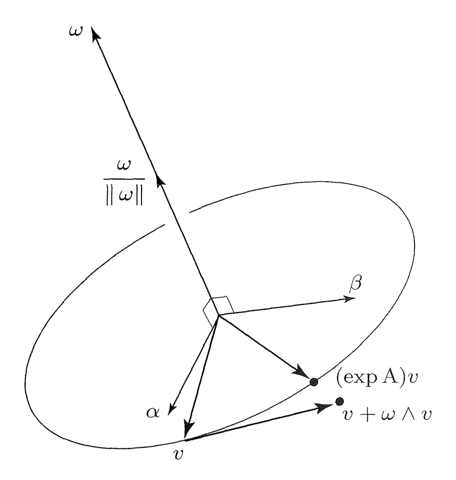


Fig. 30. La rotation exp A et son approximation du premier ordre.

D'autre part la différentielle de exp à l'origine en fournit l'approximation (« *rotation infinitésimale* »)

$$(\exp t\mathrm{A})v = \big(\mathrm{I} + t\mathrm{A} + \mathrm{O}(t^2)\big)\, v = v + t\omega \wedge v + \mathrm{O}(t^2)\ ,$$

qui s'interprète immédiatement (voir la figure, où on a pris $t = 1$ et v orthogonal à ω, pour simplifier).

Exercice 17. ***Tangente à une courbe.***

1. Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et C la courbe d'équation $f(x,y) = 0$. On suppose f différentiable en $\mathrm{A} = (a,b) \in \mathrm{U}$, avec $f(\mathrm{A}) = 0$ et $\mathrm{D}f(\mathrm{A}) \neq 0$. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur de « *direction limite* » en A : on suppose qu'il existe une suite (M_k) de points de C, qui tend vers A, et une suite (λ_k) de réels telles que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k} = \overrightarrow{v}\ .$$

Montrer que $\mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{v} = 0$.

On appelle *tangente en* A à la courbe C la droite formée des points P tels que $\mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$.

2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale, et $\mathrm{A} = (a,b)$ un point de la « *courbe algébrique* » d'équation $f(x,y) = 0$, avec $\mathrm{D}f(\mathrm{A}) \neq 0$. Soient D une droite passant par A, de direction $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, et P_t le point

courant de D, avec t réel et $\overrightarrow{\mathrm{AP}_t} = t\overrightarrow{v}$. Montrer que D est tangente en A à C si et seulement si l'équation $f(\mathrm{P}_t) = 0$ admet $t = 0$ comme racine multiple.

Application. **Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients u, v, w pour que la droite $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$ (où p est une constante non nulle).**

3. Soit une application $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle ouvert I ; on suppose γ dérivable en $t \in \mathrm{I}$, avec $\gamma'(t) \neq 0$, et on note $\mathrm{A} = \gamma(t)$. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de « *direction limite* » en A : on suppose qu'il existe une suite (h_k) qui tend vers zéro dans $\mathbb{R}$ et une suite (λ_k) de réels tels que, en notant $\mathrm{M}_k = \gamma(t + h_k)$,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k} = \overrightarrow{v} .$$

Montrer que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$.

La droite de direction $\gamma'(t)$ passant par A est appelée *tangente en* A à l'arc paramétré γ. Relier cette notion à celle de la question 1.

4. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme euclidienne montrer que, parmi toutes les droites D passant par $\mathrm{A} = \gamma(t)$ (avec $\gamma'(t) \neq 0$), la tangente à γ est la plus proche de l'arc : on étudiera la distance à D du point $\mathrm{M} = \gamma(t + h)$ de γ, lorsque h tend vers 0.

Commentaire. Le but de l'exercice est de traduire *géométriquement* la définition de la différentielle pour une fonction numérique de deux variables réelles (courbe plane définie implicitement, question 1), ou pour une fonction vectorielle de variable réelle (arc paramétré, question 3), ce qui conduit bien sûr à approcher une courbe par une droite. En étudiant soigneusement le « petit reste » dans la définition d'une différentielle, on fait apparaître la tangente à la courbe comme *limite d'une sécante.*

La tangente peut encore être caractérisée comme celle des sécantes qui serre la courbe *de plus près* (question 4) ou, dans le cas d'une courbe algébrique (une conique par exemple), comme celle qui coupe la courbe *en deux points confondus* (question 2).

Sur les cas « singuliers » où $\mathrm{D}f(\mathrm{A}) = 0$, resp. $\gamma'(t) = 0$, voir les Exercices 109, 110, resp. 104.

Solution. 1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme quelconque. La différentiabilité de f en A permet d'écrire

$$0 = f(\mathrm{M}_k) - f(\mathrm{A}) = \mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{\mathrm{AM}_k} + r_k$$

où, pour $\varepsilon > 0$ donné, on a $|r_k| \leqslant \varepsilon \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}\right\|$ dès que k est assez grand. En multipliant par λ_k on en déduit

$$|\mathrm{D}f(\mathrm{A})(\lambda_k\overrightarrow{\mathrm{AM}_k})| \leqslant \varepsilon \left\|\lambda_k\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}\right\| ;$$

comme $\lambda_k\overrightarrow{\mathrm{AM}_k}$ tend vers $\overrightarrow{v}$, il vient $|\mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{v}| \leqslant \varepsilon \, \|\overrightarrow{v}\|$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{v} = 0$.

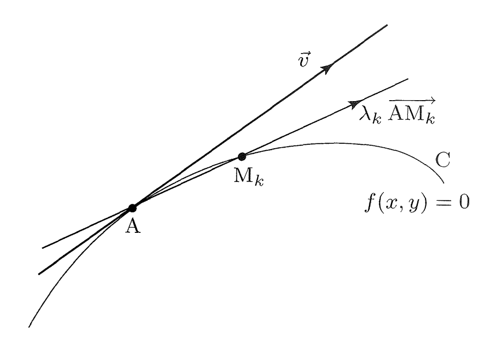


Fig. 31. La tangente, limite d'une sécante.

L'équation $\mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ de la tangente en A s'écrit donc, en notant $\mathrm{A} = (a,b)$, $\mathrm{P} = (\mathrm{X},\mathrm{Y})$,

$$f'_x(a,b)(\mathrm{X}-a) + f'_y(a,b)(\mathrm{Y}-b) = 0 \ .$$

Si le plan est muni d'un produit scalaire, elle peut s'écrire encore $\operatorname{grad} f(\mathrm{A}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$: *la tangente est orthogonale au gradient de f.*

2. Notons $\overrightarrow{v} = (\alpha,\beta)$ le vecteur directeur de la droite D, qui est donc définie paramétriquement par $x = a + t\alpha$, $y = b + t\beta$, coordonnées du point P_t. L'équation $f(\mathrm{P}_t) = 0$ à l'inconnue t donne les paramètres des points d'intersection de la courbe avec D ; c'est une équation algébrique (polynôme en t). On sait alors que la solution évidente $t = 0$ sera racine multiple (i.e. au moins double) si et seulement si la dérivée $(f(\mathrm{P}_t))'$ s'annule aussi en $t = 0$, c'est-à-dire

$$f'_x(a,b)\alpha + f'_y(a,b)\beta = 0 \ , \text{ soit encore } \mathrm{D}f(\mathrm{A})\overrightarrow{v} = 0 \ .$$

Cette condition exprime que D est la tangente en A.

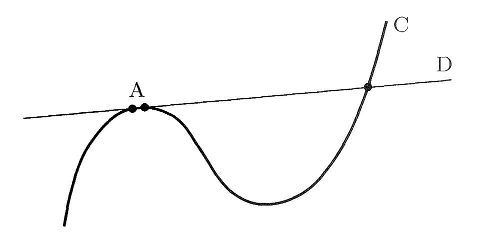


Fig. 32. La tangente coupe la courbe en deux points confondus.

Application. Les points d'intersection de la droite et de la parabole sont les solutions du système

$$ux + vy + w = 0 \ , \ y^2 - 2px = 0 \ ,$$

à l'inconnue (x, y). Si $u \neq 0$ on peut paramétrer la droite par $t = y$, et les paramètres des points d'intersection sont les solutions de

$$y^2 - 2px = t^2 + 2\frac{p}{u}(vt + w) = 0 \ .$$

Cette équation du second degré en t admet une racine double si et seulement si le discriminant $(pv/u)^2 - 2(p/u)w$ est nul, c'est-à-dire

$$pv^2 - 2uw = 0 \ .$$

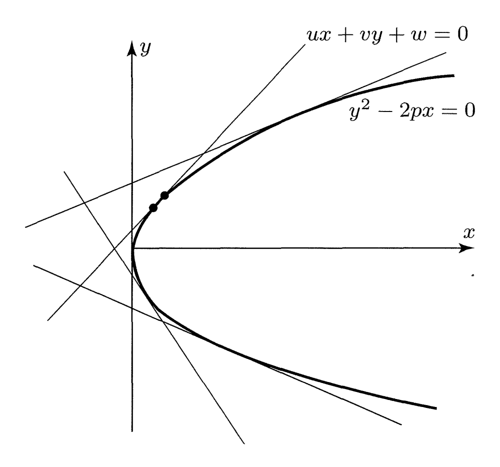


Fig. 33. Équation tangentielle de la parabole.

Enfin on peut écarter le cas $u = 0$: on aurait alors $vy + w = 0$ et le système ci-dessus conduirait à une équation du premier degré en x, qui ne peut avoir de racine multiple ; autrement dit, notre parabole n'admet pas de tangente horizontale. Finalement la condition $pv^2 - 2uw = 0$ est nécessaire et suffisante pour que la droite de coefficients (u, v, w) soit tangente à la parabole : c'est l'*équation tangentielle de la parabole.* On pourrait aisément étendre ce calcul à toutes les courbes du second degré (coniques).

3. Prenons une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. La dérivabilité de γ permet d'écrire

$$\lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k} = \lambda_k(\gamma(t + h_k) - \gamma(t)) = \lambda_k(h_k \gamma'(t) + r(h_k))$$

avec $\|r(h_k)\| \leqslant \varepsilon |h_k|$ pour k assez grand. Ce vecteur tend vers $\overrightarrow{v}$, d'où $\left\|\overrightarrow{v} - \lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k}\right\| \leqslant \varepsilon$ pour k grand. Par suite, en notant $\mu_k = \lambda_k h_k$,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{v} - \mu_k \gamma'(t)\| &\leqslant \left\|\overrightarrow{v} - \lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k}\right\| + \left\|\lambda_k \overrightarrow{\mathrm{AM}_k} - \mu_k \gamma'(t)\right\| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon |\mu_k|\end{aligned}$$

pour k assez grand. Il reste à voir que les scalaires μ_k ont une limite. Or

$$|\mu_k|\,\|\gamma'(t)\| \leqslant \|\overrightarrow{v}\| + \varepsilon + \varepsilon|\mu_k| \ ,$$

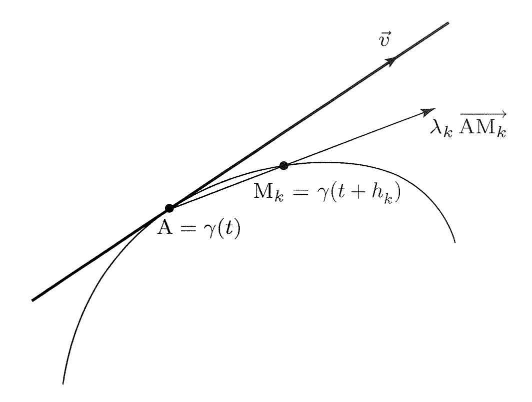


Fig. 34. La tangente, limite d'une sécante.

et la suite (μ_k) est donc bornée par $c = (\|\overrightarrow{v}\| + \varepsilon) \,/\, (\|\gamma'(t)\| - \varepsilon)$, si on a choisi $\varepsilon < \|\gamma'(t)\|$. En revenant à l'inégalité qui précède on a, pour k grand,

$$\|\overrightarrow{v} - \mu_k \gamma'(t)\| \leqslant (1 + c)\varepsilon \ .$$

Si γ_i' désigne une composante non nulle du vecteur $\gamma'(t)$, ceci montre notamment que $\mu_k = \lambda_k h_k$ tend vers $\mu = v_i / \gamma_i'$ lorsque $k \to \infty$, et on voit finalement que $\overrightarrow{v} = \mu \gamma'(t)$.

Si un arc paramétré $\mathrm{M} = \gamma(t)$ vérifie une équation de la forme $f(\mathrm{M}) = 0$, on a $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout t d'où, par dérivation de fonction composée, $\mathrm{D}f(\mathrm{M})\overrightarrow{v} = 0$ en notant $\overrightarrow{v} = \gamma'(t)$; ainsi se relient les points de vue des questions 1 et 3 (voir Chapitre 5, sous-variétés, pour plus de détails).

4. Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de la droite D et P la projection orthogonale de M sur D. Des calculs élémentaires de produits scalaires donnent

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{AP}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 \ ,$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \gamma(t+h) - \gamma(t) = h\gamma'(t) + o(h)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 = h^2\gamma'(t)^2 + o(h^2)$, et de même $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 = h^2\left(\gamma'(t) \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 + o(h^2)$. Ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}^2 = h^2\left(\gamma'(t)^2 - (\gamma'(t) \cdot \overrightarrow{v})^2\right) + o(h^2) \; .$$

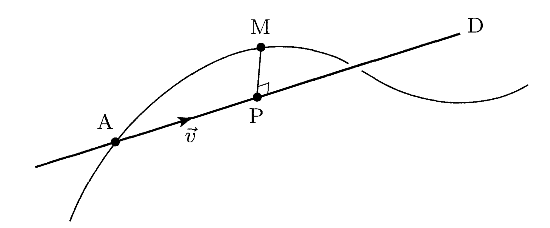


Fig. 35. Distance d'un point de la courbe à une sécante.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le coefficient de h^2 est toujours positif ou nul, nul si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$. Lorsque h tend vers 0, on a donc $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \mathrm{O}(h)$ pour toute droite D passant par A, et $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = o(h)$ si et seulement si D est la tangente en A.

Exercice 18. ***Holomorphe, différentiable, conforme.*** **Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de U dans $\mathbb{C}$.**

1. Montrer que la différentiabilité de f en $z_0 \in \mathrm{U}$ équivaut à la dérivabilité complexe, i.e. à l'existence de

$$f'(z_0) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \; .$$

On dit alors que f est *holomorphe* au point z_0.

2. Dans l'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, f s'identifie à l'application F définie par $\mathrm{F}(x, y) = (\mathrm{P}(x, y), \mathrm{Q}(x, y))$ en notant $z = x + iy$ et $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

(i) f est holomorphe en z_0 ;

(ii) F est différentiable en (x_0, y_0) et de plus en ce point

$$\mathrm{P}'_x = \mathrm{Q}'_y \text{ et } \mathrm{P}'_y = -\mathrm{Q}'_x \; .$$

Comment s'écrit alors le déterminant jacobien de F ?

3. *Interprétation géométrique.* Supposons F différentiable en (x_0, y_0) et la matrice jacobienne $\mathrm{DF}(x_0, y_0)$ inversible. L'application F (ou sa traduction complexe f) est dite *conforme* en ce point si elle conserve les angles orientés, i.e. pour tous arcs paramétrés $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ du plan tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (x_0, y_0)$ et $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$, les arcs images $\mathrm{F}(\gamma_1(t))$, $\mathrm{F}(\gamma_2(t))$ forment en $t = 0$ le même angle orienté que γ_1 et γ_2. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

(*i*) f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$;
(*ii*) F (ou f) est conforme en (x_0, y_0).

Commentaire. Cet exercice donne le b. a.-ba de la notion de fonction holomorphe ; pour en savoir plus, voir Candelpergher [6], Cartan [9] ou, à un niveau plus avancé, Rudin [35] chapitres 10 à 16. Le point crucial, à l'origine des étonnantes propriétés de ces fonctions, est que la différentielle *au sens complexe* est la multiplication par un nombre complexe, et donc une application linéaire du plan d'un type bien particulier (similitude).

Solution. 1. Recopier mot pour mot l'Exemple 1 (fonction réelle d'une variable réelle) en remplaçant partout le corps de base $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$: la différentiabilité au sens complexe se traduit par l'égalité

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = f'(z_0)w + |w|\varepsilon(w) \ ,$$

la différentielle étant l'application linéaire de $\mathbb{C}$ dans lui-même obtenue en multipliant par le nombre complexe $f'(z_0)$. Cela équivaut à

$$\left| \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} - f'(z_0) \right| = |\varepsilon(w)| \ ,$$

c'est-à-dire

$$f'(z_0) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \ .$$

2. Par définition, f est holomorphe en z_0 si et seulement si

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = f'(z_0)w + o(w) \ .$$

Traduite en langue réelle, avec $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$, $f'(z_0) = a + ib$, cette égalité s'écrit[8]

$$\begin{cases} \mathrm{P}(x_0 + h, y_0 + k) - \mathrm{P}(x_0, y_0) = ah - bk + o(h, k) \\ \mathrm{Q}(x_0 + h, y_0 + k) - \mathrm{Q}(x_0, y_0) = bh + ak + o(h, k). \end{cases}$$

Elle exprime que $\mathrm{F} = (\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ est différentiable en (x_0, y_0) avec pour matrice jacobienne

$$\mathrm{DF}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}'_x(x_0, y_0) & \mathrm{P}'_y(x_0, y_0) \\ \mathrm{Q}'_x(x_0, y_0) & \mathrm{Q}'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ,$$

matrice de la multiplication complexe par $a + ib$ dans $\mathbb{C}$ vue comme transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$. C'est dire que F est différentiable en ce point et que

$$\mathrm{P}'_x = \mathrm{Q}'_y = a \ , \ \mathrm{Q}'_x = -\mathrm{P}'_y = b$$

8. Où $o(h, k)$ signifie $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

(*relations de Cauchy-Riemann*). Le déterminant jacobien de F est alors

$$\det \mathrm{DF}(x_0, y_0) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 .$$

Complément. On peut aussi voir f, de manière hybride, comme l'application $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ de l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. La condition d'holomorphie en z_0 s'écrit maintenant

$$f((x_0 + h) + i(y_0 + k)) - f(x_0 + iy_0) = f'(z_0)h + if'(z_0)k + o(h, k) .$$

Elle équivaut à dire que f, ainsi considérée, est différentiable en (x_0, y_0) avec pour dérivées partielles en ce point $f'_x = f'(z_0)$, $f'_y = if'(z_0)$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors

$$f'_x + if'_y = 0 .$$

On utilise souvent les opérateurs différentiels (voir Rudin [35], début du chapitre 11)

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \ , \ \overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \, ;$$

les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent ainsi $\overline{\partial} f = 0$, et on a $\partial f = f'$ lorsqu'elles sont satisfaites.

3. On peut définir les tangentes orientées aux deux arcs par les vecteurs $\gamma'_j(0)$, $j = 1$ ou 2, et les tangentes à leurs images par les vecteurs $(\mathrm{F} \circ \gamma_j)'(0) = \mathrm{DF}(x_0, y_0)\gamma'_j(0)$ (dérivation de fonctions composées). Donc F est conforme en (x_0, y_0) si et seulement si l'application linéaire (inversible) $\mathrm{DF}(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même conserve les angles orientés de vecteurs.

C'est le cas si f est holomorphe en z_0, puisque cette application correspond à la multiplication par le nombre complexe $f'(z_0) \neq 0$: c'est une *similitude directe*, produit (commutatif) de l'homothétie de rapport $|f'(z_0)|$ et de la rotation d'angle $\arg f'(z_0)$.

Réciproquement, si l'application linéaire inversible $\mathrm{L} = \mathrm{DF}(x_0, y_0)$ conserve les angles orientés, considérons l'image par L des vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et $e_1 + e_2 = (1, 1)$. D'abord, $\mathrm{L}e_1$ étant non nul, il existe une similitude directe S telle que $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{L}e_1) = e_1$ et, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{L}$ conservant les angles orientés, le vecteur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{L}e_2$ doit être de la forme λe_2 avec $\lambda > 0$. De même, le vecteur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{L}(e_1 + e_2) = e_1 + \lambda e_2$ doit s'écrire $\mu(e_1 + e_2)$ avec $\mu > 0$, d'où $\lambda = \mu = 1$. Par suite $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{L}$ est l'identité et $\mathrm{L} = \mathrm{S}$ est une similitude directe (multiplication par un nombre complexe), donc f est holomorphe en z_0.

Exemples. La fonction $f(z) = e^z$, holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$ avec $f'(z) = e^z \neq 0$, définit une transformation conforme de $\mathbb{C}$ dans lui-même. On a ici $\mathrm{F}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ et les images des droites orthogonales $\gamma_1(t) = (t, y_0)$, resp. $\gamma_2(t) = (x_0, t)$, sont les demi-droites issues de 0, resp. les cercles de centre 0, qui forment deux familles orthogonales de courbes.

De même avec

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \text{ i.e. } \mathrm{F}(x, y) = (\sin x \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{sh} y)$$

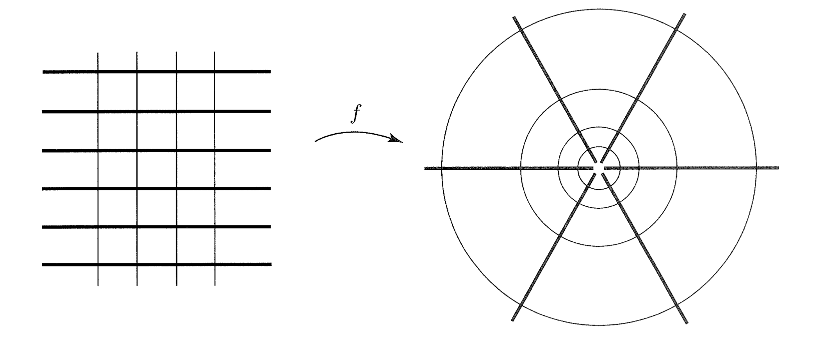


Fig. 36. La transformation $f(z) = e^z$.

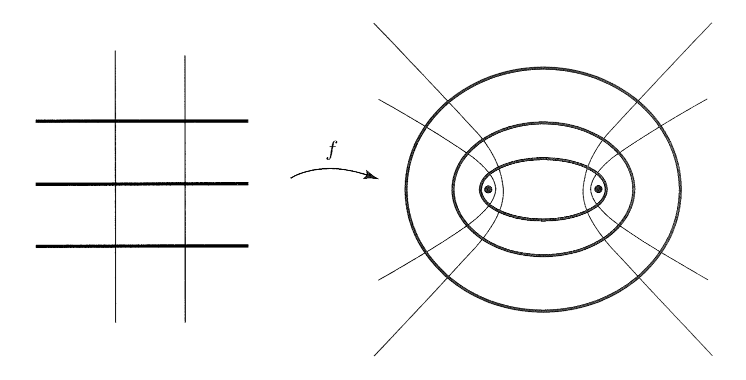


Fig. 37. La transformation $f(z) = \sin z$.

sur la bande ouverte $-\pi/2 < x < \pi/2$. Les droites γ_1, resp. γ_2, ont ici pour images les ellipses, resp. les hyperboles, de foyers $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui forment donc deux familles orthogonales de courbes. Pour une preuve géométrique, voir l'Exercice 92.

Exercice 19. ***Différentielle de l'inversion.*** **Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel on définit l'inverse de $x \neq 0$ comme le point $y = f(x)$ caractérisé par**

$$y = \lambda x \ , \ \lambda > 0 \ , \text{ et } \ \|x\| \cdot \|y\| = 1 \ .$$

1. Calculer $\mathrm{D}f(x)h$ pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

2. Interpréter géométriquement la différentielle $\mathrm{D}f(x)$, en considérant la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x. En déduire que l'inversion conserve les angles.

Solution. 1. La définition de y donne $\|x\| \cdot \|\lambda x\| = 1$, d'où $\lambda = 1/\|x\|^2$ et

$$y = f(x) = \frac{x}{\|x\|^2} \ .$$

Cette expression montre que l'inversion f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans lui-même. C'est même un C^1-difféomorphisme de cet ouvert, puisque $f(f(x)) = x$ par symétrie en x et y de la définition.

Soient $x = \sum_1^n x_i e_i$ et $f(x) = \sum_1^n f_i(x) e_i$ les décompositions de x et $f(x)$ selon la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$f_i(x) = \frac{x_i}{\sum_1^n x_k^2}\ , \text{ d'où } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\delta_{ij}}{\|x\|^2} - 2\frac{x_i x_j}{\|x\|^4}\ ,$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par suite

$$\mathrm{D}f(x)h = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j e_i = \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\frac{x \cdot h}{\|x\|^2} x\right)\ .$$

Variante. Ce résultat s'obtiendrait aussi, sans calcul de dérivées partielles, en effectuant le développement limité à l'ordre un, en $t = 0$, de

$$f(x + th) = \frac{x + th}{\|x + th\|^2}\ ;$$

le coefficient de t dans ce développement est $\mathrm{D}f(x)h$.

2. Pour $x \neq 0$ fixé, la décomposition d'un vecteur h selon la droite $\mathbb{R}x$ et l'hyperplan orthogonal s'écrit $h = \mu x + h'$ avec $x \cdot h' = 0$, d'où $x \cdot h = \mu \|x\|^2$. La composante de h selon $\mathbb{R}x$ est donc $h_x = \mu x = (x \cdot h)x / \|x\|^2$. Par suite

$$\mathrm{D}f(x)h = \frac{1}{\|x\|^2}(h - 2h_x)\ .$$

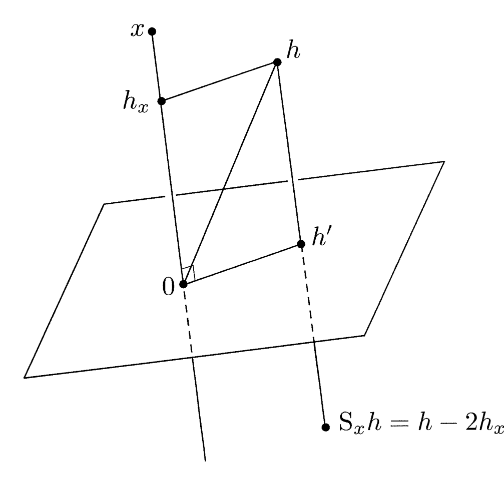


Fig. 38. Symétrie S_x par rapport à l'hyperplan orthogonal à x.

La différentielle $\mathrm{D}f(x)$ est donc la composée de la symétrie orthogonale S_x par rapport à l'hyperplan orthogonal à x, qui transforme h en $h - 2h_x$,

et de l'homothétie de centre 0 et de rapport $1/\|x\|^2$. C'est une similitude de $\mathbb{R}^n$.

Si $t \mapsto \gamma(t)$ est un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$, dérivable et de dérivée non nulle en $t = 0$, avec $\gamma(0) = x$, son image par f est l'arc $f \circ \gamma$, de dérivée

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{D}f(x)\gamma'(0)$$

en $t = 0$. Par suite la tangente en $y = f(x)$ à l'arc $f \circ \gamma$ se déduit de la tangente en x à γ par symétrie par rapport à l'hyperplan médiateur du segment $[x, y]$: cette symétrie transforme en effet le point x en y et la direction du vecteur $\gamma'(0)$ en celle de $(f \circ \gamma)'(0)$. Si deux arcs γ_1 et γ_2 se coupent en x sous l'angle (non orienté) α, leurs images par f se coupent donc en y sous le même angle α ; l'inversion conserve les angles.

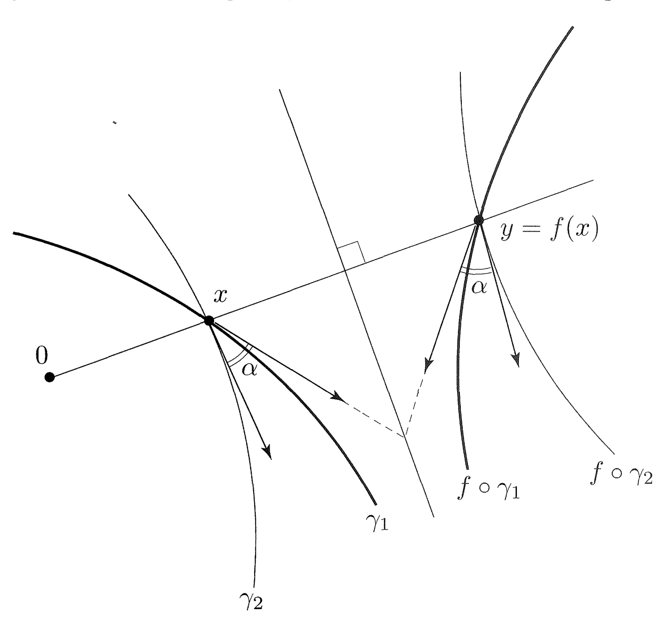


Fig. 39. L'inversion conserve les angles.

Remarques. (i) Soient S la sphère de centre $(0, 0, -1/2)$ et de rayon $1/2$ dans $\mathbb{R}^3$, de « pôle nord » 0, et P son plan tangent au « pôle sud », d'équation $z = -1$. On vérifie aisément que la *projection stéréographique* de pôle 0 d'un point x de S sur le plan P est donnée par $y = x/\|x\|^2$; c'est donc la restriction à S de l'inversion précédente, qui conserve les angles.
(ii) En dimension deux on peut identifier $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$, et l'inversion f à la transformation $z \mapsto f(z) = z/|z|^2 = 1/\overline{z}$. Cette application, qui conserve les angles mais non les angles orientés, n'est pas conforme au sens de l'Exercice 18. Elle correspond à une fonction « antiholomorphe » sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercice 20. ***Coordonnées polaires.***

1. Montrer que l'application $\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de l'ouvert $]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$ sur le *plan fendu* $\mathbb{R}^2 \backslash D$, où D est la demi-droite $x \leqslant 0$, $y = 0$. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$, donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et g.

2. On pose $f(x, y) = h(x, \theta)$. Comparer les dérivées partielles f'_x et h'_x. Expliquer la différence, bien qu'on dérive la « même » fonction par rapport à la « même » variable...

Solution. Exercice classique – mais non exempt de pièges, trop souvent négligés !

1. Notons U la demi-bande ouverte $]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$. D'abord Φ applique U dans le plan fendu : si $(r, \theta) \in U$ et $y = r\sin\theta = 0$, on a $\theta = 0$ donc $x = r > 0$ et (x, y) n'appartient pas à D.

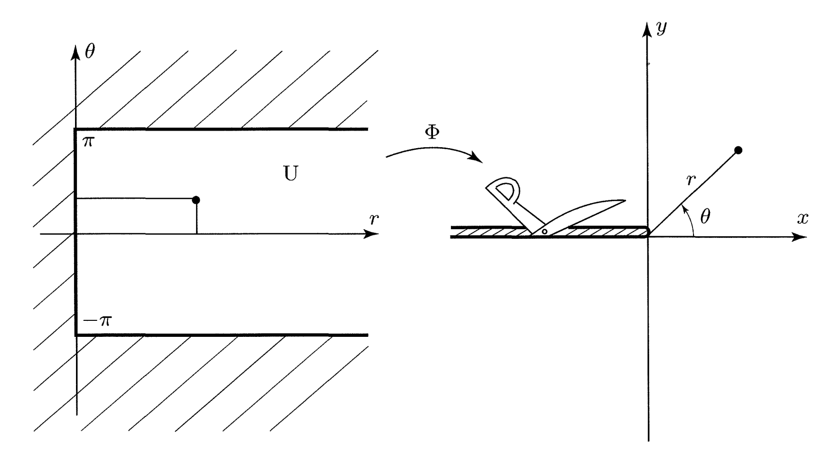


Fig. 40. Coordonnées polaires dans le plan fendu.

Inversement pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D$ les équations $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ aux inconnues $(r, \theta) \in U$ entraînent

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{y}{x + r},$$

puisque $r > 0$ et $\cos\theta \neq -1$. Comme $-\pi < \theta < \pi$ elles admettent donc la solution unique

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

et Φ est une bijection de U sur le plan fendu, visiblement de classe C^1 (et même C^∞) ainsi que son application réciproque. Rappelons que arctg est l'application réciproque de $\operatorname{tg} :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$.

Attention. La formule plus simple (et plus connue) $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ n'est valable que sur le demi-plan $x > 0$.

Une fonction numérique f est donc différentiable sur le plan fendu si et seulement si la fonction $g = f \circ \Phi$ l'est sur U et on a, par dérivation de la fonction composée $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \ , \ \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \ ,$$

c'est-à-dire

$$g'_r = \frac{x}{r}f'_x + \frac{y}{r}f'_y \ , \ g'_\theta = -yf'_x + xf'_y$$

puisque $\cos\theta = x/r$, $\sin\theta = y/r$. Pour exprimer les dérivées de f au moyen de celles de g, il est plus simple de résoudre les équations précédentes (ce qui revient bien sûr à inverser la matrice $\mathrm{D}\Phi(r,\theta)$) que d'écrire directement les dérivées de r et θ par rapport à x et y. Voir ci-dessous le résultat.

Variante. En notation différentielle on écrit

$$\begin{aligned} f'_x dx + f'_y dy = g'_r dr + g'_\theta d\theta & \\ dx = d(r\cos\theta) &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = d(r\sin\theta) &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \ , \end{aligned}$$

on reporte, et on identifie les coefficients de dr et $d\theta$ d'où les expressions ci-dessus de g'_r et g'_θ. Inversement on en déduit aussi

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy \ , d\theta = -\frac{y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy$$

(ce qui pourrait s'obtenir encore, pour $x > 0$ au moins, en écrivant $r^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg}\theta = y/x$, d'où $2rdr = 2xdx + 2ydy$, $d\theta/\cos^2\theta = (xdy - ydx)/x^2$, etc.). Par suite

$$f'_x = \cos\theta\, g'_r - \frac{\sin\theta}{r}g'_\theta \ , \ f'_y = \sin\theta\, g'_r + \frac{\cos\theta}{r}g'_\theta \ .$$

2. L'application Φ est ici remplacée par

$$\Psi : (x, \theta) \mapsto (x, y) = (x, x\operatorname{tg}\theta) \ ,$$

difféomorphisme de l'ouvert $x > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ sur le demi-plan $x > 0$. Si $h = f \circ \Psi$ on a $h(x,\theta) = f(x, x\operatorname{tg}\theta)$ d'où

$$h'_x = f'_x + f'_y \operatorname{tg}\theta \ .$$

Les dérivées h'_x et f'_x sont donc en général différentes, ce qui s'explique aisément : la première est une dérivée à θ fixé, i.e. dans la direction d'une demi-droite issue de 0, la seconde à y fixé, i.e. selon la direction horizontale.

On retrouvera ce phénomène à l'Exercice 80.

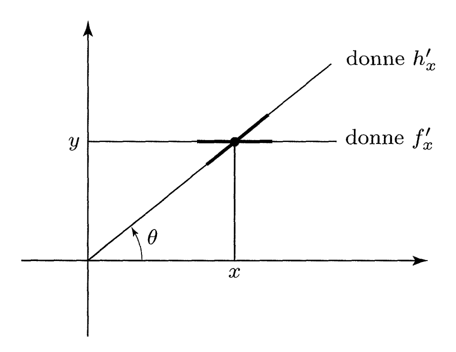


Fig. 41. Deux directions différentes de dérivation en un point.

Exercice 21. ***Identité d'Euler des fonctions homogènes.*** **Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable en tout point, et k une constante réelle. Montrer que f est homogène de degré k, i.e. $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k\, f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

[On pourra dériver en t la fonction $t^{-k} f(tx)$.]

Solution. L'idée est d'étudier la variation de f le long de chaque demi-droite issue de l'origine, i.e. la fonction $t \mapsto f(tx)$ à x fixé. Par dérivation de fonction composée on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(tx_1, \ldots, tx_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \ .$$

Par suite

$$t^{k+1} \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-k} f(tx)\right) = \sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) - k\, f(tx) \ .$$

L'identité d'Euler équivaut donc à l'annulation du premier membre de cette égalité pour tout $t > 0$ et tout $x \neq 0$, c'est-à-dire à la constance de la fonction $t \mapsto t^{-k} f(tx)$ sur l'intervalle $]0, \infty[$. La valeur de cette fonction en $t = 1$ étant $f(x)$, cela équivaut à égalité $f(tx) = t^k f(x)$ pour $t > 0$ et $x \neq 0$.

Exercice 22. ***La boule aussi grosse que l'espace ?*** **Soit $||.||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application**

$$x \mapsto f(x) = \mathrm{th}\, ||x|| \cdot \frac{x}{||x||} \ \text{si}\ x \neq 0 \ , \ f(0) = 0$$

est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur sa boule unité ouverte.

[Pour l'étude au voisinage de l'origine, on pourra raisonner sur le développement en série entière de la fonction th.]

Solution. La tangente hyperbolique $s = \operatorname{th} r = \operatorname{sh} r / \operatorname{ch} r$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, inversé par $r = \operatorname{arg\,th} s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$; ces fonctions résolvent le problème pour $n = 1$.

On a donc $\|f(x)\| = \operatorname{th}\|x\| < 1$ (y compris pour $x = 0$) et f applique $\mathbb{R}^n$ dans la boule unité ouverte. Inversement l'équation

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{th}\|x\|}{\|x\|}x$$

entraîne $x = (\|x\| / \operatorname{th}\|x\|)y$ et $\operatorname{th}\|x\| = \|y\|$. Par suite f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur la boule unité, inversée par

$$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arg\,th}\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|} \text{ si } y \neq 0 \ , \ f^{-1}(0) = 0 \ .$$

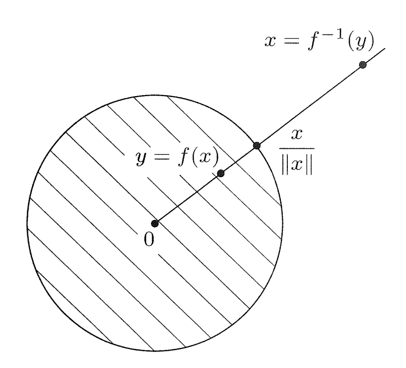


Fig. 42. $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe à la boule unité.

Il reste à voir que f et f^{-1} sont de classe C^1 (en fait C^∞). C'est clair en dehors de l'origine, car $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ et f est alors une composée d'applications C^1 ; de même pour f^{-1}.

Pour l'étude au voisinage de l'origine, on observe que la fonction $\operatorname{th} z = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} z$ est holomorphe dans le disque $|z| < \pi/2$ su plan complexe (car $\operatorname{ch} z$ ne s'annule qu'aux points $(i\pi/2) + i\pi\mathbb{Z}$), et impaire, donc développable en série entière dans ce disque (Cartan [9] p. 73) sous la forme

$$\operatorname{th} z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k+1} \ , \ |z| < \pi/2 \ .$$

Alors on a , pour $\|x\| < \pi/2$,

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \|x\|^{2k} \right) x$$

et le facteur entre parenthèses est de classe C^1 (et même C^∞), comme composé des fonctions $x \mapsto \|x\|^2$ et $t \mapsto \sum a_k t^k$. On raisonne de même pour f^{-1}, à l'aide du développement en série entière de arg th, de rayon de convergence 1.

Exercice 23. ***Intégrales premières.*** **Soit un système différentiel**

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \ , 1 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

où les $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données, continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On appelle *intégrale première sur* U du système toute fonction $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que pour tout $x \in U$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = 0 \ .$$

1. Montrer que, pour toute solution $x(t)$ du système différentiel, la fonction $t \mapsto F(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est constante.

2. Donner une intégrale première sur $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $x' = Ax$, où A est une matrice constante antisymétrique $n \times n$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$. Montrer que le système

$$x'_1 = x_1 \ , \ x'_2 = \lambda x_2$$

admet une intégrale première non constante sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\lambda \leqslant 0$.

[On pourra résoudre d'abord le système.]

Commentaire. Il y a donc des liens étroits entre un système différentiel et l'équation aux dérivées partielles du premier ordre vérifiée par ses intégrales premières. Ces liens peuvent être exploités pour résoudre cette dernière (voir par exemple Cartan [8] p. 162-168, ou l'Exercice 85 ci-dessous).

Solution. 1. La fonction composée $F(x(t))$ a pour dérivée

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)) x'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x(t)) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)) = 0 \ .$$

2. L'exemple simple $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -x_1$, d'intégrale première $x_1^2 + x_2^2$ (trajectoires circulaires de centre 0), suggère de considérer $F(x) =$

$\sum_{i=1}^n x_i^2$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) x_\imath = 0$$

d'après l'antisymétrie de $\mathrm{A} = (a_{ij})$. Chaque trajectoire du système est donc contenue dans une sphère de centre 0.

3. La solution de données initiales $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$ est $x_1(t) = a_1e^t$, $x_2(t) = a_2e^{\lambda t}$. Si F est une intégrale première sur le plan, on doit donc avoir $\mathrm{F}(a_1e^t, a_2a^{\lambda t}) = \mathrm{C}$, constante indépendante de $t \in \mathbb{R}$ (mais qui peut dépendre de a_1 et a_2).

Pour $\lambda > 0$ on en déduit $\mathrm{F}(0,0) = \mathrm{C}$ en faisant tendre t vers $-\infty$ (continuité de F à l'origine) d'où, pour $t = 0$, $\mathrm{F}(a_1, a_2) = \mathrm{C} = \mathrm{F}(0,0)$ quels que soient a_1 et a_2. Donc F est constante sur le plan tout entier, c'est une intégrale première triviale.

Pour λ entier négatif ou nul les calculs précédents suggèrent de considérer la fonction $\mathrm{F}(x_1, x_2) = x_1^{-\lambda}x_2$, qui apparaît en éliminant t entre les relations $x_1 = a_1e^t$ et $x_2 = a_2e^{\lambda t}$, et on vérifie immédiatement que c'est une intégrale première de classe C^1 sur le plan, non triviale.

Noter que $x_1^{-\lambda}x_2$ est encore intégrale première pour $\lambda > 0$, mais seulement sur l'ouvert $x_1 \neq 0$ du plan.

Exercice 24. **Lois de groupe sur* $\mathbb{R}$. Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ (associativité, élément neutre e, existence d'un inverse pour chaque élément). On suppose que la fonction f définie par $f(x,y) = x * y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on note $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ ses deux dérivées partielles.

1. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(\partial_2 f)(x * y, e) = (\partial_2 f)(x,y) \cdot (\partial_2 f)(y, e)\ .$$

En déduire que $(\partial_2 f)(y,e) > 0$.

[On pourra dériver en z l'égalité $(x * y) * z = x * (y * z)$, puis utiliser l'inverse de y.]

2. On cherche à construire une fonction φ, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que pour tous x, y

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)\ . \qquad (1)$$

En dérivant en y, montrer qu'on a nécessairement

$$\varphi(x) = a\int_e^x \frac{dt}{(\partial_2 f)(t,e)}\ , \qquad (2)$$

où a est une constante.

3. Inversement montrer que, pour chaque constante $a \neq 0$, l'égalité (2) définit un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, qui transforme la loi $*$ en l'addition.

Commentaire. Le but de l'exercice est d'établir que l'addition est, à difféomorphisme près, la seule loi de groupe de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En particulier une telle loi est nécessairement *commutative.* Ce serait faux sur $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 2$: voir l'exemple

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + e^{x_1} y_2) ,$$

loi de groupe non commutative qui traduit la composition des transformations affines $t \mapsto e^{x_1} t + x_2$ de la droite ; voir aussi l'Exercice 117.

Le principal outil de la solution est la dérivation des fonctions composées.

Solution. 1. L'associativité $(x * y) * z = x * (y * z)$ s'écrit aussi

$$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$$

d'où, en dérivant cette identité par rapport à z,

$$(\partial_2 f)(f(x,y),z) = (\partial_2 f)(x, f(y,z)) \cdot (\partial_2 f)(y,z) .$$

Pour $z = e$ on obtient en particulier

$$(\partial_2 f)(x * y, e) = (\partial_2 f)(x,y) \cdot (\partial_2 f)(y,e)$$

puisque $f(y,e) = y * e = y$.

Notons y' l'inverse de y pour la loi $*$; pour $x = y'$ on a

$$(\partial_2 f)(e,e) = (\partial_2 f)(y',y) \cdot (\partial_2 f)(y,e) . \tag{3}$$

Or $f(e,y) = e * y = y$ entraîne, en dérivant en y, que $(\partial_2 f)(e,y) = 1$. *A fortiori* $(\partial_2 f)(e,e) = 1$, et l'égalité (3) donne $(\partial_2 f)(y,e) \neq 0$ pour tout y. La fonction $y \mapsto (\partial_2 f)(y,e)$, continue sur $\mathbb{R}$, égale à 1 en un point, ne s'annulant jamais, est donc partout strictement positive.

2. L'identité (1) s'écrit $\varphi(f(x,y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$; elle implique, par dérivation en y,

$$\varphi'(f(x,y)) \cdot (\partial_2 f)(x,y) = \varphi'(y)$$

d'où, pour $y = e$, l'égalité $\varphi'(x) \cdot (\partial_2 f)(x,e) = a$ en notant $a = \varphi'(e)$. Par suite φ doit être une primitive de la fonction $x \mapsto a/(\partial_2 f)(x,e)$, qui est bien définie et continue d'après 1. Comme $\varphi(x * e) = \varphi(x) + \varphi(e)$ on doit avoir $\varphi(e) = 0$, et φ a nécessairement l'expression (2).

3. Considérons donc

$$\varphi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{(\partial_2 f)(t,e)} ,$$

avec $a \neq 0$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $\varphi'(x) = a/(\partial_2 f)(x,e)$ est toujours du signe de a. Donc φ est une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et la bijection

réciproque est de classe C^1 sur I (d'après un résultat classique, qui sera généralisé au chapitre 5).

De plus la dérivée en y de $\varphi(x * y) - \varphi(x) - \varphi(y)$ est

$$\varphi'(x * y) \cdot (\partial_2 f)(x, y) - \varphi'(y) = a \frac{(\partial_2 f)(x, y)}{(\partial_2 f)(x * y, e)} - \frac{a}{(\partial_2 f)(y, e)} ,$$

identiquement nulle d'après le résultat de 1. Par suite

$$\varphi(x * y) - \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x * e) - \varphi(x) - \varphi(e) = 0 ,$$

ce qui établit (1).

Enfin l'image $I = \varphi(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert contenant $\varphi(e) = 0$ et stable par l'addition , puisque $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x * y)$; c'est donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 25. ***Mouvements tangents, rotation instantanée.*** **Soit $\varphi : (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour chaque t, l'application $\varphi_t : x \mapsto \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même. On interprète φ comme un *mouvement*, $\varphi_t(x)$ étant la position à l'instant t du point qui était en x à l'instant initial, et on appelle *champ des vitesses à l'instant* t l'application $y \mapsto v_t(y)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par**

$$v_t(\varphi_t(x)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) .$$

En d'autres termes $y = \varphi_t(x)$ est, pour chaque x donné, une solution du système différentiel $y' = v_t(y)$.

Deux mouvements φ et ψ sont dits *tangents à l'instant* t_0 s'ils ont même position et même champ des vitesses à cet instant, i.e.

$$\varphi_{t_0}(x) = \psi_{t_0}(x) \text{ et } \left.\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x)\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x)\right|_{t=t_0}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Dans la suite on suppose que φ est le *mouvement d'un solide*. Cela signifie que, pour chaque t, l'application φ_t est un déplacement de l'espace $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel), i.e. est de la forme

$$\varphi_t(x) = R(t)x + T(t) ,$$

où $R(t) \in SO(n)$ (groupe des matrices orthogonales $n \times n$ de déterminant 1) est une rotation autour de l'origine, et $T(t) \in \mathbb{R}^n$ est une translation.

1. Montrer que R et T sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

(*i*) $\mathrm{R}(t) \in \mathrm{SO}(n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

(*ii*) $\mathrm{R}(0) \in \mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{R}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{R}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $\mathrm{A}(t)$ est une matrice *antisymétrique* $n \times n$, fonction continue de t sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que le champ des vitesses du mouvement d'un solide est de la forme

$$v_t(y) = \mathrm{A}(t)y + w(t) \ .$$

3. Si $\mathrm{A}(t_0) = 0$, montrer que le mouvement d'un solide est tangent à l'instant t_0 à un mouvement de translation uniforme. Si $\mathrm{A}(t_0) \neq 0$ et $n = 2$, montrer qu'il est tangent en t_0 à un mouvement de rotation uniforme : on montrera d'abord qu'il existe un unique point y_0 de vitesse nulle à l'instant t_0, appelé *centre instantané de rotation*.

[Dans les deux cas on pourra chercher un mouvement tangent à $y = \varphi_t(x)$ sous la forme $z = \psi_t(x)$, avec $z'(t) = v_{t_0}(z)$.]

Commentaire. On fait ici les premiers pas en cinématique du solide. Le cas $n = 2$, appelé *mouvement plan sur plan*, a de nombreuses applications géométriques ; à chaque instant, le mouvement est tangent à une translation ou à une rotation (cf. Exercice 105). Les cas $n = 2$ ou 3 éclairent notamment les formules de Frenet de la théorie des courbes. En toute dimension, on peut voir le mouvement d'un solide comme un arc paramétré dans le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$ (qu'il faudrait munir d'une structure de variété différentiable...), et deux mouvements tangents en t_0 comme deux arcs tangents au point de paramètre t_0. Voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] chapitre 12, ou Arnold [2] chapitre 6, pour approfondir ces questions.

Solution. 1. L'application φ étant de classe C^1, il en est de même de la fonction $\mathrm{T}(t) = \varphi_t(0)$. Si $e_1, \ldots, e_n$ sont les vecteurs de la base canonique, le i-ième vecteur colonne de $\mathrm{R}(t)$ est $\mathrm{R}(t)e_i = \varphi_t(e_i) - \varphi_t(0)$, donc $\mathrm{R}(t)$ est fonction C^1 de t sur $\mathbb{R}$.

Supposons (*i*). En dérivant l'égalité $\mathrm{R}(t)^t\mathrm{R}(t) = \mathrm{I}$ (où ^{t} désigne la transposition et I la matrice unité) on obtient $\mathrm{R}'^t\mathrm{R} + \mathrm{R}^t\mathrm{R}' = 0$, d'où l'antisymétrie de $\mathrm{R}'^t\mathrm{R} = \mathrm{A}$, et $\mathrm{R}' = \mathrm{AR}$.

Supposons (*ii*). Alors

$$\begin{aligned}\left({}^t\mathrm{RR}\right)' &= {}^t\mathrm{RR}' + {}^t\mathrm{R}'\mathrm{R} = {}^t\mathrm{RAR} + {}^t(\mathrm{AR})\mathrm{R} \\ &= {}^t\mathrm{RAR} + {}^t\mathrm{R}^t\mathrm{AR} = 0 \ ,\end{aligned}$$

puisque A est antisymétrique. Par suite ${}^t\mathrm{R}(t)\mathrm{R}(t) = {}^t\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(0) = \mathrm{I}$, d'où $(\det \mathrm{R}(t))^2 = 1$ et $\det \mathrm{R}(t) = \pm 1$. En fait ce déterminant vaut 1 pour tout t, car c'est vrai pour $t = 0$ et la fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que $\mathrm{R}(t) \in \mathrm{SO}(n)$.

2. En dérivant $\varphi_t(x) = \mathrm{R}(t)x + \mathrm{T}(t)$ il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) &= \mathrm{R}'x + \mathrm{T}' = \mathrm{AR}x + \mathrm{T}' \\ &= \mathrm{A}(\mathrm{R}x + \mathrm{T}) + \mathrm{T}' - \mathrm{AT} \ .\end{aligned}$$

En notant $y = \varphi_t(x) = \mathrm{R}(t)x + \mathrm{T}(t)$ et $w(t) = \mathrm{T}'(t) - \mathrm{A}(t)\mathrm{T}(t)$, le champ des vitesses à l'instant t s'écrit donc

$$v_t(y) = \mathrm{A}(t)y + w(t) \ ,$$

où $w(t) = v_t(0) \in \mathbb{R}^n$ est fonction continue de t.

En dimension $n = 3$, la matrice antisymétrique $\mathrm{A}(t)$ donne le produit vectoriel par un vecteur noté $\overrightarrow{\omega(t)}$ (« *vecteur rotation instantanée* ») et l'expression précédente s'écrit classiquement sous la forme

$$\overrightarrow{v_t(\mathrm{M})} = \overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{v_t(\mathrm{P})}$$

où M et P sont deux points quelconques de $\mathbb{R}^3$.

3. Un mouvement $y = \varphi_t(x)$ de champ de vitesses v_t est, pour chaque x donné, solution du système différentiel

$$y' = v_t(y) \ , \ y(t_0) = \varphi_{t_0}(x) \ .$$

Un mouvement $z = \psi_t(x)$ solution du système différentiel « gelé en t_0 » :

$$z' = v_{t_0}(z) \ , \ z(t_0) = \varphi_{t_0}(x)$$

est tangent en t_0 au précédent, puisqu'il a en cet instant même position $\varphi_{t_0}(x)$ et même vitesse $v_{t_0}(\varphi_{t_0}(x))$. Parmi tous les mouvements susceptibles d'être tangents en t_0 à φ, c'est même le seul qui soit *uniforme*, son champ de vitesses étant v_{t_0} indépendant du temps. On obtiendra donc le *mouvement uniforme tangent en* t_0 au mouvement d'un solide en résolvant le système différentiel

$$z' = \mathrm{A}(t_0)z + w(t_0) \ , \ z(t_0) = \varphi_{t_0}(x) \ .$$

Si $\mathrm{A}(t_0) = 0$ la résolution est immédiate :

$$z = \psi_t(x) = \varphi_{t_0}(x) + (t - t_0)w(t_0) \ ,$$

ce qui définit une *translation uniforme tangente* composée du déplacement constant φ_{t_0} suivi d'une translation de direction $w(t_0)$.

Si $\mathrm{A}(t_0) \neq 0$ on peut encore résoudre le système et exprimer z à l'aide de l'exponentielle de matrice. Contentons-nous ici du cas $n = 2$, où l'interprétation du résultat est particulièrement simple.

Dans un mouvement de rotation autour d'un point, la vitesse de ce point est nulle. Si φ est tangent en t_0 à un tel mouvement, le centre

de rotation doit donc être un point y_0 de vitesse nulle à l'instant t_0, i.e. $A(t_0)y_0+w(t_0) = 0$. Mais pour $n = 2$ une matrice antisymétrique non nulle est inversible[9], d'où un unique point de vitesse nulle $y_0 = -A(t_0)^{-1}w(t_0)$. Le système à résoudre se réduit alors à

$$z' = A(t_0)z + w(t_0) = A(t_0)(z - y_0) \ , \ z(t_0) = \varphi_{t_0}(x)$$

d'où la solution

$$z - y_0 = \psi_t(x) - y_0 = e^{(t-t_0)A(t_0)} \left(\varphi_{t_0}(x) - y_0\right) \ ,$$

ce qui définit une *rotation uniforme tangente* composée du déplacement constant φ_{t_0} suivi d'une rotation autour du *centre instantané de rotation*

$$y_0 = -A(t_0)^{-1}w(t_0) \ .$$

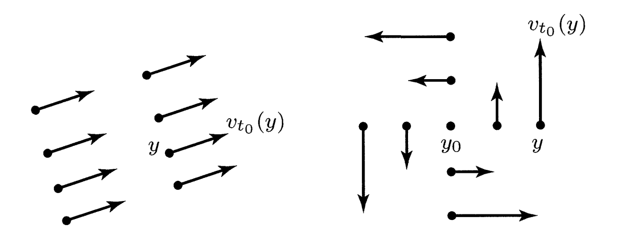


Fig. 43. Champ des vitesses d'un mouvement de translation, ou de rotation autour de y_0.

En écrivant $A(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(t_0) \\ \omega(t_0) & 0 \end{pmatrix}$, on voit que la vitesse de rotation est $\omega(t_0)$ d'après l'Exercice 16.
Attention. De même que la tangente à une courbe varie avec le point de contact, de même la translation ou la rotation tangente ainsi définies dépendent de l'instant t_0. En particulier le centre instantané de rotation y_0 varie avec t_0.

Exercice 26. ***Différentielle du déterminant.*** **On note det la fonction déterminant et tr la fonction trace sur l'espace E des matrices $n \times n$ réelles.**

1. Montrer que det est de classe C^1 sur E et que $D\det(I) = \mathrm{tr}$, où I est la matrice unité.

2. En déduire que, pour tous $X, H \in E$ on a

$$\mathbf{D\det(X)H = tr\left({}^t\overline{X}H\right)} \ ,$$

9. Vérification directe immédiate, ou plus sophistiquée via le théorème de Cayley-Hamilton : $A^2 - (\mathrm{tr}\, A)A + (\det A)I = 0$, avec ici $\mathrm{tr}\, A = 0$, $\det A \neq 0$...

où $\overline{\mathrm{X}}$ est la comatrice[10] **de X.**

[On pourra supposer d'abord X inversible, puis étendre le résultat par densité dans E des matrices inversibles.]

3. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) du système différentiel linéaire $y' = \mathrm{A}(t)y$, où $\mathrm{A}(t) \in \mathrm{E}$ est fonction continue de t, et soit

$$w(t) = \det(y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

leur *déterminant wronskien.* Montrer que $w'(t) = (\mathrm{tr}\, \mathrm{A}(t))\, w(t)$.

[On pourra raisonner sur la matrice Y de vecteurs colonnes $y_1, \ldots, y_n$.]

En déduire $\det\left(e^{t\mathrm{A}}\right)$ pour A constante.

Solution. 1. On munit E d'une norme quelconque. Le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc de classe C^1 (et même C^∞) sur E. Pour obtenir $\mathrm{D}\det(\mathrm{I})$, il suffit donc de calculer la dérivée de det en I dans une direction quelconque $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$. Or, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de H, celles de $\mathrm{I} + t\mathrm{H}$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont les $1 + t\lambda_i$, d'où

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{I} + t\mathrm{H}) &= \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) = 1 + t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \mathrm{O}(t^2) \\ &= 1 + t\, \mathrm{tr}\, \mathrm{H} + \mathrm{O}(t^2)\end{aligned}$$

pour $t \to 0$, en ordonnant selon les puissances croissantes de t. Le coefficient de t donne

$$\mathrm{D}\det(\mathrm{I})\mathrm{H} = \mathrm{tr}\, \mathrm{H}\ .$$

2. Si X est une matrice *inversible*, on se ramène immédiatement de X à I en écrivant

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{X} + \mathrm{H}) &= \det \mathrm{X} \cdot \det(\mathrm{I} + \mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}) \\ &= \det \mathrm{X} \cdot \left(1 + \mathrm{tr}(\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}) + o(\|\mathrm{H}\|)\right) \\ &= \det \mathrm{X} + \mathrm{tr}\left({}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{H}\right) + o(\|\mathrm{H}\|)\ ,\end{aligned}$$

en notant $\overline{\mathrm{X}} = (\det \mathrm{X})\, {}^t\mathrm{X}^{-1}$ la comatrice de X ; par suite

$$\mathrm{D}\det(\mathrm{X})\mathrm{H} = \mathrm{tr}\left({}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{H}\right)\ .$$

Les matrices inversibles forment un ouvert dense de E. Elles sont en effet caractérisées par $\det \mathrm{X} \neq 0$, donc forment un ouvert. Pour $\mathrm{Y} \in \mathrm{E}$ donnée, de valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on peut choisir une suite (ε_k), convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout k

$$\det(\mathrm{Y} - \varepsilon_k \mathrm{I}) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0\ .$$

10. Son élément à la i-ième ligne et la j-ième colonne est le déterminant déduit de $\det \mathrm{X}$ en effaçant cette ligne et cette colonne, changé de signe $i + j$ fois.

Les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I$ sont alors inversibles et convergent vers Y dans E, d'où la densité annoncée.

L'application $X \mapsto \overline{X}$ est continue de E dans E, puisque les cofacteurs sont des fonctions polynomiales des coefficients de X. Comme det est de classe C^1, l'expression obtenue pour sa différentielle en un point inversible se prolonge par continuité à E tout entier.

Variante. La solution « calculatoire » suivante est plus brève, mais moins instructive. Notons x_{ij} les éléments de la matrice X et $\overline{x_{ij}}$ les cofacteurs correspondants, éléments de $\overline{X}$. En développant le déterminant selon la i-ième ligne, on obtient

$$\det X = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_{ij}}\, x_{ij} \ .$$

Comme le cofacteur $\overline{x_{ij}}$ ne fait intervenir aucun élément de la i-ième ligne de X, on en déduit immédiatement la dérivée partielle

$$\frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = \overline{x_{ij}} \ ,$$

d'où

$$D \det(X) H = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_{ij}}\, h_{ij} = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{X} H\right) \ .$$

3. Soit Y la matrice de colonnes $y_1, \ldots, y_n$; en juxtaposant les égalités $y_i' = Ay_i$ on voit que $Y' = AY$. Par dérivation de fonction composée, on en déduit

$$w' = (\det Y)' = D \det(Y) Y' = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{Y} Y'\right)$$

grâce à 2. Or $\operatorname{tr}\left({}^t\overline{Y} Y'\right) = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{Y} AY\right) = \operatorname{tr}\left(AY\, {}^t\overline{Y}\right)$ par la symétrie de la trace, et $Y\, {}^t\overline{Y} = (\det Y) I = wI$. Finalement $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t)) w(t)$, ce qui s'intègre en

$$w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right) w(t_0)$$

et montre que le wronskien ne peut s'annuler en un point sans être identiquement nul.

Lorsque A est indépendante de t, l'équation $Y' = AY$ admet la solution $Y = e^{tA}$, et il vient simplement

$$\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr} A} \ ,$$

égalité bien connue en algèbre linéaire.

Exercice 27. ***Une excursion en dimension infinie.*** **Soient $I = [0,1]$, F l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et E le sous-espace des**

fonctions de classe C^1 nulles en 0. On munit F de la norme $\|x\| = \sup_{t\in I} |x(t)|$ et E de $\|x\|_1 = \sup_{t\in I} |x'(t)|$. Montrer que l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x) = x' + x^2$ est de classe C^1 sur E, et calculer sa différentielle en tout point.

Solution. Relire la définition générale de la différentielle : il ne faudra pas oublier de vérifier que la différentielle $Df(a)$ obtenue est une application linéaire *continue* de E dans F, ce qui n'est pas automatique en dimension infinie !

D'abord $\|.\|_1$ est bien une norme sur E : l'égalité $\|x\|_1 = 0$ exprime que la dérivée x' est identiquement nulle, d'où x identiquement nulle sur I puisque nulle en 0. On a d'ailleurs $x(t) = \int_0^t x'(s)\, ds$, d'où $|x(t)| \leqslant \sup_I |x'|$ et

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \text{ pour } x \in E ,$$

ce qui servira dans la suite.

Soient a et h dans E. Il faut étudier l'accroissement de f :

$$f(a+h) - f(a) = h' + 2ah + h^2 ,$$

où le plus novice des calculateurs différentiels reconnaît aussitôt une partie linéaire en h et un petit reste d'ordre supérieur, h^2. On note donc

$$Df(a)h = h' + 2ah ,$$

c'est-à-dire la fonction $t \mapsto (Df(a)h)(t) = h'(t) + 2a(t)h(t)$. L'application $h \mapsto Df(a)h$ est évidemment linéaire de E dans F ; de plus

$$\begin{aligned} \|Df(a)h\| &= \sup_I |h' + 2ah| \\ &\leqslant \sup |h'| + 2 \sup |a| \cdot \sup |h| = \|h\|_1 + 2\|a\| \cdot \|h\| \\ &\leqslant (1 + 2\|a\|)\|h\|_1 , \end{aligned}$$

et $Df(a)$ est une application linéaire continue de E dans F. Comme $\|h^2\| = \sup |h^2| = \|h\|^2 \leqslant \|h\|_1^2$, on a bien $h^2 = o(\|h\|_1)$ quand h tend vers 0 dans E. Ceci montre que f est différentiable en a, de différentielle $Df(a)$.

Il reste à établir que f est de classe C^1 sur E, c'est-à-dire que l'application $x \mapsto Df(x)$ est continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$, ce dernier étant muni de la norme d'application linéaire. Pour $x, y, h \in E$ on a

$$Df(x)h - Df(y)h = (h' + 2xh) - (h' + 2yh) = 2(x-y)h ,$$

d'où

$$\|Df(x)h - Df(y)h\| \leqslant 2\|x - y\| \cdot \|h\| \leqslant 2\|x - y\|_1 \cdot \|h\|$$

c'est-à-dire

$$\|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \leqslant 2\|x-y\|_1 \ ,$$

d'où le résultat.

Voir à l'Exercice 47 un autre exemple de différentiabilité en dimension infinie.

Exercice 28. ***Interprétation du gradient.*** **Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note C_λ la *courbe de niveau* d'équation $f(x) = \lambda$. Soient $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, et γ un arc paramétré de classe C^1 avec $\gamma(0) = a$, $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t.**

1. Montrer que le vecteur $\operatorname{grad} f(a)$ donne la direction « de plus grande pente » de f en a : on observera, selon le choix de γ, les variations de la fonction $f \circ \gamma$ au voisinage de $t = 0$.

2. On suppose $\gamma'(0)$ colinéaire à $\operatorname{grad} f(a)$ et de même sens. Montrer que, pour λ suffisamment proche de $\alpha = f(a)$, il existe un unique t voisin de 0 tel que le point $\gamma(t) = x$ appartienne à C_λ. Donner un équivalent de $\|x - a\|$ lorsque λ tend vers α.

Commentaire. Cet exercice (élémentaire) fait le lien entre le gradient des mathématiciens et celui des géographes ou des météorologistes : sa *direction*, orthogonale aux courbes de niveau, est celle dans laquelle la fonction (altitude, pression,... etc.) augmente le plus vite lorsqu'on voyage à vitesse donnée (prise égale à 1 ici), et sa *norme* est inversement proportionnelle à l'écartement des courbes de niveau. Ces résultats se généralisent immédiatement à $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\mathbb{R}^2$. On reviendra au chapitre 7 sur les courbes de niveau, notamment en cas d'annulation du gradient.

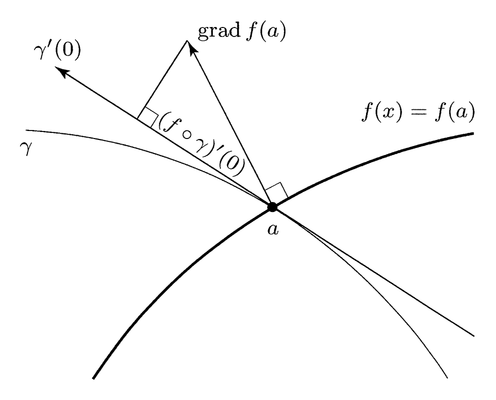


Fig. 44. Variation de f le long de l'arc γ.

Solution. 1. La fonction composée $t \mapsto f(\gamma(t))$ a pour dérivée à l'origine

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{D}f(a)\gamma'(0) = \operatorname{grad} f(a) \cdot \gamma'(0)$$

(projection orthogonale du gradient sur la tangente en a à l'arc γ) et, $\gamma'(0)$ étant un vecteur unitaire quelconque, ce produit scalaire prend toutes les valeurs de $-\|\text{grad}\, f(a)\|$ à $\|\text{grad}\, f(a)\|$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La valeur maximale $\|\text{grad}\, f(a)\|$ est obtenue si et seulement si $\gamma'(0)$ est colinéaire au gradient et de même sens ; c'est alors que la fonction $f \circ \gamma$ croît le plus vite au voisinage de 0.

La dérivée $(f \circ \gamma)'(0)$ s'annule si et seulement si l'arc γ est orthogonal en a à $\text{grad}\, f(a)$, c'est-à-dire tangent en a à la courbe de niveau de f passant par ce point.

2. Soit $\varphi = f \circ \gamma$. Ici l'arc γ a la direction de plus grande pente, i.e. $\varphi'(0) = \|\text{grad}\, f(a)\|$. Par continuité il existe donc un intervalle ouvert I autour de 0 sur lequel $\varphi'(t) > 0$, et φ est une bijection strictement croissante de I sur un intervalle ouvert J contenant $\varphi(0) = f(a) = \alpha$. Pour $\lambda \in$ J, l'équation $\varphi(t) = f(\gamma(t)) = \lambda$ a sur I une solution unique $t = \varphi^{-1}(\lambda)$. On sait (et on reverra au Chapitre 5) que la fonction réciproque φ^{-1} est dérivable sur J, avec $(\varphi^{-1})'(\lambda) = 1/\varphi'(t)$. Alors le point $x(\lambda) = \gamma(\varphi^{-1}(\lambda))$ appartient à C_λ, et $x'(\alpha) = (1/\varphi'(0))\, \gamma'(0)$ par dérivation de fonction composée.

Par suite

$$x(\lambda) - x(\alpha) = \frac{\gamma'(0)}{\varphi'(0)}(\lambda - \alpha) + o(\lambda - \alpha)$$

lorsque λ tend vers α et en particulier

$$\|x(\lambda) - a\| \sim \frac{|\lambda - \alpha|}{\|\text{grad}\, f(a)\|} \ ,$$

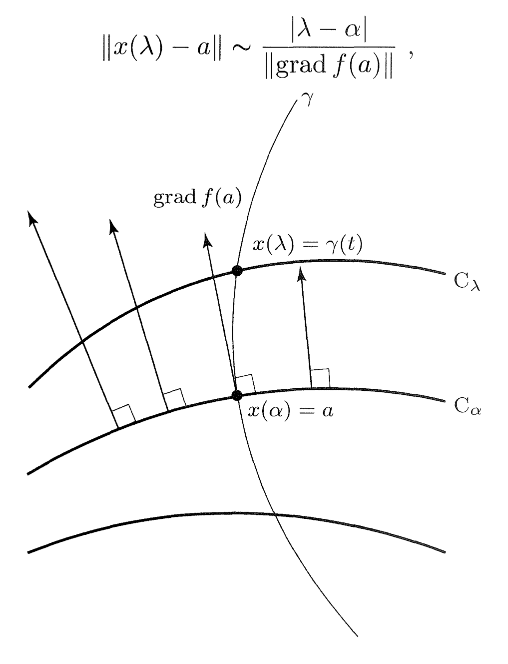


Fig. 45. Gradient et courbes de niveau.

puisque $\|\gamma'(0)\| = 1$. On peut donc dire (de manière imprécise) que l'écartement des courbes de niveau C_α et C_λ est, au voisinage de a, inversement proportionnel à $\|\text{grad}\, f(a)\|$.

Exercice 29. ***Interprétation du déterminant jacobien.* L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une norme quelconque, on note B_r la boule $\|x\| \leqslant r$. Soit f un difféomorphisme de classe C^1 entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, avec $f(0) = 0$ pour simplifier les notations.**

1. Pour $\varepsilon > 0$ donné ($0 < \varepsilon < 1$) montrer qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \in B_R$,

$$\left\|Df(0)^{-1}(f(x)) - x\right\| \leqslant \varepsilon \|x\| \ .$$

2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que, pour $0 \leqslant r \leqslant R'$,

$$(1-\varepsilon)Df(0)(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\varepsilon)Df(0)(B_r) \ .$$

[On pourra utiliser 1 et, pour la première inclusion, observer que $f(B_R)$ est un voisinage de 0.]

3. Soit m la mesure de Lebesgue (volume) de $\mathbb{R}^n$. On admettra l'égalité $m(A(X)) = |\det A| \cdot m(X)$ si X est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et A une application linéaire (matrice $n \times n$). Montrer que

$$|\det Df(0)| = \lim_{r \to 0} \frac{m(f(B_r))}{m(B_r)} \ .$$

Commentaire. En admettant le théorème d'inversion locale (voir Chapitre 5, et notamment l'Exercice 71), on déduira facilement le résultat suivant : si f est de classe C^1 au voisinage de a et si $Df(a)$ est inversible, alors

$$|\det Df(a)| = \lim_{r \to 0} \frac{m(f(B_r))}{m(B_r)} \ ,$$

où B_r est la boule de centre a et de rayon r : en effet f sera un difféomorphisme entre voisinages de a et de $f(a)$, et il suffira d'appliquer le présent résultat à la fonction $g(x) = f(x+a) - f(a)$, pour laquelle $g(0) = 0$.

Cette égalité justifie le calcul du jacobien « à la physicienne » comme quotient de « volumes infiniment petits », méthode remarquablement efficace, ne serait-ce que pour expliciter le volume en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. Elle explique l'apparition du déterminant jacobien dans la formule du *changement de variables dans les intégrales multiples* :

$$\int_Y \varphi(y)dy = \int_X \varphi(f(x))|\det Df(x)|dx \ ,$$

où f est un difféomorphisme de X sur Y et φ est intégrable sur Y (voir aussi l'Exercice 68). Sur la théorie de la mesure (et du volume) voir Faraut [22] ou Rudin [35] chapitres 1, 2 et 7.

Solution. 1. Notons $\mathrm{A} = \mathrm{D}f(0)$ pour abréger ; f étant un difféomorphisme, A est une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même. Soit $\mathrm{C} > 0$; la différentiabilité de f à l'origine assure l'existence de $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{B_R} \subset \mathrm{U}$ et

$$\|f(x) - \mathrm{A}x\| \leqslant \mathrm{C}\varepsilon \|x\|$$

pour $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$. On en déduit

$$\left\|\mathrm{A}^{-1}(f(x) - \mathrm{A}x)\right\| \leqslant \left\|\mathrm{A}^{-1}\right\| \mathrm{C}\varepsilon \|x\|$$

et il suffit de choisir $\mathrm{C} = \left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|^{-1}$ pour avoir l'inégalité voulue.

2. Le résultat à établir est très intuitif (cf. la Grande Idée du calcul différentiel), mais sa preuve nécessite un peu de soin.

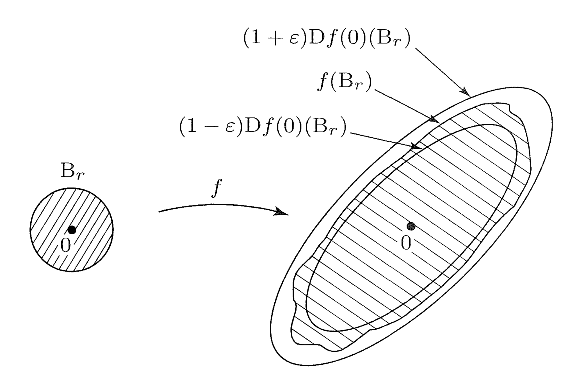


Fig. 46. Image d'une boule par un difféomorphisme.

On a d'abord (d'après 1)

$$\left\|\mathrm{A}^{-1}(f(x))\right\| \leqslant \|x\| + \varepsilon \|x\| \leqslant (1+\varepsilon)r \text{ si } \|x\| \leqslant r \leqslant \mathrm{R}\ ,$$

d'où $\mathrm{A}^{-1}(f(\mathrm{B}_r)) \subset (1+\varepsilon)\mathrm{B}_r$ et

$$f(\mathrm{B}_r) \subset (1+\varepsilon)\mathrm{A}(\mathrm{B}_r)\ .$$

D'autre part, f étant un homéomorphisme de U sur V, $f(\mathrm{B_R})$ est un voisinage de 0. L'application linéaire $y \mapsto (1-\varepsilon)\mathrm{A}y$ est continue à l'origine, il existe donc $\mathrm{R}' \leqslant \mathrm{R}$ tel que $\|y\| \leqslant \mathrm{R}'$ entraîne $(1-\varepsilon)\mathrm{A}y \in f(\mathrm{B_R})$, d'où un point x tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{R}$ et $(1-\varepsilon)\mathrm{A}y = f(x)$. Alors

$$\|x\| - (1-\varepsilon)\|y\| \leqslant \|(1-\varepsilon)y - x\| = \left\|\mathrm{A}^{-1}(f(x)) - x\right\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

d'après 1, d'où $\|x\| \leqslant \|y\|$. Pour $\|y\| \leqslant r \leqslant \mathrm{R}'$ on a donc $\|x\| \leqslant r$, autrement dit

$$(1-\varepsilon)\mathrm{A}(\mathrm{B}_r) \subset f(\mathrm{B}_r) ,$$

ce qui achève la démonstration.

3. De 2 on déduit l'inégalité entre les mesures

$$m((1-\varepsilon)\mathrm{A}(\mathrm{B}_r)) \leqslant m(f(\mathrm{B}_r)) \leqslant m((1+\varepsilon)\mathrm{A}(\mathrm{B}_r)) .$$

Or, pour $\lambda > 0$ on a

$$m(\lambda\mathrm{A}(\mathrm{B}_r)) = |\det(\lambda\mathrm{A})| \cdot m(\mathrm{B}_r) = \lambda^n |\det \mathrm{A}| \cdot m(\mathrm{B}_r) .$$

Ainsi pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe R' tel que, pour $0 < r \leqslant \mathrm{R}'$,

$$(1-\varepsilon)^n |\det \mathrm{A}| \leqslant \frac{m(f(\mathrm{B}_r))}{m(\mathrm{B}_r)} \leqslant (1+\varepsilon)^n |\det \mathrm{A}| ,$$

d'où $|\det \mathrm{A}| = \lim_{r\to 0} (m(f(\mathrm{B}_r))/m(\mathrm{B}_r))$.

Exercice 30. ***Interprétation de la divergence.* Soit $u : x \mapsto u(x)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même (*champ de vecteurs*). On appelle *divergence* de u en x le nombre**

$$\operatorname{div} u(x) = \operatorname{tr} \mathrm{D}u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) .$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit $y = \varphi_t(x)$ une solution du système différentiel associé à u :

$$y' = u(y) \ , \ y(0) = x .$$

On note m la mesure de Lebesgue (volume) sur $\mathbb{R}^n$ (voir Exercice 29).

1. Pour un champ linéaire $u(x) = \mathrm{A}x$ (avec A matrice réelle $n \times n$ constante), calculer $\operatorname{div} u(x)$, $\varphi_t(x)$ et $m(\varphi_t(\mathrm{X}))$ où X est un compact de $\mathbb{R}^n$.

***Exemples.* Dessiner $\varphi_t(\mathrm{X})$ pour $n = 2$, $\mathrm{X} = [1,2] \times [1,2]$ et**

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \text{ou} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. On ne suppose plus u linéaire. Montrer que

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial}{\partial t} \det \mathrm{D}\varphi_t(x) \Big|_{t=0} .$$

[On utilisera l'Exercice 26 en admettant l'existence des dérivées utiles de φ_t et la possibilité de les permuter entre elles.]

Commentaire. Le but de l'exercice est de découvrir le sens intuitif du mot « divergence » (inspiré par la mécanique des fluides) : si $\operatorname{div} u > 0$, le « flot » φ_t défini par le champ de vecteurs u « diverge », les trajectoires des points x s'écartent les unes des autres et le volume d'un élément de fluide croît avec le temps t ; il décroît si $\operatorname{div} u < 0$. Cela se voit très facilement pour un champ linéaire (question 1). Le cas général, plus délicat, nécessite quelques connaissances sur les systèmes différentiels ; l'idée est de relier $\operatorname{div} u$ au déterminant jacobien de φ_t (question 2), lui-même lié au calcul des volumes (voir Exercice 29 et complément ci-dessous). Voir aussi à la fin de l'Exercice 105 un lien entre divergence et courbure.

Solution. 1. On a ici $u = \mathrm{A}$, application linéaire, et la différentielle en un point x quelconque est évidemment $\mathrm{D}u(x) = \mathrm{A}$, d'où $\operatorname{div} u(x) = \operatorname{tr} \mathrm{A}$, constante.

D'autre part le système différentiel associé $y' = \mathrm{A}y$, $y(0) = x$ se résout par l'exponentielle de matrice : $y = e^{t\mathrm{A}}x = \varphi_t(x)$. Comme φ_t est ici une application linéaire on a, d'après les propriétés de la mesure de Lebesgue,

$$m(\varphi_t(\mathrm{X})) = m(e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}) = |\det e^{t\mathrm{A}}| \cdot m(\mathrm{X}) = e^{t \operatorname{tr} \mathrm{A}} m(\mathrm{X}) \ ,$$

où X est un compact de $\mathbb{R}^n$. Le volume transporté par le flot φ_t est donc croissant, constant ou décroissant avec t selon le signe de $\operatorname{tr} \mathrm{A} = \operatorname{div} u$.

Exemples. La solution du système différentiel est

$$\begin{cases} y_1 = e^t x_1 \\ y_2 = e^{2t} x_2 \end{cases}, \text{ resp.} \begin{cases} y_1 = e^t x_1 \\ y_2 = e^{-t} x_2 \end{cases}, \text{ resp.} \begin{cases} y_1 = x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ y_2 = x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{cases},$$

d'où les dessins dans le plan (y_1, y_2) ; les trajectoires sont des paraboles, resp. hyperboles, resp. cercles.

La mesure m est ici la surface, et on a $m(\varphi_t(\mathrm{X})) = e^{3t}$, resp. 1, resp. 1, croissant dans le premier cas ($\operatorname{div} u = 3$), constant dans les deux autres ($\operatorname{div} u = 0$). Dans le deuxième cas le flot φ_t conserve les surfaces, dans le troisième il conserve même les longueurs (c'est la rotation d'angle t autour de 0).

2. D'après Cartan [8] p. 148, il existe un intervalle ouvert J contenant 0 et un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tels que l'application $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ soit de classe C^1 sur $\mathrm{J} \times \mathrm{U}$ et que $\mathrm{D}\varphi_t(x)$ soit dérivable en t sur J, avec

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}\varphi_t(x) = \mathrm{D}\left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\right)(x) = \mathrm{D}(u(\varphi_t(x)))$$

(où D représente la différentielle par rapport à x). Comme $\varphi_0(x) = x$ on a donc

$$\mathrm{D}\varphi_0(x) = \mathrm{I} \ , \ \left.\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}\varphi_t(x)\right|_{t=0} = \mathrm{D}u(x)$$

d'où, pour $x \in \mathrm{U}$ fixé et $t \to 0$,

$$\mathrm{D}\varphi_t(x) = \mathrm{I} + t\mathrm{D}u(x) + o(t) \ .$$

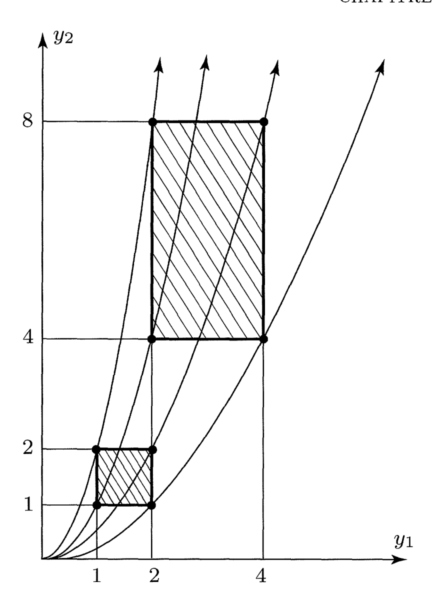


Fig. 47. $\operatorname{div} u = 3$, paraboles.

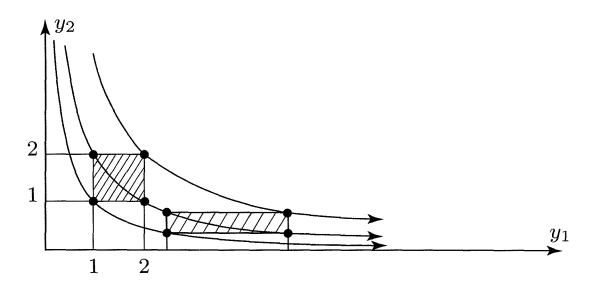


Fig. 48. $\operatorname{div} u = 0$, hyperboles.

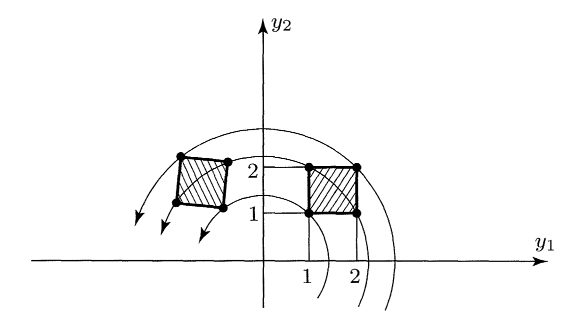


Fig. 49. $\operatorname{div} u = 0$, cercles.

On en déduit, en utilisant la différentielle du déterminant en I (Exercice 26, question 1),

$$\det \mathrm{D}\varphi_t(x) = 1 + t \operatorname{tr} \mathrm{D}u(x) + o(t) = 1 + t \operatorname{div} u(x) + o(t) \ ,$$

d'où, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \mathrm{D}\varphi_t(x) \Big|_{t=0} = \operatorname{div} u(x) \ .$$

Complément. Les résultats du cas linéaire se généralisent par les calculs suivants (où on ne soulèvera pas de difficulté théorique – on pourrait les justifier pour t voisin de 0 sur un ouvert U suffisamment petit, en supposant le champ u deux fois continûment différentiable). Si X est un compact contenu dans U, le volume du compact $\varphi_t(\mathrm{X})$ est

$$m(\varphi_t(\mathrm{X})) = \int_{\varphi_t(\mathrm{X})} dy = \int_{\mathrm{X}} |\det \mathrm{D}\varphi_t(x)| dx \ ,$$

d'après la formule du changement de variables dans les intégrales (rappelée à l'Exercice 29). La valeur absolue est inutile car $\det \mathrm{D}\varphi_t(x) > 0$ pour t petit (par continuité à partir de $t = 0$) d'où, en dérivant en t sous l'intégrale,

$$\frac{d}{dt} m(\varphi_t(\mathrm{X})) \Big|_{t=0} = \int_{\mathrm{X}} \frac{\partial}{\partial t} \det \mathrm{D}\varphi_t(x) \Big|_{t=0} dx = \int_{\mathrm{X}} \operatorname{div} u(x) \, dx \ .$$

En changeant l'origine du temps on obtiendrait plus généralement

$$\frac{d}{dt} m(\varphi_t(\mathrm{X})) = \int_{\varphi_t(\mathrm{X})} \operatorname{div} u(x) \, dx \ .$$

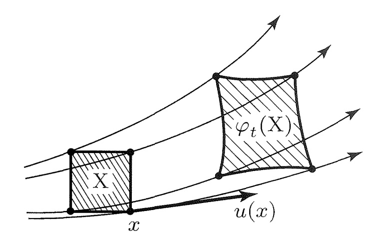


Fig. 50. $\operatorname{div} u > 0$ (flot divergent).

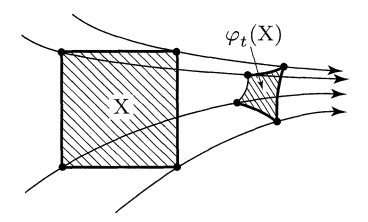


Fig. 51. $\operatorname{div} u < 0$ (flot convergent).

On voit donc que, pour t voisin de 0, le volume de $\varphi_t(\mathrm{X})$ croît avec t si $\operatorname{div} u > 0$ sur U (« flot divergent »), décroît si $\operatorname{div} u < 0$ (« flot convergent »), et reste constant si $\operatorname{div} u$ est identiquement nulle (« le flot conserve les volumes »).

Exercice 31. ***Interprétation du rotationnel.*** **Soit $u : x \mapsto u(x)$ une application différentiable de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (*champ de vecteurs*). On définit $\operatorname{rot} u(x)$ comme l'unique vecteur tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^3$,**

$$\mathrm{D}u(x)y - {}^t(\mathrm{D}u(x))y = \operatorname{rot} u(x) \wedge y$$

où ^{t} désigne la transposition des matrices.

1. Soit ω un vecteur constant. Calculer $\operatorname{rot} u$ lorsque $u(x) = \omega \wedge x$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une forme quadratique q telle que, lorsque x tend vers x_0,

$$u(x) = u(x_0) + \frac{1}{2} \operatorname{grad} q(x - x_0) + \frac{1}{2} \operatorname{rot} u(x_0) \wedge (x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Interpréter géométriquement ces termes en dimension deux.

Solution. Comme $\mathrm{D}u(x) - {}^t\mathrm{D}u(x)$ est une matrice antisymétrique 3×3 elle correspond à un produit vectoriel, et $\operatorname{rot} u(x)$ est bien défini. Si u_1, u_2, u_3 sont les composantes de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, un calcul immédiat montre que la i-ième composante du rotationnel est $\partial_j u_k - \partial_k u_j$, où (i, j, k) est une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$, et $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

1. Ici u dépend linéairement de x d'où $\mathrm{D}u(x)y = u(y) = \omega \wedge y$. Notons $(\,.\,)$ le produit scalaire usuel ; pour $z \in \mathbb{R}^3$ on a donc

$$(\mathrm{D}u(x)y) \cdot z = (\omega \wedge y) \cdot z = \omega \cdot (y \wedge z) = -y \cdot (\mathrm{D}u(x)z)$$

et $\mathrm{D}u(x)$ elle-même est antisymétrique. Par suite $\operatorname{rot} u(x) \wedge y = 2\mathrm{D}u(x)y$, et $\operatorname{rot} u(x) = 2\omega$ (ce qui s'obtient aussi par un calcul élémentaire de dérivées partielles).

Ce champ u est le champ des vitesses d'un mouvement de rotation uniforme autour de 0 (Exercice 25), d'où le nom de rotationnel.

2. On peut prendre $x_0 = 0$ pour alléger les notations. Le rotationnel correspond à la partie antisymétrique de la différentielle ; l'égalité demandée s'obtiendra donc en écrivant

$$\mathrm{D}u(0) = \mathrm{S} + \mathrm{A}\ ,\ \text{où } \mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}u(0) + {}^t\mathrm{D}u(0))\ ,\ \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}u(0) - {}^t\mathrm{D}u(0))\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x) - u(0) &= \mathrm{D}u(0)x + o(\|x\|) = \mathrm{S}x + \mathrm{A}x + o(\|x\|) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, q(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\, u(0) \wedge x + o(\|x\|) \end{aligned}$$

où $q(x) = \mathrm{S}x{\cdot}x$ est la forme quadratique associée à la matrice symétrique S.

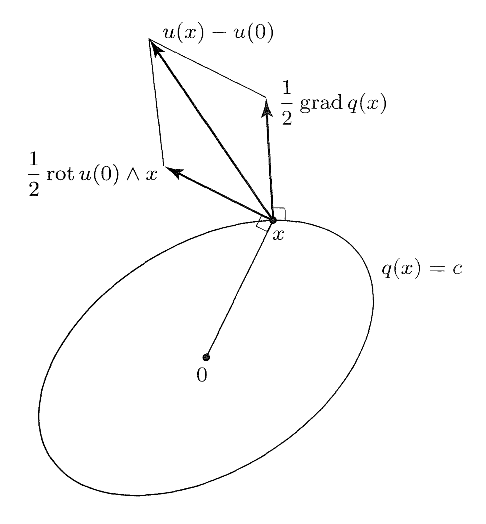


Fig. 52. Décomposition (approchée) du champ $u(x)$ au voisinage de l'origine.

Un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme champ sur $\mathbb{R}^3$ avec $u_3 = 0$, $u_1$et u_2 indépendants de x_3. Alors q est une forme quadratique en (x_1, x_2) et $\mathrm{rot}\, u$ est orthogonal au plan $\mathbb{R}^2$. Au $o(\|x\|)$ près (non représenté sur la figure), l'accroissement $u(x) - u(0)$ est donc somme de deux composantes, l'une normale à la courbe de niveau de q passant par x (une conique), l'autre orthogonale à x.

On étudiera à l'Exercice 99 les cas où $\mathrm{D}u$ est symétrique, resp. antisymétrique, en tout point.

Exercice 32. ***Intégrales de surface.*** **Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit S une surface paramétrée définie comme l'image d'une application**

$$\boldsymbol{\varphi : (u, v) \mapsto (x, y, z) = \varphi(u, v)\ ,}$$

de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. On suppose la différentielle $D\varphi(u, v)$ de rang deux en tout point de Ω.

1. Établir l'égalité

$$\det({}^t D\varphi \cdot D\varphi) = \left\|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\right\|^2 \ .$$

2. À une fonction $f : S \to \mathbb{C}$ on associe l'intégrale double

$$\iint_\Omega f(\varphi(u, v)) \left\|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\right\| dudv \ ,$$

où la fonction à intégrer est supposée Lebesgue-intégrable sur Ω. Déduire de 1 que cette intégrale est invariante par tout changement de paramètres $(u, v) = \alpha(s, t)$, où $\alpha : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ est un difféomorphisme de classe C^1 entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

[On admettra la formule de changement de variables dans une intégrale multiple, cf. Exercice 29 ou 68.]

On note $\iint_S f\, d\sigma$ cette *intégrale de surface*. Expliciter la *mesure superficielle* $d\sigma$ lorsque S est la sphère unité, paramétrée par longitude et latitude.

Commentaire. Si l'on admet la formule de changement de variables dans les intégrales multiples, la résolution de l'exercice se réduit à quelques calculs sur des matrices jacobiennes, et à des différentielles d'applications composées – d'où sa place dans ce chapitre. On l'abordera toutefois avec plus de profit si l'on a déjà quelques notions sur les surfaces définies paramétriquement (Exemple 6 en début de chapitre, Théorème[11] 5.11, Exercice 112).

Les intégrales de surface sont d'usage fréquent en géométrie ou en physique, ne serait-ce que pour définir et calculer l'aire de S, en prenant $f = 1$ dans l'intégrale. On distinguera la *mesure* superficielle $d\sigma$ introduite ici (sans référence à une orientation) de la forme volume sur une sous-variété orientée de l'espace euclidien, considérée dans de nombreux ouvrages. Cette dernière est une *forme différentielle*, utile notamment en liaison avec le théorème de Stokes ; sur ces questions, qui ne seront pas abordées ici, voir Lafontaine [28] chapitre 6, ou Berger et Gostiaux [4] chapitre 6.

La mesure $d\sigma$, définie ici grâce à un choix de paramètres, est *a posteriori* indépendante de ce choix. On pourrait aussi la définir intrinsèquement : l'espace tangent à S en chaque point admet une structure euclidienne (induite par celle de $\mathbb{R}^3$), d'où une mesure canonique, ce qui donne $d\sigma$ (voir Berger et Gostiaux [4] §6.6).

11. Ce théorème comporte une certaine condition d'homéomorphisme, oubliée ici car inutile pour les calculs ; la « surface » considérée ici pourrait donc ne pas être une vraie sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Voir aussi le complément ci-dessous pour une généralisation (facile) aux hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$, et une application à la formule d'intégration en coordonnées sphériques.

Solution. 1. On a

$$ {}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\varphi'_u\|^2 & \varphi'_u \cdot \varphi'_v \\ \varphi'_v \cdot \varphi'_u & \|\varphi'_v\|^2 \end{pmatrix} , $$

dont le déterminant (déterminant de Gram des vecteurs φ'_u et φ'_v) s'écrit

$$ \det\left({}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi\right) = \|\varphi'_u\|^2 \|\varphi'_v\|^2 - (\varphi'_u{\cdot}\varphi'_v)^2 = \|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\|^2 , $$

d'après l'identité de Lagrange.

Remarques. (i) Cette expression ne dépend pas du choix d'une orientation sur $\mathbb{R}^3$ (nécessaire pour définir le produit vectoriel) : si on modifie cette orientation, le vecteur $\varphi'_u \wedge \varphi'_v$ est changé en son opposé et la norme est inchangée.
(ii) La matrice ${}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi$ est celle de la forme quadratique induite sur le plan tangent à S par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, relativement à la base φ'_u, φ'_v de ce plan, puisque

$$ \|\lambda\varphi'_u + \mu\varphi'_v\|^2 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \left({}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi\right) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} . $$

C'est la *première forme quadratique fondamentale* de la surface (cf. Exercice 112). Quant à $\varphi'_u \wedge \varphi'_v$, c'est bien sûr un vecteur (non nul) normal à S au point considéré.

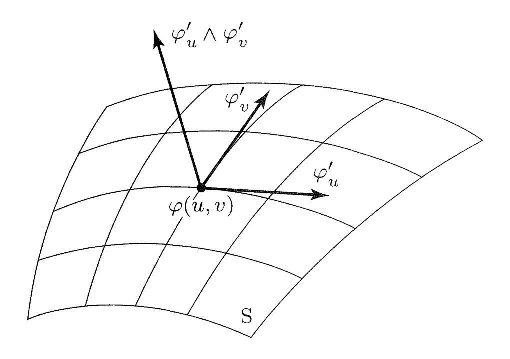


Fig. 53. La surface paramétrée S.

2. En notant $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha : \widetilde{\Omega} \to \mathrm{S}$ le nouveau paramétrage de la surface par (s, t), on a $\mathrm{D}\widetilde{\varphi}(s, t) = \mathrm{D}\varphi(u, v) \cdot \mathrm{D}\alpha(s, t)$, d'où

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\varphi}'_s \wedge \widetilde{\varphi}'_t\|^2 &= \det({}^t\mathrm{D}\widetilde{\varphi} \cdot \mathrm{D}\widetilde{\varphi}) \\ &= \det({}^t\mathrm{D}\alpha \cdot ({}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi) \cdot \mathrm{D}\alpha) \\ &= \det({}^t\mathrm{D}\varphi \cdot \mathrm{D}\varphi) \cdot (\det \mathrm{D}\alpha)^2 \ .\end{aligned}$$

Par suite

$$\|\widetilde{\varphi}'_s \wedge \widetilde{\varphi}'_t\| = \|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\| \cdot |\det \mathrm{D}\alpha| \ .$$

La formule de changement de variables dans une intégrale double donne alors

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(\varphi(u,v))\, \|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\|\, dudv &= \iint_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\varphi}(s,t))\, \|\varphi'_u \wedge \varphi'_v\| \cdot |\det \mathrm{D}\alpha|\, dsdt \\ &= \iint_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\varphi}(s,t))\, \|\widetilde{\varphi}'_s \wedge \widetilde{\varphi}'_t\|\, dsdt \ ,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

Exemple. En notant $u \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ la latitude et $v \in \,]-\pi, \pi[$ la longitude, la sphère S est paramétrée (à l'exception du demi-cercle de « changement de date » $x \leqslant 0$, $y = 0$) par

$$x = \cos u \cos v \ , \ y = \cos u \sin v \ , \ z = \sin u \ .$$

On a ici

$$\begin{aligned}\varphi'_u &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\ \varphi'_v &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \ ,\end{aligned}$$

d'où $\varphi'_u \wedge \varphi'_v = (-\cos u)\varphi(u,v)$ et $d\sigma = \cos u\, dudv$.

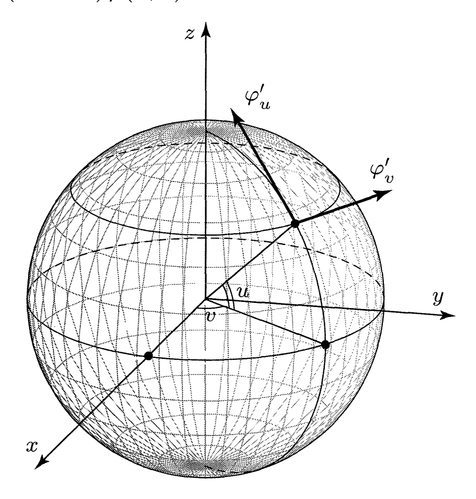


Fig. 54. Latitude u et longitude v.

Compléments. (*i*) *Généralisation aux hypersurfaces.* Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on se donne une surface paramétrée S, définie comme image d'une application $u \mapsto x = \varphi(u)$, de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n-1}$. On suppose $D\varphi(u)$ de rang $n-1$ en tout point de Ω, de sorte que les dérivées partielles $\varphi_i'(u) = \partial\varphi/\partial u_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, forment une base de l'espace tangent à S au point $x = \varphi(u)$.

Pour $X \in \mathbb{R}^{n-1}$ on a

$$\|D\varphi(u)X\|^2 = {}^tX({}^tD\varphi(u) \cdot D\varphi(u))X \,.$$

La matrice ${}^tD\varphi \cdot D\varphi$, d'éléments $(\varphi_i' \cdot \varphi_j')$, est donc définie positive, et on vérifie comme en 2 que l'*intégrale d'hypersurface*

$$\int_\Omega f(\varphi(u))\sqrt{\det({}^tD\varphi(u) \cdot D\varphi(u))}\, du_1 \ldots du_{n-1} = \int_S f\, d\sigma$$

est invariante par tout changement de paramètre $u = \alpha(t)$, difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$.

On peut donner à cette intégrale une forme plus géométrique, en généralisant l'égalité de 1. On peut en effet définir le *produit vectoriel* de $n-1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^n$, comme l'unique vecteur $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) \cdot v = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)\,;$$

le déterminant est celui de la matrice des composantes par rapport à une base orthonormale directe quelconque. Ce produit vectoriel est clairement orthogonal à tous les v_i. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$ telle que e_n soit orthogonal à tous les v_i, on a donc $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = \lambda e_n$, d'où

$$\lambda = (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) \cdot e_n = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n)\,.$$

Par suite λ^2 est le déterminant $n \times n$ des produits scalaires $v_i \cdot v_j$, $v_i \cdot e_n = 0$ et $e_n \cdot e_n = 1$; par développement selon la dernière ligne, il vient

$$\|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\|^2 = \lambda^2 = \det(v_i \cdot v_j)$$

(déterminant $(n-1) \times (n-1)$). En particulier

$$\|\varphi_1' \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}'\| = \sqrt{\det({}^tD\varphi \cdot D\varphi)}\,.$$

(*ii*) *Formule d'intégration en coordonnées sphériques.* Elle s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(r\xi)\, d\sigma(\xi)\right) r^{n-1}\, dr\ ,$$

où f est une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue dx de $\mathbb{R}^n$, et ξ parcourt la sphère unité S^{n-1}, de mesure superficielle $d\sigma$.

Il est facile d'en esquisser une preuve à l'aide des outils précédents (voir aussi Faraut [22] p. 64). Soit en effet $u \mapsto \xi = \varphi(u)$ (où u parcourt un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n-1}$) une représentation paramétrique de S^{n-1}, telle que l'application

$$\mathrm{F} : (r, u) \mapsto x = r\xi = r\varphi(u)$$

soit un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, \infty[\times\Omega$ sur V, ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de mesure nulle ; voir ci-dessous entre [...] quelques détails sur ce point. La matrice jacobienne de F a pour vecteurs colonnes $\mathrm{F}'_r = \varphi(u)$ et les $r\varphi'_i(u)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Par suite

$$\begin{aligned} |\det \mathrm{DF}(r,u)| &= r^{n-1}|\det(\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n-1}, \varphi)| \\ &= r^{n-1}\left\|\varphi'_1 \wedge \ldots \wedge \varphi'_{n-1}\right\| \end{aligned}$$

d'après les calculs de (i), avec le vecteur unitaire $e_n = \varphi(u)$. Le complémentaire de V étant de mesure nulle, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathrm{V}} f(x)\,dx &= \int_0^\infty \int_\Omega f(r\varphi(u))|\det \mathrm{DF}(r,u)|\,drdu \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathrm{S}^{n-1}} f(r\xi)r^{n-1} dr d\sigma(\xi)\ , \end{aligned}$$

puisque $d\sigma = \left\|\varphi'_1 \wedge \ldots \wedge \varphi'_{n-1}\right\| du$.

[Le paramétrage souhaité de la sphère peut s'obtenir à l'aide des coordonnées géographiques généralisées (cf. 2 ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sin u_1 \\ \xi_2 &= \cos u_1 \sin u_2 \\ \xi_3 &= \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3 \\ &\ \ldots \\ \xi_{n-1} &= \cos u_1 \cdots \cos u_{n-2} \sin u_{n-1} \\ \xi_n &= \cos u_1 \cdots \cos u_{n-2} \cos u_{n-1} \end{aligned}$$

avec $u_i \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$ et $u_{n-1} \in\ ]-\pi, \pi[$; le complémentaire de V sera alors contenu dans l'hyperplan $x_{n-1} = 0$ de $\mathbb{R}^n$. On pourrait aussi prendre pour φ une projection stéréographique, bijection de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur la sphère privée d'un point ; le complémentaire de V serait alors une demi-droite fermée issue de l'origine.]

Chapitre 3
Inégalité de la moyenne

1. Objectifs

L'idée de base du calcul différentiel est, comme on l'a vu, de remplacer l'étude d'applications « quelconques » par celle, beaucoup plus simple, d'applications linéaires. Encore faut-il savoir ensuite remonter une information sur Df en l'information correspondante sur l'application f de départ. La définition de la différentielle ne permet cela que *localement* au voisinage du point où elle est calculée. Pour avoir l'outil *global* correspondant, on cherche à étendre aux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ la classique « *égalité des accroissements finis* »[1] :

$$\text{il existe } c \text{ entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \ ,$$

fondamentale dans la théorie des fonctions réelles dérivables d'une variable réelle. Mais cet énoncé serait déjà faux, tel quel, pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: dans le mouvement circulaire $f(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$ on a $f(2\pi) - f(0) = 0$, bien que la vitesse $f'(t) = (-\sin t, \cos t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais ! La difficulté se comprend aisément : on peut appliquer l'égalité des accroissements finis à chacune des deux composantes de f, mais les deux points c obtenus n'ont aucune raison de coïncider.

L'égalité des accroissements finis va se généraliser sous la forme, *a priori* plus faible, d'une inégalité – échec moins grave qu'il n'y paraît puisque, le c ci-dessus étant inconnu, on cherchait le plus souvent à s'en débarrasser en majorant $|f'(c)|$ par M, d'où une « *inégalité de la moyenne* »

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}|b-a| \ .$$

2. Panorama du cours

On trouvera dans la littérature de nombreuses versions de l'inégalité de la moyenne, plus ou moins générales, plus ou moins fines. La plus souvent

1. Ainsi appelée pour marquer son caractère global, par opposition au cas d'un accroissement $(b-a)$ « infiniment petit », où l'égalité se réduirait à la définition (purement locale) de la dérivée :

$$\lim_{b\to a} (f(b) - f(a))/(b-a) = f'(a) \ .$$

utilisée est sans doute la suivante, qui intervient dans la preuve de tous les principaux résultats du calcul différentiel.

Théorème 3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces normés (sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*)* , U *un ouvert de* E *et* f : U $\to$ F *une application différentiable en tout point de* U*. Soient* $[a,b]$ *un segment de droite tout entier contenu dans* U*, et* k *une constante positive. On suppose que, pour tout* $x \in [a,b]$*, la norme d'application linéaire de la différentielle* $\mathrm{D}f(x)$ *vérifie l'inégalité*

$$\|\mathrm{D}f(x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \leqslant k \ .$$

Alors on a l'inégalité de la moyenne

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant k\,\|b-a\|_{\mathrm{E}} \ .$$

Le segment $[a,b]$ est par définition l'ensemble des points $x = (1-t)a + tb$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'hypothèse sur la différentielle équivaut à $\|\mathrm{D}f(x)h\|_{\mathrm{F}} \leqslant k\,\|h\|_{\mathrm{E}}$ pour tout $h \in$ E et tout $x \in [a,b]$.

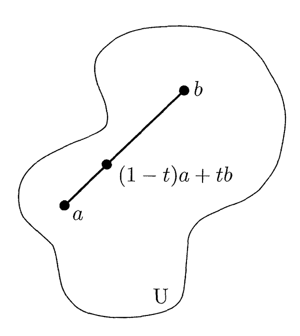


Fig. 55.

Pour E $= \mathbb{R}$ par exemple, f est une fonction vectorielle d'une variable réelle, $\mathrm{D}f(x)$ s'identifie au vecteur dérivé $f'(x) \in$ F et (en interprétant x comme la variable temps) l'inégalité de la moyenne est familière à tous les voyageurs : si la norme de mon vecteur vitesse est toujours inférieure à 130 je ne risque pas, après une heure de trajet, d'être à plus de 130 km (à vol d'oiseau) de mon point de départ.

Heuristique. L'énoncé du théorème concerne, pour l'essentiel, la restriction de f au segment $[a,b]$, c'est-à-dire la fonction $g(t) = f((1-t)a+tb) - f(a)$. On comprend donc qu'il suffise d'étudier le cas où l'espace de départ est E $= \mathbb{R}$, et d'expliquer pourquoi les hypothèses $g(0) = 0$ et $\|g'(t)\| \leqslant \mathrm{M}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ entraînent $\|g(t)\| \leqslant \mathrm{M}t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Or l'inégalité souhaitée *se propage de* t *à* $t+h$, pour h positif petit : si on a $\|g(t)\| \leqslant \mathrm{M}t$ on en déduit

$$\begin{aligned}\|g(t+h)\| = \|g(t)+g'(t)h+\cdots\| &\leqslant \|g(t)\| + \|g'(t)\|\,h+\cdots\\ &\leqslant \mathrm{M}t+\mathrm{M}h+\cdots = \mathrm{M}(t+h)+\cdots\end{aligned}$$

où les $\cdots$ sont un petit reste. L'inégalité est donc encore valable (à un $o(h)$ près) au point $t+h$. Comme elle est évidente pour $t=0$, on en déduit « de proche en proche » qu'elle est vraie pour $t=1$.

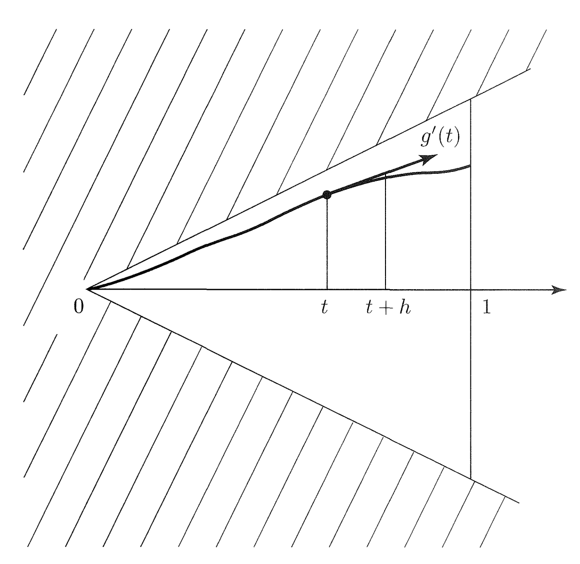


Fig. 56. Propagation de l'inégalité $\|g(t)\| \leqslant \mathrm{M}t$.

Voir Cartan [8] p. 42 pour une preuve plus sérieuse : pour pouvoir réellement négliger les $o(h)$, on doit travailler plutôt sur une inégalité de la forme $\|g(t)\| \leqslant (\mathrm{M}+\varepsilon)t+\varepsilon$, et le « de proche en proche » devient rigoureux en considérant le premier point t (en partant de 0) où l'inégalité serait en défaut. Voir aussi à l'Exercice 37 question 3 une preuve valable lorsque F est de dimension finie, par réduction à l'égalité classique des accroissements finis.

Parmi les nombreuses conséquences du théorème (voir exercices), le corollaire facile suivant est d'un usage particulièrement fréquent.

Corollaire 3.1. *Soient* E *et* F *normés, et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *différentiable sur un ouvert* U *de* E.

1. Si U *est un ouvert convexe de* E *et si* $\|\mathrm{D}f(x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \leqslant k$ *pour tout* $x \in \mathrm{U}$ *(où* k *est une constante positive), alors l'application* f *est* k*-lipschitzienne sur* U, *c'est-à-dire*

$$\|f(x)-f(y)\|_{\mathrm{F}} \leqslant k\,\|x-y\|_{\mathrm{E}}$$

pour tous $x, y \in \mathrm{U}$.

2. Si U *est un ouvert connexe de* E *et si* $\mathrm{D}f(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{U}$*, alors* f *est constante sur* U.

Ne pas confondre *conVexe* (si U contient deux points, il contient le segment qui les joint) et *conNexe* (U est « d'un seul morceau », i.e. deux points quelconques de l'ouvert U peuvent être joints *dans* U par un chemin continu).

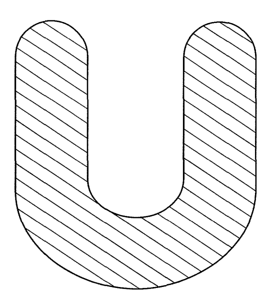


Fig. 57. Un connexe non convexe.

Convexe entraîne connexe, mais la réciproque est fausse dans tout espace normé de dimension $\geqslant 2$ sur $\mathbb{R}$ (penser au cas où U a la forme d'un U !). Sur la droite réelle cependant, convexe équivaut à connexe et les seules parties ayant ces propriétés sont les intervalles. L'énoncé 2 du corollaire est évidemment faux si U n'est plus connexe (exemple : U est réunion de deux intervalles disjoints, f vaut 1 sur l'un et 2 sur l'autre).

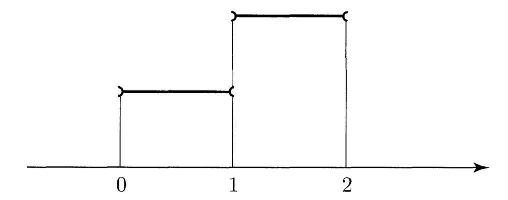


Fig. 58. Une fonction non constante, mais de dérivée identiquement nulle, sur $]0,1[\cup]1,2[$.

Le Théorème 3.1 peut se déduire (par réduction au cas d'une fonction d'une variable, comme esquissé ci-dessus) de l'énoncé suivant, d'usage moins fréquent (Cartan [8] p. 41).

Théorème 3.2. *Soient* a *et* b *deux nombres réels, avec* $a < b$*,* F *un espace normé et* $f : [a,b] \to \mathrm{F}$*,* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On suppose* f *et* φ *dérivables en tout point de l'intervalle ouvert* $]a,b[$*. Alors l'inégalité*

$$\|f'(t)\| \leqslant \varphi'(t) \textit{ pour tout } t \in [a,b]$$

entraîne

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a) \ .$$

Références. Avez [3] chapitre 2 ; Cartan [8] p. 41-53 ; Dieudonné [18] p. 160-167.

3. Exercices

On trouvera dans ces exercices quelques applications directes de l'inégalité de la moyenne, de très classiques compléments de cours basés sur ce théorème (dérivée d'une limite, dérivation sous le signe somme, longueur d'un arc,...), une initiation aux fonctions convexes et quelques applications aux équations différentielles (unicité, linéarisation, stabilité).

Exercice 33. ***Au plus une.*** **Montrer que le système d'équations**

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) \ , \ y = \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

admet au plus une solution.

[On pourra appliquer l'inégalité de la moyenne dans le plan muni de la norme euclidienne.]

Solution. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\cos(x-y)\right)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Cherchons à majorer la norme de sa différentielle

$$\mathrm{D}f(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \end{pmatrix} ,$$

le plan étant muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Or $\mathrm{D}f(x,y)$ transforme un vecteur (h,k) (à écrire en colonne !) en

$$\mathrm{D}f(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (h+k)\cos(x+y) \\ (k-h)\sin(x-y) \end{pmatrix} ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}f(x,y)(h,k)\|_2^2 &= \frac{1}{4}\left((h+k)^2\cos^2(x+y) + (h-k)^2\sin^2(x-y)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{4}\left((h+k)^2 + (h-k)^2\right) = \frac{1}{2}\,\|(h,k)\|_2^2 \ .\end{aligned}$$

Noter que cette inégalité est une égalité si $\cos^2(x+y) = \sin^2(x-y) = 1$, ce qui se produit par exemple pour $x = -y = \pi/4$. Ainsi la norme

d'application linéaire de $\mathrm{D}f(x,y)$ est majorée par $1/\sqrt{2} < 1$, et l'inégalité de la moyenne entre deux points quelconques (x,y) et (x',y') donne

$$\|f(x,y) - f(x',y')\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|(x,y) - (x',y')\|_2 \ .$$

Si $(x,y) = f(x,y)$ et $(x',y') = f(x',y')$ sont deux solutions du problème, cette inégalité entraîne immédiatement $(x,y) = (x',y')$, d'où l'unicité de la solution.

Remarques. Le point crucial est donc que f soit une application *contractante*, i.e. lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1. On verra au chapitre 4 que cette propriété permet de montrer aussi l'*existence* d'une solution par le théorème du point fixe (cf. Exercice 57) ; on trouve $x = 0{,}386\,45\ldots$, $y = 0{,}496\,95\ldots$

Le choix de la norme euclidienne est important : la méthode ne s'appliquerait plus avec les normes $\|.\|_1$ ou $\|.\|_\infty$, qui donneraient $\|\mathrm{D}f(x,y)\| = 1$ pour $x = -y = \pi/4$ (cf. Exercices 10 et 11).

Exercice 34. ***Nombres algébriques, nombres transcendants.*** **Un nombre réel x est dit *algébrique* de degré au plus n s'il est racine d'une équation polynomiale de degré n à coefficients entiers :**

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

où $n \geqslant 1$ et les a_k sont des entiers non tous nuls. Il est dit *transcendant* s'il n'est pas algébrique. Ainsi les rationnels, ou $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont algébriques.

1. Soit x un nombre irrationnel algébrique de degré au plus n. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que, pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geqslant 1$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{\mathrm{C}}{q^n} \ .$$

[On pourra appliquer l'inégalité de la moyenne à f.]

2. En déduire que le *nombre de Liouville*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

est transcendant.

[Si x_k est la k-ième somme partielle de la série, on pourra montrer que $0 < x - x_k \leqslant \left(1/2^{k!}\right)^k$.]

Solution. 1. Pour $a > 0$ suffisamment petit, x est la seule racine du polynôme f dans l'intervalle $[x-a, x+a]$. On a donc $f(p/q) \neq 0$ pour tout

rationnel p/q de cet intervalle, puisque x lui-même est irrationnel. Soit M un majorant de $|f'|$ sur cet intervalle. L'inégalité de la moyenne donne

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f(x) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|x - \frac{p}{q}\right| .$$

Comme f est de degré n et à coefficients entiers, le rationnel non nul $|f(p/q)|$ est de la forme k/q^n où k est un entier non nul, d'où $k \geqslant 1$ et

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{\mathrm{M}q^n}$$

lorsque p/q est entre $x-a$ et $x+a$.

Enfin si $|x - (p/q)| \geqslant a$, l'inégalité demandée est évidente pourvu que $a \geqslant \mathrm{C}$, d'où le résultat en prenant pour C le plus petit des deux nombres a et $1/\mathrm{M}$.

2. L'idée est que, d'après 1, un nombre algébrique ne peut pas être approché par des rationnels mieux qu'en C/q^n ; or le nombre de Liouville est somme d'une série de rationnels très rapidement convergente...

Soit donc x_k la somme des k premiers termes de la série. On a

$$0 < x - x_k = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+l)!}} \leqslant \frac{1}{2^{k\cdot k!}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \left(\frac{1}{2^{k!}}\right)^k ,$$

grâce à la minoration grossière $(k+l)! \geqslant k!(k+l) \geqslant k \cdot k! + l$. Or x_k est un rationnel de la forme p_k/q_k avec $q_k = 2^{k!}$ de sorte que, pour tout k,

$$0 < x - \frac{p_k}{q_k} \leqslant \frac{1}{q_k^k} .$$

Il en résulte que x est irrationnel : si on avait $x = p/q$, alors

$$0 < q_k p - q p_k \leqslant \frac{q}{q_k^{k-1}}$$

et, l'entier $q_k p - q p_k$ étant au moins égal à 1, on aboutit à une absurdité pour $k \to \infty$.

Si x était algébrique on aurait d'après 1 une inégalité de la forme

$$\frac{\mathrm{C}}{q_k^n} \leqslant x - \frac{p_k}{q_k} \leqslant \frac{1}{q_k^k} ,$$

ce qui est à nouveau impossible pour $k \to \infty$.

Exercice 35. ***Une suite dense sur le cercle.*** **Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable. On suppose que $f(x)$ croît vers $+\infty$ et**

que $f'(x)$ décroît vers 0 lorsque $x \to \infty$. Montrer que les points $e^{if(n)}$, avec n entier $\geqslant 1$, sont denses sur le cercle unité.

[On pourra appliquer l'inégalité de la moyenne à la fonction $e^{if(x)}$.]

Solution. Soit $e^{i\theta}$ un point donné du cercle. Comme f croît indéfiniment il existe, pour tout entier k assez grand, un réel x_k tel que $f(x_k) = \theta + 2k\pi$. Soit n_k la partie entière de x_k. Alors $0 \leqslant x_k - n_k < 1$ et l'inégalité de la moyenne permet d'écrire

$$\left|e^{i\theta} - e^{if(n_k)}\right| = \left|e^{if(x_k)} - e^{if(n_k)}\right| \leqslant (x_k - n_k)f'(n_k) \leqslant f'(n_k) ,$$

car $\left|e^{if(x)}\right|' = \left|ie^{if(x)}f'(x)\right| = f'(x) \leqslant f'(n_k)$ sur l'intervalle considéré, f étant positive et décroissante. Comme n_k tend vers l'infini avec k on a $f'(n_k) \to 0$ d'après l'hypothèse, et le point $e^{i\theta}$ est limite d'une suite extraite de la suite des $e^{if(n)}$.

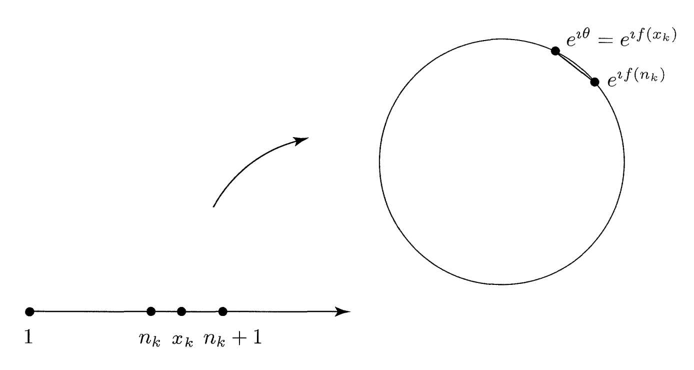


Fig. 59. Densité des $e^{if(n)}$ sur le cercle.

Remarque. Ce résultat s'applique à des fonctions f qui croissent lentement vers l'infini, telles que $\ln x$ ou $\sqrt{x}$. Mais pour $f(x) = ax$ par exemple, on peut montrer que la suite $\left(e^{if(n)}\right)$ est dense sur le cercle si $a/2\pi$ est irrationnel, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs sinon.

Exercice 36. ***Comparer une série à une intégrale.***

1. Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Montrer que, pour tout $n \geqslant a$,

$$\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{n \leqslant x \leqslant n+1} |f'(x)| \ .$$

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\ln n)$ en la comparant à une intégrale.

3. Pour s complexe on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^s)$ la *fonction zêta de Riemann.* En appliquant 1 à $f(x) = 1/x^s$ montrer que la fonction

$$\varphi(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

se prolonge en une fonction continue de s dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

Commentaire. Un résultat classique assure que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature (convergente ou divergente), si f est décroissante et positive. L'inégalité de 1 permet d'adapter à d'autres cas cette méthode de comparaison.

Solution. 1. Pour $n \geqslant a$ soit M_n le maximum de $|f'|$ sur l'intervalle $[n, n+1]$. On a facilement

$$\begin{aligned}\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_n^{n+1} (f(n) - f(x))dx\right| \\ &\leqslant \int_n^{n+1} |f(x) - f(n)|\,dx \\ &\leqslant \int_n^{n+1} \mathrm{M}_n\,(x-n)\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{M}_n\ .\end{aligned}$$

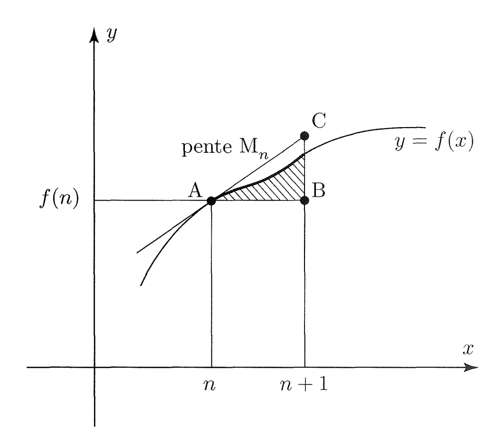


Fig. 60. Comparaison d'une série et d'une intégrale : l'aire hachurée est inférieure à celle du triangle ABC.

2. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}\sin(\ln x)$ est de classe C^1 sur $]0, \infty[$ et

$$|f'(x)| = \left|\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{2}{x^2}\ .$$

Notons

$$u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n} \text{ et } v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx\ .$$

D'après 1 on a $|u_n - v_n| \leqslant 1/n^2$, et les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc de même nature. Or les sommes partielles

$$\sum_{n=1}^{N-1} v_n = \int_1^N \sin(\ln x)\frac{dx}{x} = 1 - \cos(\ln N) ,$$

avec $N \geqslant 1$ entier, n'ont pas de limite pour $N \to \infty$; en effet les points $e^{i \ln N}$ sont denses sur le cercle unité (Exercice 35) et, la projection du cercle sur le segment horizontal $[-1, 1]$ étant une application continue surjective, leurs images $\cos(\ln N)$ sont denses sur ce segment. Par suite $\sum u_n$ diverge.

3. On rappelle que, pour s complexe, n^s est défini comme $e^{s \ln n}$. Alors $|n^s| = n^{\operatorname{Re} s}$ et la série de Riemann converge absolument dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$. Mais on peut mieux faire.

Soit
$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} .$$

En appliquant 1 à $f(x) = 1/x^s$, de classe C^1 sur $]0, \infty[$, on a $f'(x) = -s/x^{s+1}$ et, pour toutes constantes positives a et ε et tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n(s)| \leqslant \frac{|s|}{2n^{\operatorname{Re} s+1}} \leqslant \frac{a}{2n^{1+\varepsilon}}$$

si $|s| \leqslant a$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \varepsilon > 0$. La série $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$ converge donc normalement dans ce domaine. Comme u_n est continue en s sur $\mathbb{C}$ (par un théorème classique sur les intégrales à paramètre), φ est une fonction continue de s dans la réunion de ces domaines pour tous les a et ε, i.e. dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

Pour $\operatorname{Re} s > 1$ la série $\sum_1^{\infty} 1/n^s$ et l'intégrale $\int_1^{\infty} dx/x^s$ convergent toutes deux, et on peut alors écrire

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} .$$

Cette fonction, *a priori* définie seulement pour $\operatorname{Re} s > 1$, est donc prolongeable en une fonction continue pour $\operatorname{Re} s > 0$ – on n'a pas dit pour autant que la série ζ converge pour $\operatorname{Re} s > 0$! D'ailleurs ce résultat montre que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ tend vers $\varphi(1)$ lorsque s tend vers 1, d'où $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$, qui tend vers l'infini.

On peut préciser cette étude locale : on a

$$\varphi(1) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} u_n(1) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{dx}{x} \right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln N \right) = \gamma$$

(la célèbre constante d'Euler), d'où le développement limité pour $s \to 1$ de la fonction ζ prolongée :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \varepsilon(s) \text{ , avec } \lim_{s\to 1} \varepsilon(s) = 0 \text{ .}$$

Remarque. Les mêmes arguments montrent que ε est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$, par suite ζ se prolonge en une fonction méromorphe de s dans ce demi-plan, avec un pôle simple en $s = 1$. La célèbre conjecture de Riemann (non démontrée à ce jour) dit que les seuls zéros de la fonction ainsi prolongée sont de partie réelle $1/2$.

Exercice 37. ***Nostalgie du point c.*** **Soient U un ouvert d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$, a et b deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U.**

1. Si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U, montrer qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(c)(b - a) \text{ .}$$

2. ***Application.*** **De combien de décimales exactes des nombres e, $\sqrt{2}$ et π a-t-on besoin pour pouvoir calculer à 10^{-20} près le nombre**

$$\sqrt{2}/(e + \pi^3) \text{ ?}$$

3. Si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur U, montrer qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|\mathrm{D}f(c)\| \cdot \|b - a\| \text{ ,}$$

avec les normes respectives de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}^p)$ et E.

[On pourra appliquer 1 à $l \circ f$, où l est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$, et utiliser le théorème de Hahn-Banach (Exercice 9).]

Commentaire. La version « il existe c tel que ... » du théorème de la moyenne, *a priori* réservée aux seules fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir début du chapitre), s'étend donc partiellement au cas général. On se ramène à une fonction réelle d'une variable réelle en restreignant (au départ) à un segment et en composant (à l'arrivée) avec une forme linéaire. De tels « raffinements » sont toutefois de peu d'intérêt pratique, sauf parfois pour séparer la contribution des accroissements de chaque variable (question 2).

Solution. 1. Il suffit d'appliquer la classique égalité des accroissements finis à la fonction numérique $g(t) = f((1-t)a + tb)$, continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, d'où l'existence de $\tau \in \,]0, 1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\tau)$.

Par dérivation de fonction composée cela s'écrit

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(c)(b - a) \text{ ,}$$

avec $c = (1-\tau)a + \tau b \in \,]a, b[$. Noter que $\mathrm{D}f(c)$ est une forme linéaire sur E, que l'on applique au vecteur $b - a$ de cet espace.

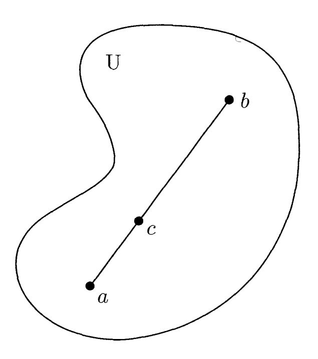


Fig. 61. De a à b dans U.

2. Pour $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ l'égalité de 1 s'écrit

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)$$

ou encore, avec les notations traditionnelles du « calcul d'erreurs »,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\Delta x_i \text{ , d'où } |\Delta f| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i |\Delta x_i|$$

si on peut majorer $|\partial f/\partial x_i|$ par M_i sur $[a, b]$.

Par exemple, pour calculer $f(\sqrt{2}, e, \pi)$ avec $f(x, y, z) = x/(y + z^3)$, on remplace $\sqrt{2}$, e et π par des valeurs approchées respectives α, β, γ, et l'erreur commise sur le résultat se majore selon

$$|\Delta f| = |f(\alpha, \beta, \gamma) - f(\sqrt{2}, e, \pi)| \leqslant \mathrm{M}_x|\Delta x| + \mathrm{M}_y|\Delta y| + \mathrm{M}_z|\Delta z|$$

en notant $\Delta x = \alpha - \sqrt{2}$ etc. En majorant les dérivées partielles de f pour $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$ et $3 \leqslant z \leqslant 4$ on a

$$|f'_x| = \frac{1}{y + z^3} \leqslant \frac{1}{29} < \mathrm{M}_x = 0{,}04$$

$$|f'_y| = \frac{x}{(y + z^3)^2} \leqslant \frac{2}{29^2} < \mathrm{M}_y = 0{,}003$$

$$|f'_z| = \frac{3xz^2}{(y + z^3)^2} \leqslant \frac{96}{29^2} < \mathrm{M}_z = 0{,}12 \text{ .}$$

Pour obtenir $|\Delta f| \leqslant 10^{-20}$, les contraintes sur Δx, Δy et Δz sont donc différentes ; on pourra prendre par exemple

$$|\Delta x| \leqslant 5.10^{-20} \text{ , } |\Delta y| \leqslant 10^{-18} \text{ , } |\Delta z| \leqslant 4.10^{-20} \text{ ,}$$

ce qui est réalisé si α et γ contiennent 20 décimales exactes de $\sqrt{2}$ et π respectivement, et si β contient 18 décimales exactes de e. On n'a pas tenu compte des erreurs dues au calcul de $f(\alpha, \beta, \gamma)$.

3. La fonction composée $l \circ f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur U ; d'après 1 il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$l(f(b)) - l(f(a)) = \mathrm{D}(l \circ f)(c)(b - a) \ ,$$

c'est-à-dire

$$l(f(b)) - l(f(a)) = l(\mathrm{D}f(c)(b - a))$$

par dérivation de la fonction composée $l \circ f$. Ici $b - a$ est un vecteur de E, et $\mathrm{D}f(c)(b - a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ auquel on applique la forme linéaire l. Le point c dépend en général de l.

Soit $v = f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^p$. D'après le théorème de Hahn-Banach (Exercice 9, question 4) on peut choisir $l \neq 0$ telle que $l(v) = \|l\| \cdot \|v\|$. Il vient

$$\|l\| \cdot \|v\| = l(v) = l(\mathrm{D}f(c)(b - a)) \leqslant \|l\| \cdot \|\mathrm{D}f(c)(b - a)\| \ ,$$

d'où en simplifiant par $\|l\|$,

$$\|v\| = \|f(b) - f(a)\| \leqslant \|\mathrm{D}f(c)(b - a)\| \leqslant \|\mathrm{D}f(c)\| \cdot \|(b - a)\| \ .$$

Exercice 38. ***Caractérisation des applications*** $\mathbf{C^1}$**. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un espace normé. Montrer qu'une application $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{F}$ est de classe C^1 sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles $\partial_i f$, $1 \leqslant i \leqslant n$, continues sur U.**

[On pourra aller de a à $a + h$ dans U en suivant une ligne brisée à côtés parallèles aux axes de coordonnées.]

Commentaire. Question très classique, et assez facile — mais dont la rédaction demande un peu de soin. Noter que la démonstration donne aussi un résultat ponctuel : *si les $\partial_i f$ existent au voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a.*

Solution. L'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ autorise à le munir de la norme $\|.\|_1$, qui sera commode. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique, et soit $\|.\|_\mathrm{F}$ la norme de F.

On sait que la différentiabilité de f entraîne l'existence des dérivées partielles (dérivées dans la direction des vecteurs e_i) $\partial_i f(x) = \mathrm{D}f(x)e_i \in$ F. De plus

$$\begin{aligned} \|\partial_i f(x) - \partial_i f(y)\|_\mathrm{F} &= \|(\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y))e_i\|_\mathrm{F} \\ &\leqslant \|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathrm{F})} \ , \end{aligned}$$

puisque e_i est de norme 1, et la continuité sur U de la différentielle $x \mapsto \mathrm{D}f(x)$ entraîne donc celle des dérivées partielles $x \mapsto \partial_i f(x)$.

Réciproquement, supposons l'existence et la continuité sur U des dérivées partielles. Cette hypothèse signifie que, pour chaque $a = (a_1 \ldots, a_n) \in \mathrm{U}$ et chaque i, l'application « partielle »

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \ ,$$

restriction de f à une droite parallèle au i-ième axe de coordonnées, est dérivable en $t = a_i$ et que la dérivée ainsi obtenue $\partial_i f(a) \in \mathrm{F}$ est fonction continue de a sur U.

Soient donc $a \in \mathrm{U}$ et $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert, on peut choisir $r > 0$ assez petit pour que la boule B de centre a et de rayon r soit contenue dans U et que

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon$$

pour $x \in \mathrm{B}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

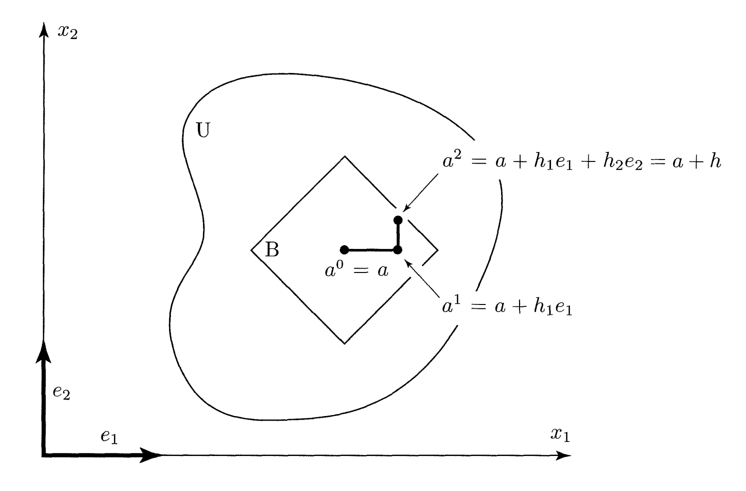


Fig. 62. De a à $a + h$.

Pour $\|h\|_1 < r$, on va aller de a à $a + h$ en passant par les points intermédiaires

$$a^0 = a\,, \ldots, a^i = a + h_1 e_1 + \cdots + h_i e_i\,, \ldots, a^n = a + h \ ,$$

tous contenus dans B. Introduisons les fonctions

$$g_i(t) = f(a^{i-1} + te_i) - f(a^{i-1}) - t\partial_i f(a)\,;$$

il vient

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i \right\|_{\mathrm{F}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|g_i(h_i)\|_{\mathrm{F}} \ .$$

Les fonctions g_i sont dérivables pour $|t| < r$ et, par définition même d'une dérivée partielle,

$$\|g_i'(t)\|_{\mathrm{F}} = \left\|\partial_i f(a^{i-1} + te_i) - \partial_i f(a)\right\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon$$

d'où, par l'inégalité de la moyenne,

$$\|g_i(h_i)\|_{\mathrm{F}} = \|g_i(h_i) - g_i(0)\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon|h_i| \ .$$

Il n'y a plus qu'à sommer sur i pour obtenir

$$\left\|f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i\right\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon \sum_i |h_i| = \varepsilon \, \|h\|_1 \ ,$$

d'où la différentiabilité de f en a avec $\mathrm{D}f(a)h = \sum_i \partial_i f(a) h_i$.

Enfin la continuité sur U de la différentielle ainsi obtenue résulte des inégalités

$$\|(\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y))\, h\|_{\mathrm{F}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h_i| \, \|\partial_i f(x) - \partial_i f(y)\|_{\mathrm{F}} \ ,$$

d'où

$$\|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathrm{F})} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\partial_i f(x) - \partial_i f(y)\|_{\mathrm{F}} \ ,$$

et la conclusion grâce à la continuité des $\partial_i f$.

Exercice 39. ***Différentielle d'une limite ; application exponentielle.***

1. Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et une suite d'applications $f_k : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{F}$ différentiables sur U. On suppose que

(i) les f_k convergent simplement sur U

(ii) les différentielles $\mathrm{D}f_k$ convergent *uniformément* sur U.

Montrer que l'application $\lim f_k$ est différentiable sur U et que

$$\mathrm{D}(\lim_k f_k) = \lim_k (\mathrm{D}f_k) \ .$$

[On pourra appliquer l'inégalité de la moyenne à $f_j - f_k$ entre a et $a + h$, pour j, k assez grands.]

Si les f_k sont de classe C^1 sur U, montrer qu'il en est de même de leur limite.

2. *Application.* On prend E = F, espace des matrices réelles $n \times n$, et

$$f_k(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{k} \frac{\mathrm{X}^p}{p!} \ .$$

Déduire de 1 que l'application exponentielle est de classe C^1 sur E.

Solution. 1. Notons $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathrm{F}$ et $g(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{D}f_k(x) \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Étant donné $\varepsilon > 0$, l'hypothèse (ii) assure l'existence d'un entier N tel que, pour tout $k \geqslant \mathrm{N}$ et tout $x \in \mathrm{U}$

$$\|\mathrm{D}f_k(x) - g(x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \leqslant \varepsilon\,;$$

par suite, pour $j, k \geqslant \mathrm{N}$,

$$\|\mathrm{D}f_j(x) - \mathrm{D}f_k(x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Soit $a \in \mathrm{U}$. Pour $r > 0$ assez petit la boule de centre a et de rayon r est un convexe contenu dans U, et l'inégalité de la moyenne appliquée à $f_j - f_k$ entre a et $a+h$ donne

$$\|(f_j(a+h) - f_j(a)) - (f_k(a+h) - f_k(a))\|_{\mathrm{F}} \leqslant 2\varepsilon\,\|h\|_{\mathrm{E}}\ .$$

Fixons $k \geqslant \mathrm{N}$. Comme f_k est différentiable en a, il existe $\alpha < r$ tel que

$$\|f_k(a+h) - f_k(a) - \mathrm{D}f_k(a)h\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\,\|h\|_{\mathrm{E}}$$

pour $\|h\|_{\mathrm{E}} \leqslant \alpha$. De plus, d'après notre première inégalité,

$$\|\mathrm{D}f_k(a)h - g(a)h\|_{\mathrm{F}} \leqslant \varepsilon\,\|h\|_{\mathrm{E}}\ ,$$

et il suffit d'ajouter ces trois dernières inégalités pour obtenir

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - g(a)h\|_{\mathrm{F}} \leqslant 4\varepsilon\,\|h\|_{\mathrm{E}}$$

si $\|h\|_{\mathrm{E}} \leqslant \alpha$, pour tout $j \geqslant \mathrm{N}$. Pour $j \to \infty$ on obtient finalement

$$\|f(a+h) - f(a) - g(a)h\|_{\mathrm{F}} \leqslant 4\varepsilon\,\|h\|_{\mathrm{E}}\ ,$$

ce qui établit la différentiabilité de f en a, avec $\mathrm{D}f(a) = g(a)$.

Si les f_k sont de classe C^1, les $\mathrm{D}f_k$ sont continues sur U et il en est de même de $\mathrm{D}f = \lim \mathrm{D}f_k$, grâce à la convergence uniforme.

2. Il s'agit d'étendre à un cadre matriciel la dérivation terme à terme, bien connue pour une série entière de variable réelle ou complexe. La méthode employée reste la même, malgré les complications due à la non-commutativité du produit.

Pour chaque entier $p \geqslant 1$ l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^p$, polynomiale en les éléments de la matrice X, est de classe C^1 sur E et sa différentielle au point X s'obtient, comme toujours, en isolant les termes linéaires en l'accroissement H dans le développement de

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}+\mathrm{H})^p &= (\mathrm{X}+\mathrm{H})\cdots(\mathrm{X}+\mathrm{H})\\ &= \mathrm{X}^p + \left(\mathrm{X}^{p-1}\mathrm{H} + \mathrm{X}^{p-2}\mathrm{H}\mathrm{X} + \cdots + \mathrm{H}\mathrm{X}^{p-1}\right) + \mathrm{O}(\|\mathrm{H}\|^2)\end{aligned}$$

(où $\|.\|$ est une norme d'application linéaire sur E). Par suite l'application $X \mapsto u_p(X) = X^p/p!$ est de classe C^1 sur E et sa différentielle est, pour $p \geqslant 1$, l'application linéaire de E dans E définie par

$$Du_p(X)H = \frac{1}{p!}\left(X^{p-1}H + X^{p-2}HX + \cdots + HX^{p-1}\right) .$$

Alors

$$\|Du_p(X)H\| \leqslant \frac{1}{p!}p\,\|X\|^{p-1}\,\|H\| \;\; , \text{d'où} \;\; \|Du_p(X)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leqslant \frac{\|X\|^{p-1}}{(p-1)!} ,$$

et la série $\sum_1^\infty Du_p(X)$ est absolument convergente dans l'espace complet $\mathcal{L}(E, E)$, uniformément sur toute boule $\|X\| < R$. Comme les

$$f_k(X) = \sum_{p=0}^{k} u_p(X)$$

tendent vers $\exp X$ pour $k \to \infty$, il résulte de 1 que l'application exponentielle est de classe C^1 sur ces boules, donc sur E, avec

$$\begin{aligned} D\exp(X)H &= \sum_{p=1}^{\infty} Du_p(X)H \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(X^{p-1}H + X^{p-2}HX + \cdots + HX^{p-1}\right) . \end{aligned}$$

Complément. On peut montrer que l'application exponentielle est de classe C^∞ ; voir Avez [3] p. 77, ou Lafontaine [28] p. 36.

On obtiendra à l'Exercice 101, par une autre méthode, l'expression plus élégante

$$D\exp(X)H = \exp X \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\operatorname{ad} X)^{k-1}H\right) ,$$

en notant $\operatorname{ad} X \in \mathcal{L}(E, E)$ l'application définie par $\operatorname{ad} X(H) = XH - HX$. Cette nouvelle expression pourrait se déduire du résultat précédent en considérant la série double

$$(\exp X)^{-1} \sum_p Du_p(X)H = \sum_p \sum_q \frac{1}{q!}(-X)^q Du_p(X)H ,$$

et en montrant par récurrence sur $k \geqslant 1$ que

$$\sum_{p+q=k} \frac{1}{q!}(-X)^q Du_p(X)H = \frac{1}{k!}(-\operatorname{ad} X)^{k-1}H .$$

Ce calcul élémentaire mais un peu long ne sera pas détaillé ici.

Exercice 40. ***Dérivation sous une intégrale ; fonction gamma.***

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec I ouvert, et $f : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{C}$ une fonction *continue*, admettant une dérivée partielle en la première variable, $\partial f / \partial x$, *continue* sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On considère l'intégrale à paramètre

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,dt\ .$$

1. Si l'intervalle d'intégration J est *compact*, montrer que F est de classe C^1 sur I et que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,dt\right) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\ .$$

[On pourra utiliser la continuité uniforme de $\partial f / \partial x$ sur un compact de la forme $[x-r, x+r] \times \mathrm{J}$, et l'inégalité de la moyenne.]

2. Pour J *quelconque*, on suppose que l'intégrale donnant $\mathrm{F}(x)$ converge pour chaque $x \in \mathrm{I}$, et qu'il existe une fonction φ, continue sur J, telle que l'on ait l'*inégalité de domination*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ pour } (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}\ , \text{ avec } \int_{j} \varphi(t)\,dt < \infty\ .$$

Montrer que le résultat de 1 est encore valable.

[On pourra écrire J comme réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts J_n, appliquer 1 et l'Exercice 39.]

3. Comment dériver une intégrale de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\,?$$

4. Montrer que la fonction gamma d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

est indéfiniment dérivable pour $x > 0$.

Commentaire. Ce théorème « de convergence dominée », obtenu par des outils élémentaires, rend pratiquement les mêmes services que l'énoncé correspondant de la théorie de Lebesgue, les hypothèses de continuité ci-dessus étant généralement satisfaites par les fonctions usuelles.

Il vient en complément du résultat suivant sur la continuité d'une intégrale à paramètre, dont la preuve utilise les mêmes idées : si $f : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{C}$ est continue et si J est compact, alors l'intégrale F est continue sur I ;

même résultat si J est quelconque et $|f(x,t)| \leqslant \psi(t)$ sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, avec ψ continue sur J et $\int_{\mathrm{J}} \psi(t)\, dt < \infty$.

Solution. 1. Si $\mathrm{J} = [a, b]$, la notation $\int_{\mathrm{J}}$ désigne $\int_a^b$. Pour montrer que F admet au point x (fixé dans I) la dérivée voulue, on doit étudier la différence

$$\begin{aligned} u(h) &= \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) - h \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \\ &= \int_{\mathrm{J}} \left(f(x+h,t) - f(x,t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right) dt \;. \end{aligned}$$

La dérivabilité est une propriété locale, et il suffit de raisonner au voisinage de x. Soit donc $r > 0$ assez petit pour que l'intervalle $\mathrm{I}_x = [x - r, x + r]$ soit contenu dans I.

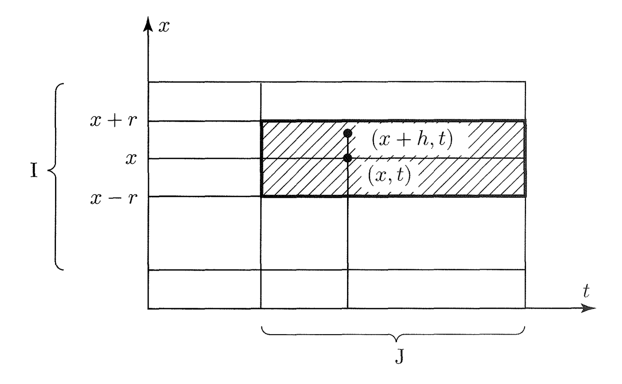


Fig. 63. Le compact $\mathrm{I}_x \times \mathrm{J}$.

La continuité uniforme de la fonction $\partial f / \partial x$ sur le compact $\mathrm{I}_x \times \mathrm{J}$ du plan entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe α (avec $0 < \alpha \leqslant r$) tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x+h,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varepsilon \;,$$

pour $|h| \leqslant \alpha$ et pour tout $t \in \mathrm{J}$. L'expression sous la valeur absolue est la dérivée par rapport à h de la fonction $v(h) = f(x+h,t) - h(\partial f/\partial x)(x,t)$. L'inégalité de la moyenne appliquée à v entre 0 et h donne donc

$$\left| f(x+h,t) - f(x,t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = |v(h) - v(0)| \leqslant \varepsilon |h| \;.$$

On peut intégrer sur J cette inégalité uniforme en t. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|h| \leqslant \alpha$ entraîne

$$|u(h)| \leqslant \varepsilon \mathrm{L} |h|$$

(où L est la longueur de l'intervalle J), ce qui établit la dérivabilité de F en x avec pour dérivée

$$\mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\ .$$

De plus l'inégalité de continuité uniforme donne aussi

$$|\mathrm{F}'(x+h) - \mathrm{F}'(x)| \leqslant \varepsilon \mathrm{L} \text{ pour } |h| \leqslant \alpha\ ,$$

et F′ est continue en x.

2. Si $\mathrm{J} = [a,b]$ est compact, le résultat est donné par 1. Noter que l'inégalité de domination est alors inutile : on peut toujours majorer $|f|$ par une constante sur un compact $[x-r, x+r] \times \mathrm{J}$.

Si $\mathrm{J} = [a,b[$, resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$, la notation $\int_{\mathrm{J}}$ désigne $\int_a^b$, intégrale impropre à la borne b, resp. a, resp. a et b. On va se ramener à la situation précédente en écrivant $\mathrm{J} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n$, réunion croissante d'intervalles compacts $\mathrm{J}_n = [a, b_n]$, resp. $[a_n, b]$, resp. $[a_n, b_n]$, où a_n tend vers a en décroissant et b_n tend vers b en croissant. On note

$$\mathrm{F}_n(x) = \int_{\mathrm{J}_n} f(x,t)\,dt \text{ et } \mathrm{G}(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\ .$$

La suite (F_n) converge simplement sur I vers la fonction F, par hypothèse, et les F_n sont continûment dérivables (sous le signe somme) sur I, d'après 1. L'intégrale donnant G converge absolument d'après l'inégalité de domination, et on a

$$|\mathrm{G}(x) - \mathrm{F}_n'(x)| = \left| \int_{\mathrm{J}\setminus \mathrm{J}_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leqslant \int_{\mathrm{J}\setminus \mathrm{J}_n} \varphi(t)\,dt$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. Par suite F_n' converge vers G uniformément sur I et on en déduit que F est continûment dérivable sur I, de dérivée G (voir Exercice 39, question 1).

3. Supposons ici J compact, f et $\partial f/\partial x$ continues sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, et a et b fonctions continûment dérivables sur I, à valeurs dans J. L'idée est de considérer F comme une fonction composée :

$$\mathrm{F}(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \Phi(a(x), b(x), x)\ ,\ \text{où } \Phi(u,v,x) = \int_u^v f(x,t)\,dt\ .$$

D'après 1 d'une part, et une propriété bien connue de l'intégrale fonction de sa borne supérieure (ou inférieure) d'autre part, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,v,x) = \int_u^v f(x,t)\,dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v,x) = f(x,v)\ ,\ \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v,x) = -f(x,u)\ .$$

Par suite F est continûment dérivable sur I, avec

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(a(x), b(x), x)a'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(a(x), b(x), x)b'(x) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a(x), b(x), x) \ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = f(x,b)b' - f(x,a)a' + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \ ,$$

où a, b, a', b' sont évalués au point x.

4. On prend ici $\mathrm{I} = \mathrm{J} =]0, \infty[$ et $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$. Les dérivées partielles successives de f par rapport à x sont

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1} \ , \ k = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

continues sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

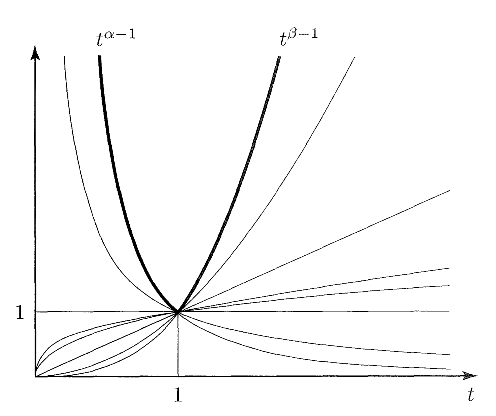


Fig. 64. Domination des fonctions t^{x-1} pour $\alpha < x < \beta$.

Une inégalité de domination de la forme $|(\partial^k f/\partial x^k)(x,t)| \leqslant \varphi_k(t)$ serait impossible sans restriction sur x : voir $x \to \infty$ lorsque $t > 1$, ou $x \to 0$ lorsque $t < 1$ (le terme en t^{-1} obtenu interdit l'intégrabilité). Mais elle devient possible en imposant la condition $\alpha < x < \beta$, où α et β sont fixés strictement positifs. On a en effet

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t) = e^{-t}|\ln t|^k \max(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1})$$

pour $\alpha < x < \beta$, $t > 0$ et tout entier k, comme on le vérifie pour $0 < t < 1$ et pour $t \geqslant 1$. De plus les intégrales $\int_0^\infty \varphi_k(t)dt$ convergent puisqu'on peut,

en choisissant $0 < \alpha' < \alpha$ et $\beta' > \beta$, majorer $\varphi_k(t)$ par $t^{\alpha'-1}$ pour t assez voisin de 0 et par $e^{-t}t^{\beta'-1}$ pour t assez grand. Les résultats précédents, appliqués successivement avec $k = 0$, $k = 1$,... montrent que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur I, et que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1} dt \text{ pour } x > 0 .$$

Exercice 41. *Longueur d'un arc.* Soit $\gamma : [a, b] \to \mathrm{E}$ un arc paramétré de classe C^1 d'un espace normé E. À toute subdivision σ de $[a, b]$ par des points $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b$ on associe la longueur de la ligne brisée

$$\mathrm{L}_\sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \ ,$$

et on appelle *longueur de* γ le nombre $\mathrm{L} = \sup \mathrm{L}_\sigma$, où la borne supérieure est prise sur toutes les subdivisions σ.

1. *Exemple.* Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{E}$; calculer la longueur de l'arc δ de E défini par $\delta(t) = (1 - t)\alpha + t\beta$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Montrer par l'inégalité de la moyenne que tout arc de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin d'un point à un autre dans E.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer par l'inégalité de la moyenne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait, pour tous $s, t \in [a, b]$ vérifiant $|s - t| \leqslant \alpha$,

$$\|\gamma(s) - \gamma(t) - (s - t)\gamma'(t)\| \leqslant \varepsilon|s - t| \ .$$

4. En déduire que

$$\mathrm{L} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \ .$$

[On pourra approcher L par un L_σ et appliquer 3 sur chaque intervalle de la subdivision σ.]

Heuristique. Pour une subdivision σ suffisamment fine on a

$$\mathrm{L} \simeq \mathrm{L}_\sigma = \sum_j \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

$$\simeq \sum_j (t_{j+1} - t_j) \|\gamma'(t_j)\| \simeq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \ .$$

Derrière les deux derniers signes $\simeq$ (peu différent de) se cachent respectivement la définition de la dérivée $\gamma'(t_j)$ et la construction de l'intégrale comme limite de sommes de Riemann... Pour rendre cela rigoureux, on aura besoin de l'uniforme continuité de γ' et de l'inégalité de la moyenne.

Remarque 1. À propos de rigueur, il convient de préciser la notion de fonction C^1 sur un intervalle non ouvert. Dire que γ est C^1 sur $[a, b]$ signifie qu'elle est C^1 sur $]a, b[$ et qu'elle admet une dérivée à droite $\gamma'(a)$ en a, qui est limite de $\gamma'(t)$ lorsque $t \to a$ à droite, et de même à gauche en b. Cela revient à dire que γ *se prolonge* en une fonction C^1 définie sur $\mathbb{R}$ entier, par exemple par la tangente en a à l'arc γ pour $t \leqslant a$, et de même pour $t \geqslant b$. On pourra donc appliquer l'inégalité de la moyenne sur $[a, b]$.

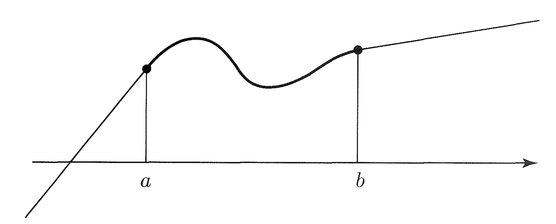


Fig. 65. Prolongement d'une fonction C^1 sur $[a, b]$.

Remarque 2. La notion ci-dessus de longueur garde son intérêt même pour $E = \mathbb{R}$: c'est la *variation sur* $[a, b]$ de la fonction γ (non nécessairement de classe C^1), et les *fonctions à variation bornée* (i.e. de longueur finie) ont de nombreuses propriétés intéressantes. Voir Choquet [10] p. 95.

Solution. 1. On a $\|\delta(t_{j+1}) - \delta(t_j)\| = (t_{j+1} - t_j) \|\beta - \alpha\|$, d'où

$$L_\sigma = \|\beta - \alpha\| = L \ .$$

C'est la longueur du segment $[a, b]$ de l'espace E.

2. Soit $k = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|\gamma'(t)\|$. L'inégalité de la moyenne entraîne (voir Remarque 1 ci-dessus)

$$\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leqslant k(t_{j+1} - t_j) \ ,$$

d'où $L_\sigma \leqslant k(b - a)$ pour toute subdivision σ, et $L \leqslant k(b - a)$.

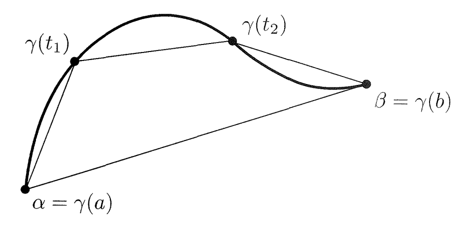


Fig. 66. Le plus court chemin de α à β.

Soient α, β et δ comme en 1, γ un chemin C^1 quelconque tel que $\gamma(a) = \alpha$ et $\gamma(b) = \beta$, et $L(\delta)$, $L(\gamma)$ leurs longueurs respectives. On a

$$L(\delta) = \|\beta - \alpha\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leqslant L(\gamma)$$

(penser à la subdivision triviale réduite à a et b), et le segment δ est donc le plus court chemin de α à β dans E.

3. L'inégalité demandée ne se réduit pas à la seule définition de la dérivée au point t ! L'important est que le nombre α doit être le même en tout point t de l'intervalle $[a, b]$.

L'expression à majorer est la norme de l'accroissement entre $u = t$ et $u = s$ de la fonction $u \mapsto \gamma(u) - u\gamma'(t)$, dont la dérivée est $\gamma'(u) - \gamma'(t)$. Or la *continuité uniforme*[2] sur le compact $[a, b]$ de la fonction γ' entraîne l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que, pour $u, t \in [a, b]$ et $|u - t| \leqslant \alpha$, on ait $\|\gamma'(u) - \gamma'(t)\| \leqslant \varepsilon$. L'accroissement considéré est donc majoré par $\varepsilon|s-t|$, d'après l'inégalité de la moyenne.

4. On peut maintenant mettre en œuvre l'idée heuristique. D'après 3 et l'inégalité triangulaire on a, si $|t_{j+1} - t_j| \leqslant \alpha$,

$$\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| = (t_{j+1} - t_j)\,\|\gamma'(t_j)\| + r_j \ ,$$

où l'erreur r_j vérifie $|r_j| \leqslant \varepsilon(t_{j+1} - t_j)$. On a aussi, pour $t_j \leqslant u \leqslant t_{j+1}$,

$$\big|\|\gamma'(t_j)\| - \|\gamma'(u)\|\big| \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où en intégrant sur cet intervalle

$$(t_{j+1} - t_j)\,\|\gamma'(t_j)\| = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(u)\|\,du + s_j \ ,$$

avec $|s_j| \leqslant \varepsilon(t_{j+1} - t_j)$. Par sommation sur j on obtient, pour toute subdivision σ dont le pas $\max_j |t_{j+1} - t_j|$ est inférieur à α,

$$\mathrm{L}_\sigma = \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,du + r \ ,$$

avec $r = \sum_j (r_j + s_j)$, $|r| \leqslant 2\varepsilon(b - a)$.

Enfin, L étant la borne supérieure des L_σ, il existe une subdivision σ^0 telle que L_{σ^0} approche L à $\varepsilon(b - a)$ près. En ajoutant à σ^0 (si nécessaire) des points intermédiaires, on obtient une nouvelle subdivision σ de pas inférieur à α et on a

$$\mathrm{L} - \varepsilon(b - a) \leqslant \mathrm{L}_{\sigma^0} \leqslant \mathrm{L}_\sigma \leqslant \mathrm{L}$$

d'où, en assemblant les résultats obtenus,

$$\left|\mathrm{L} - \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,du\right| \leqslant 3\varepsilon(b - a) \ ,$$

2. L'uniforme, c'est ce qui rend tout le monde pareil.

et l'égalité demandée en faisant tendre ε vers 0.

Remarque. Si l'espace normé E est complet, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans E ; la norme de l'intégrale est inférieure à l'intégrale de la norme, d'où

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| = \left\| \int_a^b \gamma'(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \mathrm{L}\ .$$

On retrouve ainsi le fait que la ligne droite est le plus court chemin.

Exercice 42. ***Fonctions convexes.*** **Soient U un *ouvert convexe* d'un espace normé E (sur $\mathbb{R}$) et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Elle est dite *fonction convexe* sur U si, pour tous $x, y \in \mathrm{U}$ et tout $t \in [0,1]$,**

$$f\left((1-t)x+ty\right) \leqslant (1-t)f(x) + t\,f(y)\ ,$$

c'est-à-dire si *le graphe de f est au-dessous des cordes.*

1. On suppose f différentiable sur U. Montrer qu'elle est convexe sur U si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geqslant \mathrm{D}f(x)(y-x) \text{ pour tous } x, y \in \mathrm{U}\ ,$$

ce qui revient à dire (si E $=\mathbb{R}$) que *le graphe de f est au-dessus des tangentes.*

2. Si E $=\mathbb{R}$, montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

3. *Application.* On donne $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit F l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 et telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Montrer que

$$\min_{f\in\mathrm{F}} \left(\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \right)$$

est atteint par la seule fonction affine qui appartient à F. Interprétation géométrique ?

[On pourra utiliser 2, puis 1, avec la fonction $u \longmapsto \sqrt{1+u^2}$.]

Commentaire. Les fonctions convexes sont un chapitre important du cours d'analyse, comme passerelle (dans les deux sens) entre propriétés géométriques et inégalités dites « de convexité ». On les a utilisées à l'Exercice 4 pour établir l'inégalité triangulaire des normes $\|.\|_p$, on les retrouvera aux Exercices 108 et 119 en liaison avec les dérivées secondes et les problèmes d'extremum (dont la question 3 donne ici un premier aperçu).

Une fonction f est convexe si et seulement si *l'image par f du barycentre de n points de* E *est inférieure au barycentre de leurs images* :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

pour tous λ_i positifs et de somme 1 ; l'équivalence de cette définition de la convexité avec celle donnée plus haut se vérifie aisément par récurrence sur n. Certains préféreront la définition équivalente plus sophistiquée « *la fonction f est convexe si son épigraphe est un ensemble convexe* », où l'épigraphe est (comme son nom l'indique) l'ensemble des points $(x, \lambda) \in \mathrm{E} \times \mathbb{R}$ qui sont au-dessus du graphe de f, i.e. tels que $x \in \mathrm{U}$ et $\lambda \geqslant f(x)$.

Les idées de la solution ci-dessous se comprendront aisément si (et seulement si) on les suit sur un dessin.

Solution. 1. Si f est convexe, notons $g(t) = f((1-t)x + ty)$ pour x, y fixés dans U. L'inégalité de définition de la convexité s'écrit alors

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leqslant \frac{g(1) - g(0)}{1} = f(y) - f(x) \text{ pour } 0 < t \leqslant 1$$

d'où, en faisant $t \to 0$,

$$g'(0) = \mathrm{D}f(x)(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \ .$$

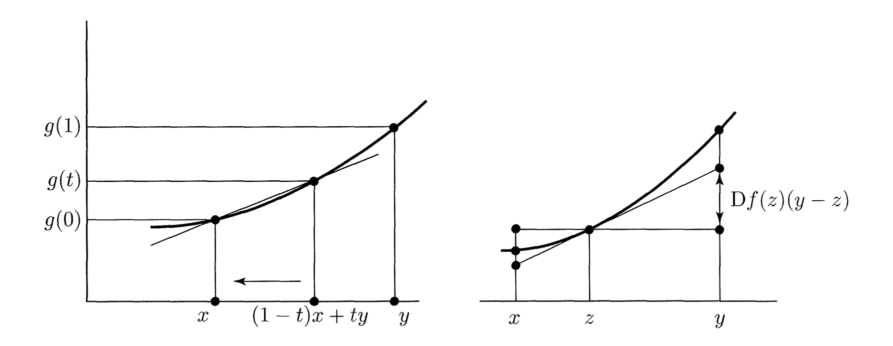


Fig. 67. Convexité et position du graphe par rapport aux tangentes.

Réciproquement, on suppose cette inégalité vérifiée en tous points de U. Appliquons-la entre x et z, puis entre y et z, avec $z = (1-t)x + ty$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Il vient

$$\mathrm{D}f(z)(x - z) \leqslant f(x) - f(z) \text{ et } \mathrm{D}f(z)(y - z) \leqslant f(y) - f(z) \ .$$

En multipliant la première inégalité par $1 - t$, la seconde par t et en ajoutant, on obtient

$$0 = \mathrm{D}f(z)((1-t)x + ty - z) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) - f(z) \, ;$$

par suite f est convexe.

2. Si f est convexe on a d'après 2, avec $x, y \in \mathrm{U}$ et $x \leqslant y$,

$$f'(x)(y-x) \leqslant f(y)-f(x) \text{ et } f'(y)(x-y) \leqslant f(x)-f(y) ,$$

d'où $f'(x) \leqslant f'(y)$ et f' est une fonction croissante.

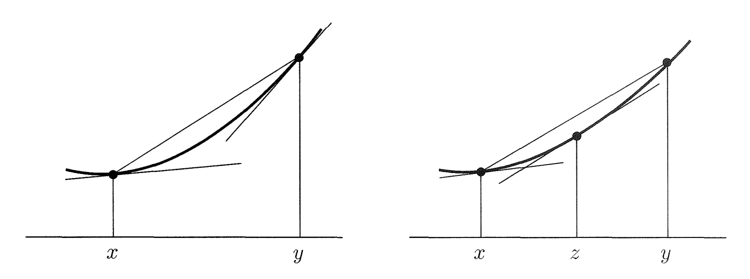


Fig. 68. Convexité de f et croissance de f'.

Réciproquement, si f' est croissante et $x \leqslant y$ il existe, d'après l'égalité des accroissements finis, un z entre x et y tel que

$$f(y)-f(x) = f'(z)(y-x) \geqslant f'(x)(y-x) .$$

Cette même inégalité reste valable si $y \leqslant x$ puisqu'on a alors $f'(z) \leqslant f'(x)$ et $y - x \leqslant 0$. Par suite f est convexe d'après 1.

3. La seule fonction affine élément de F est $g(x) = m(x-a) + \alpha$, de pente $m = (\beta - \alpha)/(b-a)$.

La fonction $\varphi(u) = \sqrt{1+u^2}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\varphi'(u) = u/\sqrt{1+u^2}$ est croissante, car $\varphi''(u) = (1+u^2)^{-3/2} > 0$. D'après 2, φ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ d'où, d'après 1,

$$\sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+m^2} \geqslant \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(u-m)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour $f \in \mathrm{F}$ on remplace u par $f'(x)$, m par $g'(x)$, et on intègre de a à b, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &- \int_a^b \sqrt{1+g'(x)^2}\,dx \\ &\geqslant \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b (f'(x)-m)\,dx \\ &\geqslant \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(f(b)-f(a)-m(b-a)) = 0 .\end{aligned}$$

Par suite la fonction affine g réalise le minimum de l'intégrale.

Interprétation géométrique. L'intégrale étudiée est la longueur du graphe de f : on peut en effet le voir comme l'arc paramétré $x \mapsto \gamma(x) = (x, f(x))$ du plan muni de la norme euclidienne, d'où $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, et appliquer l'Exercice 41. On retrouve ainsi le fait que la ligne droite est, parmi les graphes de fonctions C^1, le plus court chemin d'un point à un autre.

Exercice 43. ***Théorème de Sard en dimension un.*** **Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On note C l'ensemble des $x \in I$ tels que $f'(x) = 0$ (« *points critiques* » de f), et $f(C)$ l'ensemble des « *valeurs critiques* ». Montrer que $f(C)$ est une partie de mesure nulle de $\mathbb{R}$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $f(C)$ est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε.**

[On pourra montrer d'abord que, pour tout intervalle compact $J \subset I$, l'ensemble $f(C \cap J)$ est de mesure nulle, à l'aide de la continuité uniforme de f' sur J et de l'inégalité de la moyenne.]

Commentaire. Cet énoncé donne le cas le plus accessible du résultat général suivant. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. Soit C l'ensemble des *points critiques* de f, i.e. des points x de U tels que l'application linéaire $Df(x)$ ne soit pas surjective (ou de rang $< p$). Alors *l'ensemble $f(C)$ des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$, si $k \geqslant 1$ et $k \geqslant n - p + 1$.*

Sur l'usage de ce théorème en géométrie différentielle, en liaison avec l'importante notion de transversalité, voir Demazure [14] chapitre 3. La preuve ci-dessous pour $n = p = 1$ s'étend sans grande difficulté à tous les cas $n = p$ (voir Berger et Gostiaux [4] p. 157, ou Lafontaine [28] p. 39). Le cas $n < p$ est facile, mais le cas $n > p$ est sensiblement plus difficile (voir Dieudonné [19] p. 161).

Heuristique. L'énoncé assure que l'ensemble image $f(C)$ est petit, mais ne dit rien sur la grosseur de l'ensemble C lui-même : penser au cas extrême où f est une fonction constante, pour lequel $C = I$ mais $f(C)$ se réduit à un point ! L'idée de la preuve est que f varie très peu au voisinage d'un point critique (point où la dérivée s'annule) ; la partie correspondante du graphe de f est presque horizontale, et la contribution de ce voisinage à l'ensemble image est donc de longueur très petite sur l'axe des ordonnées.

Solution. Pour mettre en forme cette idée, on prend $\varepsilon > 0$ et un intervalle compact J de longueur ℓ contenu dans I. D'après la continuité uniforme de f' sur J, il existe un entier n tel que, pour tous $u, v \in J$,

$$|f'(u) - f'(v)| \leqslant \varepsilon \text{ si } |u - v| \leqslant \frac{\ell}{n} .$$

Pour exploiter cette inégalité, on subdivise J en n intervalles compacts $J_1, \ldots, J_n$ de longueur ℓ/n. Si d'aventure un intervalle J_k rencontre C en (au moins) un point x, on a $f'(x) = 0$ d'où $|f'(u)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $u \in J_k$.

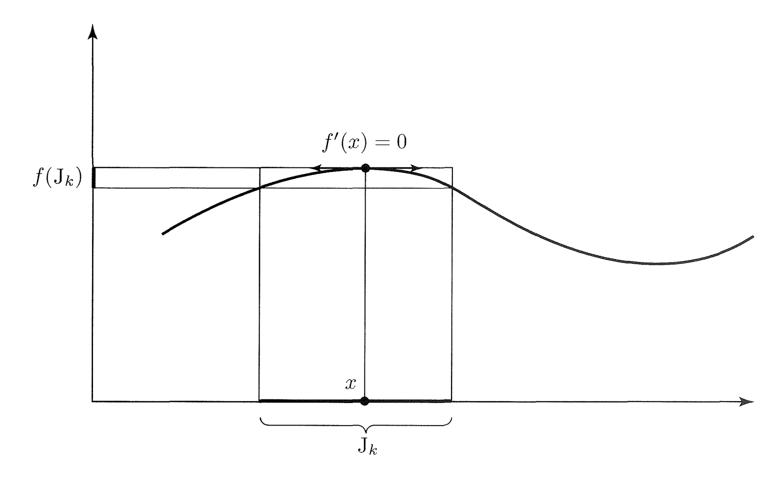


Fig. 69. Graphe de f au voisinage d'un point critique.

L'inégalité de la moyenne donne alors

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon|u - v| \leqslant \varepsilon\frac{\ell}{n} \text{ si } u, v \in \mathrm{J}_k \,;$$

par suite l'intervalle image $f(\mathrm{J}_k)$ est de longueur inférieure à $\varepsilon\ell/n$. L'ensemble $f(\mathrm{C} \cap \mathrm{J})$ est donc contenu dans la réunion de ces $f(\mathrm{J}_k)$, donc dans la réunion d'au plus n intervalles de longueur au plus $\varepsilon\ell/n$, dont la somme des longueurs est au plus $\varepsilon\ell$. Comme ε peut être pris arbitrairement petit, ceci montre que $f(\mathrm{C} \cap \mathrm{J})$ est de mesure nulle.

On termine par un argument classique de théorie de la mesure, la stabilité par réunion dénombrable de la propriété de mesure nulle. On peut en effet écrire $\mathrm{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$, réunion d'une suite d'intervalles compacts I_n ; pour chacun d'eux $f(\mathrm{C} \cap \mathrm{I}_n)$ est, d'après ce qui précède, contenu dans une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est, par exemple, inférieure à $\varepsilon/2^n$. Alors l'ensemble des valeurs critiques

$$f(\mathrm{C}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(\mathrm{C} \cap \mathrm{I}_n)$$

est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $(\varepsilon/2) + \cdots + (\varepsilon/2^n) + \cdots = \varepsilon$, d'où le résultat.

Exercice 44. ***Inéquations différentielles ; application aux équations différentielles.*** **L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|.\|$.**

1. Soient I un intervalle ouvert, $u : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable, k une constante positive et t_0 un point de I. On suppose que

$$\|u'(t)\| \leqslant k\,\|u(t)\| \text{ pour tout } t \in \mathrm{I} \text{ , et } u(t_0) = 0 \text{ .}$$

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que u soit identiquement nulle sur l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$.

[On pourra raisonner sur $M = \max \|u(t)\|$, où le maximum est pris sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.]
En déduire que u est identiquement nulle sur I.

2. *Application.* Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, supposée *k-lipschitzienne par rapport à y*, i.e.

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k \|y - z\|$$

pour tous $(t,y), (t,z) \in U$. Déduire de 1 que le système différentiel

$$y' = f(t,y) \ , \ y(t_0) = x \ ,$$

avec $(t_0, x) \in U$ donné, admet au plus une solution définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.

[On pourra raisonner sur la différence des deux solutions.]

3. *Lemme de Gronwall.* Soient v, α, β trois fonctions réelles continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$ et $\beta \geqslant 0$ sur $[a,b]$. On suppose que, pour tout $t \in [a,b]$,

$$v(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)v(s)\,ds \ .$$

Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$,

$$v(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(u)du\right)\,ds \ .$$

[On pourra former une inéquation différentielle vérifiée par la fonction $w(t) = \int_a^t \beta v$, et s'inspirer de la méthode de résolution de l'équation différentielle correspondante.]

4. *Application.* Sous l'hypothèse de 2, soient y_1 et y_2 deux solutions du système différentiel $y' = f(t,y)$ sur un intervalle ouvert I contenant t_0, de conditions initiales respectives $y_1(t_0) = x_1$ et $y_2(t_0) = x_2$. Déduire du lemme de Gronwall l'inégalité, pour $t \in I$,

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| \ e^{k|t-t_0|} \ .$$

[On pourra prendre pour $v(t)$ le premier membre de cette inégalité, et raisonner d'abord pour $t \geqslant t_0$.]

Commentaire. Les méthodes introduites ici sont fondamentales dans la théorie des équations différentielles ! L'hypothèse « k-lipschitzienne en y » est vérifiée notamment dès que f est de classe C^1 sur U, en se restreignant à un compact convexe de U sur lequel on peut majorer par k la norme

d'application linéaire de $D_y f(t, y)$, et appliquer l'inégalité de la moyenne sur la variable y.

Le résultat simple de 1 conduit directement à un théorème d'*unicité des solutions* (question 2).

On trouvera dans la littérature sur les équations différentielles plusieurs variantes du lemme de Gronwall ; on se contente souvent de l'établir avec β (ou même α) fonctions constantes, ce qui suffit pour les utilisations les plus courantes. On l'applique ici à un premier résultat sur la *dépendance des solutions par rapport à la donnée initiale* x (question 4), qui redonne l'*unicité* précédente en prenant $x_1 = x_2$. Le lemme de Gronwall intervient aussi dans certaines preuves de théorèmes d'*existence de solutions* ; voir par exemple Cartan [8] p. 116-124, Demailly [13] p. 130 et 284, etc.

Solution. 1. Soit $h > 0$ assez petit pour que le segment $J = [t_0 - h, t_0 + h]$ soit contenu dans I. Soit M le maximum sur J de la fonction continue $\|u\|$. Pour $t \in J$ on a $\|u'(t)\| \leqslant kM$ d'où, par l'inégalité de la moyenne entre t_0 et t,

$$\|u(t)\| \leqslant kM|t - t_0| \leqslant kMh \ .$$

Par suite $M \leqslant kMh$, et $M = 0$ si on choisit h assez petit pour que $kh < 1$. Alors u est identiquement nulle sur J.

L'ensemble des points de I où s'annule u est donc ouvert dans I (si u s'annule en t_0, elle s'annule au voisinage), fermé dans I (car u est une fonction continue sur I), et contient le point donné t_0. Comme I est connexe, cet ensemble est I tout entier.

Variante. Avec les notations précédentes, on pouvait aussi montrer par récurrence sur p l'inégalité

$$\|u(t)\| \leqslant M\frac{(k|t - t_0|)^p}{p!} \ , \ t \in J \ ;$$

le cas $p = 1$ a été établi ci-dessus, et le passage de p à $p + 1$ résulte de $\|u'\| \leqslant k\,\|u\|$ et du Théorème 3.2 appliqué entre t_0 et t. On en déduit $u(t) = 0$ en faisant $p \to \infty$.

2. Dire que $y(t)$est une solution[3] du problème sur l'intervalle I signifie que $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable, que $(t, y(t))$ appartient à U pour tout $t \in I$, et que $y'(t) = f(t, y(t))$, avec $y(t_0) = x$. Soit de même $z(t)$ une autre solution de ce problème, *définie sur le même intervalle* I.

L'hypothèse permet d'écrire

$$\|y'(t) - z'(t)\| = \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leqslant k\,\|y(t) - z(t)\| \ .$$

En appliquant 1 à la fonction vectorielle $u(t) = y(t) - z(t)$, on conclut que $y(t) = z(t)$ pour tout $t \in I$.

3. On admet ici l'existence d'une solution ; voir l'Exercice 60, où existence et unicité seront établies simultanément grâce au théorème du point fixe.

3. L'égalité $w(t) = \int_a^t \beta(s)v(s)ds$ définit une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$, avec $w'(t) = \beta(t)v(t)$. En multipliant par $\beta(t) \geqslant 0$, l'hypothèse entraîne

$$w'(t) \leqslant \beta(t)w(t) + \alpha(t)\beta(t) \ , \ w(a) = 0 \ .$$

Pour résoudre cette *inéquation différentielle*, on s'inspire de la méthode classique de résolution de l'équation différentielle linéaire $w' = \beta w + \alpha\beta$: résoudre l'équation homogène $w' = \beta w$, puis faire « varier la constante », ce qui revient à introduire la primitive

$$\mathrm{B}(t) = \int_a^t \beta(s)\, ds$$

et à raisonner sur la fonction $\exp(-\mathrm{B}(t))\, w(t)$. On a ainsi

$$\left(e^{-\mathrm{B}}w\right)' = e^{-\mathrm{B}}(w' - \beta w) \leqslant e^{-\mathrm{B}}\alpha\beta$$

d'où, en intégrant de a à t compte tenu de $w(a) = 0$,

$$e^{-\mathrm{B}(t)}w(t) \leqslant \int_a^t e^{-\mathrm{B}(s)}\alpha(s)\beta(s)\, ds \ ,$$

c'est-à-dire

$$w(t) \leqslant \int_a^t e^{\mathrm{B}(t)-\mathrm{B}(s)}\alpha(s)\beta(s)\, ds \ .$$

Enfin $\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(s) = \int_s^t \beta(u)du$, et on revient à $v(t)$ grâce à l'inégalité de départ $v(t) \leqslant \alpha(t) + w(t)$, d'où le résultat.

4. On a maintenant, pour $i = 1, 2$ et $t \in \mathrm{I}$,

$$y_i'(t) = f(t, y_i(t)) \ , \ y_i(t_0) = x_i \ .$$

Noter que les fonctions y_i sont nécessairement de classe C^1 sur I, puisque f est continue. Soit $v(t) = \|y_1(t) - y_2(t)\|$. Pour $t \in \mathrm{I}$ et $t \geqslant t_0$ on a

$$\begin{aligned} v(t) &= \left\| x_1 - x_2 + \int_{t_0}^t (y_1'(s) - y_2'(s))\, ds \right\| \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^t \|y_1'(s) - y_2'(s)\|\, ds \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| + k \int_{t_0}^t \|y_1(s) - y_2(s)\|\, ds \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse sur f, c'est-à-dire

$$v(t) \leqslant \|x_1 - x_2\| + k \int_{t_0}^t v(s)\, ds \ .$$

Le lemme de Gronwall appliqué avec α et β constants donne alors, après un calcul immédiat,

$$v(t) \leqslant \|x_1 - x_2\| \, e^{k(t-t_0)}$$

pour $t \in \mathrm{I}$ et $t \geqslant t_0$. Pour $t \leqslant t_0$ on peut reprendre l'argument en changeant t en $-t$, d'où finalement

$$v(t) = \|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| \, e^{k|t-t_0|}$$

pour tout $t \in \mathrm{I}$.

Pour $x_1 = x_2$ on retrouve bien entendu le résultat d'unicité de la question 2.

Exercice 45. ***Petits mouvements du pendule.*** **On considère l'équation différentielle du second ordre**

$$x''(t) = -\sin x(t) \ , \ x(0) = a \ , \ x'(0) = 0 \ ,$$

vérifiée par l'angle $x(t)$ que fait avec la verticale, à l'instant t, un pendule simple lâché sans vitesse initiale à l'instant 0, avec l'angle initial $a \in \,]0, \pi[$. On admettra ici l'existence d'une solution $x(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (Exercice 60, question 6).

1. Montrer que $x'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a)$, et en déduire que $|x(t)| \leqslant a$ pour tout t.

2.Soit

$$y''(t) = -y(t) \ , \ y(0) = a \ , \ y'(0) = 0$$

le *problème linéarisé* correspondant. Montrer que le vecteur $\mathrm{Z} = (x - y, x' - y')$ (à écrire en colonne) vérifie un système différentiel du premier ordre de la forme $\mathrm{Z}'(t) = \mathrm{AZ}(t) + \mathrm{B}(t)$, où A est une matrice antisymétrique. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{a^3}{6}|t| \ .$$

[On pourra utiliser la majoration $|x - \sin x| \leqslant |x|^3/6 \leqslant a^3/6$ et l'inégalité de la moyenne en norme euclidienne, norme conservée par $e^{-t\mathrm{A}}$.]

Commentaire. C'est l'exemple le plus connu de l'importante méthode de *linéarisation d'une équation différentielle au voisinage d'une position d'équilibre* : « comme les oscillations sont petites on a $\sin x \simeq x$ donc $x'' \simeq -x$ d'où $x \simeq a \cos t$ »..., argument définitif et sans réplique asséné à des générations de potaches qui le gobent sans sourciller ! C'est bien sûr dans le *d'où* final que gît le lièvre : pour remonter à la fonction $x(t)$ l'approximation de sa dérivée seconde, on a besoin d'une inégalité de la moyenne.

L'inégalité obtenue ici montre que, pour a petit, la solution exacte $x(t)$ reste proche de la solution $y(t) = a\cos t$ du problème linéarisé, du moins tant que t n'est pas trop grand. Elle perd tout intérêt quand t devient grand : $y(t)$ oscille entre a et $-a$ avec la période 2π, et on peut montrer que $x(t)$ oscille entre ces mêmes valeurs avec la période $\mathrm{T}(a) = 2\pi\left(1 + (a^2/16) + \cdots\right)$.

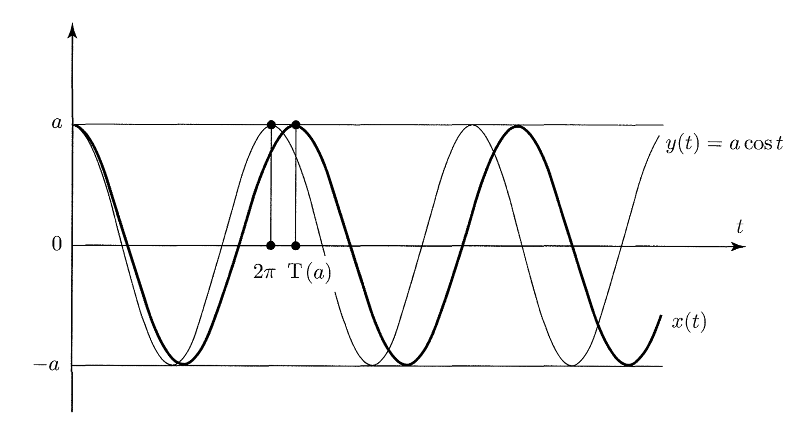


Fig. 70. Linéarisation de l'équation du pendule.

Ces deux mouvements seront donc sensiblement en opposition de phase après environ $8/a^2$périodes ; pire encore, le premier membre de l'inégalité de la question 2 reste borné par $2a$ alors que le second tend vers l'infini avec t. On verra cependant à l'Exercice 46 une situation où la méthode de linéarisation donne de bons résultats pour t grand (stabilité d'un équilibre, sous une hypothèse sur les valeurs propres du système linéarisé).

Pour approfondir l'équation du pendule, voir Arnold [1] §12 et p. 239, Demailly [13] p. 293.

Solution. 1. En multipliant par $2x'$ on obtient $2x'x'' + 2\sin x \cdot x' = 0$, par suite la fonction $x'(t)^2 - 2\cos x(t)$ reste constante ; c'est la classique *intégrale première* de l'énergie (cf. Exercice 23). Sa valeur à l'instant initial est $-2\cos a$, ce qui donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a) .$$

On a donc $\cos x(t) \geqslant \cos a$, et $x(t)$ appartient à l'un des intervalles $[-a + 2k\pi, a + 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces intervalles sont deux à deux disjoints car $0 < a < \pi$; comme $x(0) = a$, le théorème de la valeur intermédiaire interdit à $x(t)$ de sortir de l'intervalle $[-a, a]$.

2. Les équations du second ordre vérifiées par x et y se ramènent à des systèmes de deux équations du premier ordre en posant

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \text{ d'où } \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ -\sin x \end{pmatrix}, \mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ -y \end{pmatrix},$$

et la différence $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$ vérifie

$$\mathrm{Z}'(t) = \mathrm{AZ}(t) + \mathrm{B}(t) \ ,$$

avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x(t) - \sin x(t) \end{pmatrix} .$$

Le système linéaire $\mathrm{Z}' = \mathrm{AZ} + \mathrm{B}$ se résout comme d'habitude par la méthode de variation de la constante, qui revient à introduire la fonction $e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{Z}(t)$:

$$\left(e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{Z}(t)\right)' = e^{-t\mathrm{A}}\left(\mathrm{Z}'(t) - \mathrm{AZ}(t)\right) = e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{B}(t) \ .$$

L'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une rotation du plan (Exercice 16), ce qui incite à utiliser la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ pour effectuer les majorations. On a d'abord

$$\left\|\left(e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{Z}(t)\right)'\right\| = \left\|e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{B}(t)\right\| = \|\mathrm{B}(t)\| = |x(t) - \sin x(t)| \ .$$

Or, pour tout x réel,

$$|x - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{6} \ .$$

Il suffit en effet de le voir pour $x \geqslant 0$; pour cela, on part de $\cos x \leqslant 1$ d'où, en, intégrant de 0 à x trois fois de suite, $\sin x \leqslant x$ puis $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant x^2/2$ et enfin $0 \leqslant x - \sin x \leqslant x^3/6$.

D'après 1 on a $|x(t)| \leqslant a$ pour tout t, et il vient

$$\left\|\left(e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{Z}(t)\right)'\right\| \leqslant \frac{a^3}{6} \ ,$$

d'où, par l'inégalité de la moyenne entre 0 et t,

$$\left\|e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{Z}(t)\right\| = \|\mathrm{Z}(t)\| \leqslant \frac{a^3}{6}|t| \ .$$

En particulier la première composante de $\mathrm{Z}(t)$ est majorée, ce qui donne l'inégalité demandée.

Remarque. L'unicité de la solution $x(t)$ résulte facilement de l'Exercice 44, question 2 : le vecteur $\mathrm{X} = (x, x')$ vérifie l'équation $\mathrm{X}' = f(t, \mathrm{X})$, où $f(t,(u,v)) = (v, -\sin u)$ est une application 1-lipschitzienne en (u, v).

Exercice 46. ***Fonction de Liapounov et stabilité.* Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 ; on suppose $f(0) = 0$ et on note $\mathrm{A} = \mathrm{D}f(0)$.**

Le but de l'exercice est de comparer le comportement des solutions du système différentiel

$$y' = f(y) \ , \ y(0) = x$$

à celui des solutions du *système linéarisé* au voisinage de l'équilibre 0 :

$$z' = \mathrm{A}z \ , \ z(0) = x \ .$$

On suppose que *toutes les valeurs propres de* A *sont de partie réelle strictement négative.* On note $(\cdot)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne correspondante.

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|e^{t\mathrm{A}}x\right\| \leqslant \mathrm{P}(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}\right)\|x\| \ .$$

[On pourra utiliser la décomposition $\mathbb{C}^n = \oplus_j \ker(\mathrm{A} - \lambda_j \mathrm{I})^{m_j}$ en sous-espaces caractéristiques de A.]

2. En déduire le comportement de $z(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

3. Déduire de 1 que l'intégrale

$$b(x, y) = \int_0^{\infty} (e^{t\mathrm{A}}x \cdot e^{t\mathrm{A}}y)\, dt$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et que la forme quadratique $q(x) = b(x, x)$ (appelée *fonction de Liapounov*) est définie positive.

4. Vérifier l'égalité

$$\mathrm{grad}\, q(x) \cdot \mathrm{A}x = 2b(x, \mathrm{A}x) = -\|x\|^2 \ .$$

Dans la suite on admet l'existence d'une solution $y(t)$ du problème initial, définie pour tout $t \geqslant 0$. On note $r(y) = f(y) - \mathrm{A}y$.

5. Vérifier l'égalité

$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \ ,$$

et montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que l'inégalité $q(y) \leqslant \alpha$ entraîne

$$-\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -\beta q(y) \ .$$

[On pourra traduire la différentiabilité de f en 0 en utilisant la norme définie par q.]

6. En déduire que l'inégalité $q(x) < \alpha$ entraîne $q(y(t)) \leqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$, et finalement

$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x) \; .$$

Énoncer le résultat obtenu pour le système différentiel.

Commentaire. Ce théorème de Liapounov est un succès éclatant de la méthode de linéarisation : sous l'hypothèse de partie réelle strictement négative des valeurs propres de $\mathrm{A} = \mathrm{D}f(0)$, la propriété « l'origine est un point d'équilibre attractif » se transmet du système différentiel linéaire $z' = \mathrm{A}z$ au système perturbé par le petit terme correctif r

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ &= \mathrm{A}y + r(y) = \mathrm{D}f(0)y + o(y) \; . \end{aligned}$$

En contraste avec l'Exercice 45 on peut ici obtenir des inégalités significatives pour t grand, à l'interprétation géométrique très claire : partie de x à l'instant initial, la solution $y(t)$ *est contrainte d'entrer dans des ellipsoïdes de plus en plus petits*, qui l'obligent à tendre vers 0 quand t tend vers l'infini. L'existence de $y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, admise ici par commodité, pourrait s'obtenir aisément en cours de route : la décroissance de $q(y(t))$ oblige $y(t)$ à rester bornée, et l'empêche donc d'exploser en un temps fini[4].

Les trois premières questions donnent une construction d'une fonction de Liapounov adaptée au problème ; les trois dernières détaillent son utilisation dans l'étude de l'équation $y' = f(y)$.

On trouvera dans Coddington et Levinson [11] p. 315 une autre preuve du théorème de Liapounov, plus directe mais moins géométrique, basée sur le lemme de Gronwall. Voir aussi Arnold [1] §22 et 23, Demazure [14] p. 229 et 253.

Solution. 1. [Cette question n'utilise pas l'hypothèse sur les valeurs propres de A.] On démontre en algèbre linéaire que tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ peut se décomposer (de manière unique) selon

$$x = x_1 + \cdots + x_k \text{ , avec } x_j \in \mathrm{E}_j = \ker(\mathrm{A} - \lambda_j \mathrm{I})^{m_j} \; ,$$

où m_j est la multiplicité de la valeur propre λ_j. Chaque sous-espace E_j est stable par A et

$$e^{t\mathrm{A}} x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(\mathrm{A}-\lambda_j \mathrm{I})} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \leqslant p < m_j} \frac{t^p}{p!} (\mathrm{A} - \lambda_j \mathrm{I})^p \right) x_j \; .$$

4. Voir à l'Exercice 125 question 3 un exemple de cet argument.

L'espace $\mathbb{C}^n$ étant muni d'une norme quelconque, on a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, une inégalité de la forme

$$\left\|e^{t\mathrm{A}}x_j\right\| \leqslant e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}\mathrm{C}_j(1+|t|)^{m_j-1}\left\|x_j\right\| \leqslant \mathrm{C}e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}(1+|t|)^{n-1}\left\|x_j\right\| \ ,$$

où C_j et C sont des constantes positives. Il vient, pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}\left\|e^{t\mathrm{A}}x\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^{k}\left\|e^{t\mathrm{A}}x_j\right\| \\ &\leqslant \mathrm{C}(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}\right)\max_j \left\|x_j\right\| \ ,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée, compte tenu de l'équivalence des normes.

2. La solution du système linéarisé est $z(t) = e^{t\mathrm{A}}x$. D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a > 0$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda_j < -a$ pour $j = 1, \ldots, k$. L'inégalité de 1 entraîne

$$\|z(t)\| \leqslant \mathrm{C}e^{-at}\|x\| \ ,$$

puisque chaque $\mathrm{P}(|t|)e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}e^{at}$, qui tend vers 0 à l'infini, est borné pour $t \geqslant 0$. Ainsi $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et l'origine est *point d'équilibre attractif.*

Voir par exemple Demailly [13] p. 274 sq. pour les aspects possibles des trajectoires en dimension deux (nœud stable ou foyer stable).

3. D'après 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\left|e^{t\mathrm{A}}x \cdot e^{t\mathrm{A}}y\right| \leqslant \left\|e^{t\mathrm{A}}x\right\| \cdot \left\|e^{t\mathrm{A}}y\right\| \leqslant \mathrm{C}^2e^{-2at}\|x\| \cdot \|y\| \ ,$$

d'où la convergence absolue de l'intégrale proposée, qui définit évidemment une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De plus

$$q(x) = b(x,x) = \int_0^\infty \left\|e^{t\mathrm{A}}x\right\|^2 dt$$

est positif pour tout x, et s'annule si et seulement si la fonction continue sous l'intégrale est identiquement nulle, c'est-à-dire $x = 0$. Donc q est définie positive.

4. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2q(y) \ ,$$

d'où en dérivant en $t = 0$

$$\mathrm{D}q(x)y = \left.\frac{d}{dt}q(x+ty)\right|_{t=0} = 2b(x,y) \ .$$

En particulier

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} q(x) \cdot \mathrm{A}x = \mathrm{D}q(x)\mathrm{A}x &= 2b(x, \mathrm{A}x) \\ &= \int_0^\infty 2\left(e^{t\mathrm{A}}x\right) \cdot \left(e^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}x\right) dt\,;\end{aligned}$$

or l'intégrand est la dérivée par rapport à t de $\left(e^{t\mathrm{A}}x\right) \cdot \left(e^{t\mathrm{A}}x\right)$, d'où finalement (en utilisant à nouveau le résultat de 2)

$$\operatorname{grad} q(x) \cdot \mathrm{A}x = 2b(x, \mathrm{A}x) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\left\|e^{t\mathrm{A}}x\right\|^2\right]_{t=0}^{t=\mathrm{T}} = -\left\|x\right\|^2 .$$

En dimension deux, la courbe de niveau de q passant par x est une ellipse de centre 0, le vecteur $\operatorname{grad} q(x)$ est normal en x à cette ellipse, et le vecteur $\mathrm{A}x = z'(0)$ est dirigé vers l'intérieur puisque leur produit scalaire, égal à $-\left\|x\right\|^2$, est négatif.

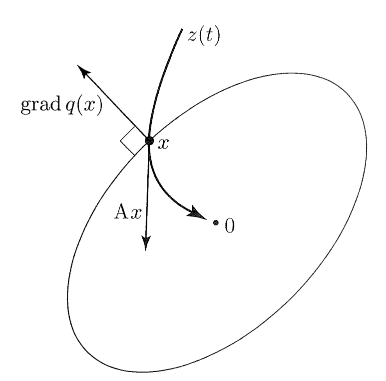


Fig. 71. Trajectoire du système linéarisé et courbe de niveau de la fonction de Liapounov.

Remarque. On a ainsi prouvé un lemme d'algèbre linéaire : si une matrice réelle A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, il existe une matrice réelle B, symétrique définie positive, telle que

$$\mathrm{BA} + {}^t\mathrm{AB} = -\mathrm{I}\,;$$

c'est la traduction matricielle de l'égalité précédente, B étant la matrice de q. Pour une preuve purement algébrique, voir Demazure [14] p. 229.

5. Comme en 4 on a, avec $y = y(t)$ et $y' = f(y) = \mathrm{A}y + r(y)$,

$$\begin{aligned}q(y)' = \mathrm{D}q(y)y' = 2b(y, y') &= 2b(y, \mathrm{A}y) + 2b(y, r(y)) \\ &= -\left\|y\right\|^2 + 2b(y, r(y))\,;\end{aligned}$$

noter qu'on aurait simplement $q(z)' = -\|z\|^2$ pour le système linéarisé. L'idée est que, r étant petit, les fonctions $q(y(t))$ et $q(z(t))$ auront à peu près le même comportement pour $t \to \infty$. Pour préciser cela on va majorer $b(y, r(y))$ en utilisant, par commodité, la norme donnée par la forme quadratique q. On a

$$|b(y, r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)} \cdot \sqrt{q(r(y))}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz). Comme $r(y) = f(y) - f(0) - \mathrm{D}f(0)y$, la définition de la différentielle montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) \leqslant \alpha$ entraîne $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$; par suite

$$2b(y, r(y)) \leqslant 2\varepsilon q(y) \ .$$

Enfin, d'après l'équivalence des normes $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\mathrm{C}q(y) \leqslant \|y\|^2$, d'où finalement

$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -\beta q(y)$$

pour $q(y) \leqslant \alpha$, avec $\beta = \mathrm{C} - 2\varepsilon$ (qui est positif si on choisit $\varepsilon < \mathrm{C}/2$).

6. D'après 5 on a $q(y(t))' \leqslant -\beta q(y(t))$ tant que $q(y(t))$ reste inférieur ou égal à α. Cette condition est satisfaite pour tout $t \geqslant 0$ si la donnée initiale x vérifie $q(x) < \alpha$; sinon il existerait un premier instant $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \alpha$, d'où $q(y)'(t_0) \leqslant -\beta q(y(t_0)) < 0$ et $q(y(t))$ devrait être strictement plus grand que α pour t légèrement inférieur à t_0, ce qui contredirait la définition de t_0.

L'inéquation différentielle vérifiée par $q(y)$ se résout de la manière habituelle :

$$\left(e^{\beta t} q(y)\right)' = e^{\beta t}\left(q(y)' + \beta q(y)\right) \leqslant 0 \ ,$$

qui entraîne en particulier, compte tenu de $y(0) = x$,

$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x) \text{ pour tout } t \geqslant 0 \ .$$

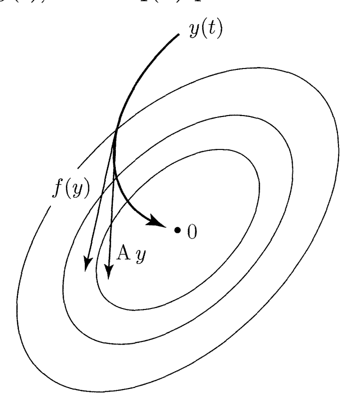


Fig. 72. Trajectoire du système et courbes de niveau de la fonction de Liapounov.

On voit donc que $y(t)$ tend exponentiellement vers 0, tout comme la solution $z(t)$ du système linéarisé. En résumé on a le

Théorème de Liapounov. *Soit le système différentiel*

$$y' = f(y) \; , \; y(0) = x$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *et* $f(0) = 0$*. Si la matrice* $\mathrm{D}f(0)$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : pour tout* x *assez voisin de* 0*, la solution* $y(t)$ *tend exponentiellement vers* 0 *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

Exercice 47. ***Un pas vers le calcul des variations.* Soient $\mathrm{I} = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et E l'espace des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, muni de la norme**

$$\|f\| = \max_{x \in \mathrm{I}} |f(x)| + \max_{x \in \mathrm{I}} |f'(x)| \; .$$

Une fonction $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, définit une « fonctionnelle » $\mathcal{F}$ sur E par

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) \, dx \; .$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une fonction différentiable sur E et que, pour toutes fonctions $f, h \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = \int_a^b (\partial_2\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) \, h(x) + \partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) \, h'(x)) \, dx$$

en notant $\partial_2\mathcal{L}$ et $\partial_3\mathcal{L}$ les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à ses deuxième et troisième variables.

[On pourra utiliser la continuité uniforme de $\mathrm{D}\mathcal{L}$ sur un compact de $\mathbb{R}^3$ et l'inégalité de la moyenne, avant d'intégrer de a à b.]

Commentaire. Comme à l'Exercice 27 on calcule ici la différentielle d'une application définie sur un espace de fonctions (de dimension infinie). Ce calcul servira à résoudre le problème fondamental du « *calcul des variations* » : rechercher les fonctions f qui rendent minimum la valeur de la fonctionnelle $\mathcal{F}(f)$ définie par le « *lagrangien* » $\mathcal{L}$. Deuxième pas à l'Exercice 133.

Solution. Pour étudier l'accroissement $\mathcal{F}(f + h) - \mathcal{F}(f)$ on va considérer d'abord l'accroissement correspondant de $\mathcal{L}$, en recherchant des majorations uniformes que l'on pourra ensuite intégrer sur I. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$ (somme des valeurs absolues des composantes).

Soient R et ε deux nombres strictement positifs. Il existe alors $\alpha > 0$ (que l'on peut supposer inférieur à 1) tel que, pour $\mathrm{X}, \mathrm{H} \in \mathbb{R}^3$ avec $\|\mathrm{X}\|_1 \leqslant \mathrm{R}$ et $\|\mathrm{H}\|_1 \leqslant \alpha$, on ait

$$\|\mathrm{D}\mathcal{L}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - \mathrm{D}\mathcal{L}(\mathrm{X})\| \leqslant \varepsilon$$

(norme de forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$). Cela vient en effet de la continuité uniforme de la différentielle $\mathrm{D}\mathcal{L}$ sur la boule compacte de rayon $\mathrm{R}+1$ centrée à l'origine, boule qui contient les points X et $\mathrm{X}+\mathrm{H}$. On peut ensuite appliquer l'inégalité de la moyenne à la fonction numérique

$$g(\mathrm{H}) = \mathcal{L}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - \mathrm{D}\mathcal{L}(\mathrm{X})\mathrm{H}\ ,$$

où X est provisoirement fixé : on a $\|\mathrm{D}g(\mathrm{H})\| = \|\mathrm{D}\mathcal{L}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - \mathrm{D}\mathcal{L}(\mathrm{X})\| \leqslant \varepsilon$ d'où

$$|g(\mathrm{H}) - g(0)| = |\mathcal{L}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - \mathcal{L}(\mathrm{X}) - \mathrm{D}\mathcal{L}\mathrm{X})\mathrm{H}| \leqslant \varepsilon \|\mathrm{H}\|_1\ ,$$

valable pour $\|\mathrm{X}\|_1 \leqslant \mathrm{R}$ et $\|\mathrm{H}\|_1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Cette inégalité ressemble à la simple définition de la différentielle de $\mathcal{L}$, mais avec la précision supplémentaire que le nombre α est indépendant du point X choisi.

Étant donnée $f \in \mathrm{E}$, les fonctions f et f' sont bornées sur le compact I ; il existe donc $\mathrm{R} > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, le point $\mathrm{X} = (x, f(x), f'(x))$ vérifie $\|\mathrm{X}\|_1 \leqslant \mathrm{R}$. D'autre part, pour $h \in \mathrm{E}$ et tout $x \in \mathrm{I}$, le point $\mathrm{H} = (0, h(x), h'(x))$ vérifie $\|\mathrm{H}\|_1 \leqslant \|h\|$. D'après l'inégalité précédente on a donc (en omettant la variable x pour abréger)

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(x, f+h, f'+h') - \mathcal{L}(x, f, f') - \partial_2\mathcal{L}(x, f, f')h - \partial_3\mathcal{L}(x, f, f')h'| \\ \leqslant \varepsilon\,(|h| + |h'|) \leqslant \varepsilon \|h\|\end{aligned}$$

pour $x \in \mathrm{I}$ et $\|h\| \leqslant \alpha$. Il n'y a plus qu'à intégrer en x sur I pour obtenir

$$\left|\mathcal{F}(f+h) - \mathcal{F}(f) - \int_a^b (\partial_2\mathcal{L}(x, f, f')h + \partial_3\mathcal{L}(x, f, f')h')\,dx\right| \leqslant \varepsilon(b-a)\|h\|$$

d'où l'expression annoncée de la différentielle de $\mathcal{F}$.

Il ne faut pas oublier de s'assurer que cette expression définit bien une forme linéaire *continue* sur l'espace E. Or la valeur absolue de l'intégrale donnant $\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h$ se majore aussitôt par $\mathrm{M}(b-a)\|h\|$, où M est un majorant des dérivées partielles de $\mathcal{L}$ sur la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 4
Point fixe

1. Objectifs

Le théorème du point fixe joue un rôle central en calcul différentiel, comme clef des théorèmes des fonctions inverses, des fonctions implicites, et du théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles. Il appartient en fait au royaume de la Topologie, province des espaces métriques. L'abstraction de son énoncé, expression de la méthode générale des *approximations successives* (ou *méthode itérative*, ou *méthode de Picard*), lui permet de s'adapter à des applications très variées, comme on va voir dans ce chapitre et le suivant.

2. Panorama du cours

Un seul énoncé suffira ici, remarquablement simple et efficace, puisqu'il donne à la fois l'existence, l'unicité et une bonne méthode d'approche de la solution.

Théorème 4.1. *Soient* X *un espace métrique* complet *(non vide), d la distance de* X*, et* F *une application de* X dans lui-même. *On suppose* F contractante*, c'est-à-dire : il existe une constante positive k,* strictement inférieure à 1*, telle que*

$$d(\mathrm{F}(x), \mathrm{F}(y)) \leqslant k\, d(x, y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.

Alors il existe un unique point $a \in \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{F}(a) = a$ (point fixe de F*). De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ des itérés, définie par récurrence à partir d'un point quelconque x_0 de* X *selon $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$. On a plus précisément, pour $n \geqslant 1$,*

$$d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \ .$$

Comme toujours, chaque mot compte dans l'énoncé ; les contre-exemples suivants suffiront pour s'en convaincre.

Exemple 1. $\mathrm{X} =]0, 1[$ et $\mathrm{F}(x) = x/2$: l'application est contractante de X dans lui-même, mais sans point fixe (X n'est pas complet).

Exemple 2. $X = [0,1]$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$: l'espace est complet, F est contractante, mais sans point fixe (F n'applique pas X dans lui-même, puisque $F(X) = [1, \sqrt{2}]$).

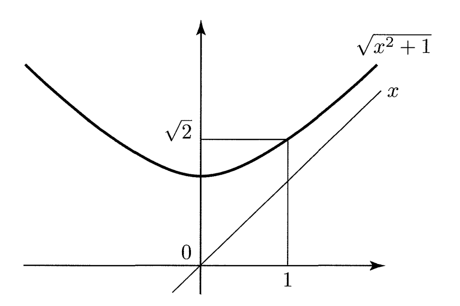


Fig. 73. Point fixe. Contre-exemple(s).

Exemple 3. $X = \mathbb{R}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$: l'espace est complet, F applique X dans lui-même, mais sans point fixe (F n'est pas contractante, bien que $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$).

Exemple 4. $X = [0, \pi/2]$ et $F(x) = \sin x$: l'espace est complet, F applique X dans X, mais n'est pas contractante. Il y a cependant point fixe unique ($x = 0$), mais la convergence vers ce point de la suite des itérés est très lente (voir Exercice 52).

Exemple 5. X est un espace complet quelconque et $F(x) = x$: tout point est fixe (F n'est pas contractante).

Pratiquement, le théorème du point fixe s'utilise souvent dans le cadre suivant : X est une partie convexe fermée (non vide) d'un espace de Banach E (par exemple un simple intervalle fermé de $E = \mathbb{R}$), $F : U \to E$ est une application différentiable sur un ouvert U de E contenant X, et il existe une constante $k < 1$ telle que $\|DF(x)\| \leqslant k$ (norme d'application linéaire) pour tout $x \in X$. L'inégalité de la moyenne entraîne alors que F est contractante. Pour appliquer le théorème du point fixe, il n'y a plus qu'à s'assurer que l'image F(X) est contenue dans X, ce qui n'est pas forcément évident (Exemple 2 ci-dessus !).

Ce théorème admet de nombreuses variantes, dont certaines sont détaillées dans les exercices de ce chapitre. Voir notamment aux Exercices 57 et 81 une utile *version avec paramètre.*

L'étude des suites d'itérés

$$x_n = F \circ \cdots \circ F(x_0) = F^n(x_0)$$

est, en dehors du cas simple de convergence vers un point fixe de F, extrêmement riche en questions difficiles. Elle est devenue récemment,

sous les noms de « systèmes dynamiques », « chaos » une discipline à part entière ; voir les livres de Devaney [15][16], et les exercices de Makarov *et al.* [46] chapitre 10.

Références. Ferrier [23] chapitre 6 ; Choquet [10] p. 81-84 ; Demailly [13] chapitre 4 ; Dieudonné [18] chapitre 10. Le Théorème 4.1 sera démontré à l'Exercice 55.

3. Exercices

Les exercices suivants ont pour but de mettre en œuvre la méthode sur des exemples simples (suites récurrentes, méthode de Newton, etc.), puis de donner diverses variantes du Théorème 4.1 et enfin de l'appliquer pour démontrer quelques résultats fondamentaux sur les équations différentielles ou intégrales. L'intervention du théorème du point fixe dans le problème des fonctions inverses ou implicites sera détaillée au chapitre 5, Exercices 71 et 86.

À part de fréquentes utilisations de l'inégalité de la moyenne, ce sont souvent des exercices de topologie plutôt que de calcul différentiel proprement dit.

Exercice 48. ***Attraction, répulsion, superattraction.*** **Soient $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$ un point fixe de F.**

1. On suppose $|F'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a, stable par F, et étudier la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \in J$.

2. Sous les conditions de 1, on suppose de plus que F' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$ on a $x_n \neq a$ pour tout n et

$$x_{n+1} - a \sim F'(a)(x_n - a) \text{ pour } n \longrightarrow \infty$$

(« *convergence d'ordre un* »).

3. Sous les conditions de 1, on suppose maintenant que F est de classe C^2, que $F'(a) = 0$ et que F'' ne s'annule pas sur J. Montrer que, si $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, on a $x_n \neq a$ pour tout n et

$$x_{n+1} - a \sim \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2 \text{ pour } n \longrightarrow \infty$$

(« *convergence d'ordre deux*[1] »).

4. On suppose enfin $|F'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a tel que, pour $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, la suite récurrente (x_n) sorte de J.

1. On dit aussi « convergence quadratique » — à ne pas confondre avec la convergence en moyenne quadratique !

Commentaire. Cet exercice élémentaire passe en revue les trois situations les plus courantes : point fixe *attractif* ($|F'(a)| < 1$), *superattractif* ($F'(a) = 0$), ou *répulsif* ($|F'(a)| > 1$). Les cas où $F'(a) = \pm 1$ sont plus délicats et peuvent donner lieu à des comportements variés : voir l'Exercice 52, ou l'exemple de $F(x) = 1 - x$ qui montre qu'un point fixe n'est pas nécessairement attirant ou repoussant (on a alors $x_{2n} = x_0$, $x_{2n+1} = 1 - x_0$).

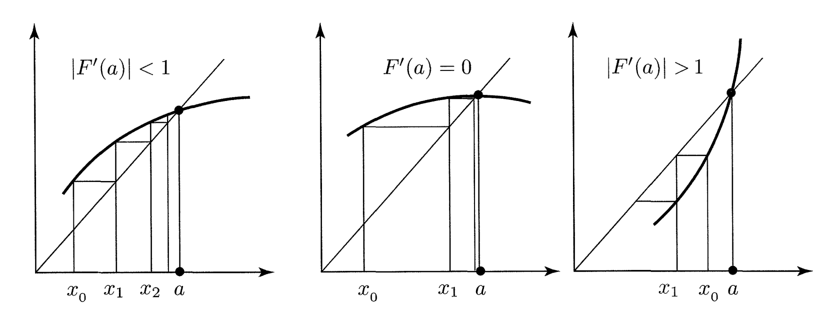


Fig. 74. Point fixe attractif, superattractif, ou répulsif.

Solution. 1. Soit k tel que $|F'(a)| < k < 1$. La continuité de F' sur l'intervalle ouvert I permet de choisir $h > 0$ tel que l'intervalle $J = [a-h, a+h]$ soit contenu dans I et que $|F'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in J$. L'inégalité de la moyenne

$$|F(x) - a| = |F(x) - F(a)| \leqslant k|x - a| \leqslant kh < h$$

montre que $F(J) \subset J$. Pour $x_0 \in J$ on a donc $x_n \in J$ et

$$|x_n - a| \leqslant k^n |x_0 - a| \ , \ n \geqslant 0 \ ,$$

par une récurrence immédiate, d'où la convergence de x_n vers le point fixe a.

Exemple. On peut souvent utiliser un intervalle stable J plus grand que le précédent. Ainsi le *nombre d'or* $a = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803...$ est la solution positive de l'équation $a^2 = a + 1$, c'est-à-dire le point fixe de la fonction $F_1(x) = \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle $J = [0, \infty[$. On a $|F_1'(x)| \leqslant 1/2$ sur J, d'où la convergence des itérés vers

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} \ .$$

La fonction $F_2(x) = 1 + (1/x)$ admet aussi a pour unique point fixe positif ; on a $|F_2'(x)| \leqslant 1/2$ sur l'intervalle stable $J = [\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ (par exemple),

d'où la convergence des itérés vers

$$a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}} .$$

Une convergence plus rapide vers a est donnée par la méthode de Newton appliquée à l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (Exercice 49).

2. L'inégalité précédente est essentiellement optimale, comme on va voir. D'après l'égalité des accroissements finis on a

$$x_{n+1} - a = \mathrm{F}(x_n) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}'(y_n)(x_n - a) \ , \mathrm{n} \geqslant 0 \ ,$$

avec y_n entre a et x_n. Si F′ ne s'annule pas sur J, la propriété $x_0 \neq a$ entraîne $x_n \neq a$ pour tout n et

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} \to \mathrm{F}'(a) \text{ quand } n \to \infty .$$

3. Comme en 2, mais avec la formule de Taylor à l'ordre deux, on peut écrire

$$x_{n+1} - a = \mathrm{F}(x_n) - \mathrm{F}(a) = \frac{\mathrm{F}''(z_n)}{2} (x_n - a)^2 \ , n \geqslant 0 \ ,$$

avec z_n entre a et x_n, puisque $\mathrm{F}'(a) = 0$; d'où $x_n \neq a$ si $x_0 \neq a$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \to \frac{\mathrm{F}''(a)}{2} \text{ quand } n \to \infty .$$

Si $x_n - a$ est de l'ordre de 10^{-p}, le terme suivant $x_{n+1} - a$ sera donc de l'ordre de 10^{-2p} : le nombre de décimales exactes dans l'approximation de a par x_n est sensiblement doublé à chaque pas de l'itération ! Cette remarquable propriété est exploitée par la *méthode de Newton* (Exercice 49).

4. Soit k tel que $|\mathrm{F}'(a)| > k > 1$. On peut alors choisir $h > 0$ tel que l'intervalle $\mathrm{J} = [a - h, a + h]$ soit contenu dans I et que $|\mathrm{F}'(x)| \geqslant k$ pour tout $x \in \mathrm{J}$. Soit $x_0 \in \mathrm{J}$; si $x_n \in \mathrm{J}$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|x_{n+1} - a| = |\mathrm{F}(x_n) - \mathrm{F}(a)| = |\mathrm{F}'(y_n)(x_n - a)| \geqslant k|x_n - a| \ ,$$

avec y_n entre a et x_n. Si tous les x_n sont dans J on aura donc

$$h \geqslant |x_n - a| \geqslant k^n |x_0 - a|$$

pour tout $n \geqslant 0$, ce qui n'est possible que pour $x_0 = a$. La suite (x_n) sort donc de J dès que $x_0 \neq a$.

Remarque. Un point fixe répulsif ne se laisse donc approcher... que par la ruse, par exemple en remplaçant F par sa fonction réciproque. En effet, la dérivée F' ne s'annule pas sur J, donc garde un signe constant, par suite F est une bijection strictement monotone de J sur un intervalle K ; alors

$$\left|\left(F^{1}\right)'(a)\right| = \frac{1}{|F'(a)|} < 1 ,$$

et a est donc point fixe attractif sur K de la fonction réciproque F^{-1}. Une autre « ruse » est la méthode de Steffensen (Chambert-Loir *et al.* [42] p. 203).

Exercice 49. ***Newton et la superattraction.*** **Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 ; on suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente**

$$x_{n+1} = F(x_n) \ , \ n \geqslant 0 \ , \text{ avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

1. Montrer que f a un zéro unique a. Montrer que, pour tout $x \in [c,d]$ il existe z entre a et x tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \ .$$

[On pourra appliquer la formule de Taylor entre x et a.]

2. Déduire de 1 qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|F(x) - a| \leqslant C|x-a|^2$$

pour tout $x \in [c,d]$, et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F. Montrer enfin que, pour chaque $x_0 \in I$, la suite (x_n) a une convergence d'ordre deux vers a dans I.

3. On suppose de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. Montrer que le résultat de 2 est valable avec l'intervalle $I = [a,d]$, que la suite (x_n) est alors strictement décroissante (ou constante) et qu'on a

$$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

(pour cet équivalent, on supposera $x_0 > a$).

4. *Exemple.* On fixe $y > 0$ et on prend $f(x) = x^2 - y$. Résoudre alors la relation de récurrence, et donner une estimation de l'erreur $x_n - a$, avec $a = \sqrt{y}$.

[On pourra montrer que les nombres $(x_n - a)/(x_n + a)$ vérifient une relation de récurrence simple.]

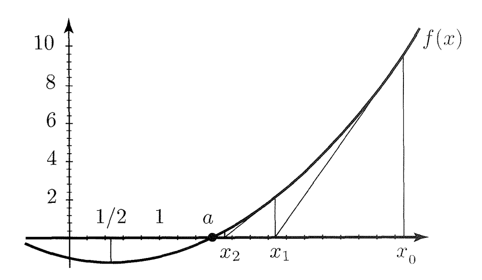
Heuristique. Pour résoudre $f(x) = 0$ on cherche à transformer l'équation en un problème équivalent de point fixe, de la forme $\mathrm{F}(x) = x$. Cela peut se faire de bien des manières, par exemple en prenant $\mathrm{F}(x) = x+\lambda(x)f(x)$, où λ est une fonction ne s'annulant pas. D'après l'Exercice 48 la convergence des itérés $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$ vers la solution a cherchée sera très rapide si ce point est *superattractif*, i.e. $\mathrm{F}'(a) = 0$. Or $f(a) = 0$, d'où $\mathrm{F}'(a) = 1 + \lambda(a)f'(a)$, et ceci incite à choisir $\lambda(x) = -1/f'(x)$ et à considérer la suite récurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

C'est la *méthode de Newton*, à l'interprétation géométrique très claire : l'égalité précédente

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

exprime que $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe $\mathrm{O}x$ de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n. La figure illustre l'approximation du nombre d'or $a = (1 + \sqrt{5})/2$; on peut prendre ici $[c, d] = \mathrm{I} = [1, 2]$.



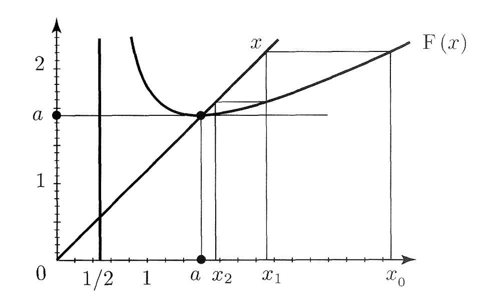


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $\mathrm{F}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$.

Si $e_n = x_n - a$ est l'erreur commise à la n-ième étape de la récurrence, on voit que e_{n+1} sera ainsi un $o(e_n)$ (écart d'une courbe et de sa tangente, voir Exercice 17 question 4), en fait un $\mathrm{O}(e_n^2)$ si f est deux fois dérivable.

La méthode de Newton donne effectivement une convergence rapide vers a, à condition de partir d'un x_0 suffisamment proche de la solution (question 2). On peut assouplir cette contrainte si f est une *fonction convexe* (question 3). Tous ces résultats s'obtiennent facilement à partir de l'égalité établie à la question 1.

Sur la méthode de Newton, voir Dieudonné [17] p. 58, Demailly [13] p. 99 et 107, Avez [3] p. 128, etc.

Remarque. Un autre choix intéressant, quoique non optimal, ci-dessus est $\lambda(x) = -1/f'(t)$, où t est un point (variable ou non) choisi proche de a, ou parfois égal à a. On procédera ainsi aux Exercices 71 et 86, pour déduire les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites d'une recherche de point fixe.

Solution. 1. La fonction f, continue sur $[c, d]$, croît strictement de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$, donc s'annule en un unique point $a \in]c, d[$. Un calcul immédiat donne $\mathrm{F}(a) = a$, $\mathrm{F}'(a) = 0$; on s'attend donc à avoir $\mathrm{F}(x) - a$ de l'ordre de $(x - a)^2$, ce qu'on va préciser.

Comme $f(a) = 0$ on peut écrire, pour $x \in [c, d]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} .\end{aligned}$$

En appliquant au numérateur la formule de Taylor à l'ordre deux d'origine x et d'extrémité a, on voit qu'il existe z compris (strictement) entre a et x tel que

$$\mathrm{F}(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x - a)^2 .$$

2. Il suffit de prendre $\mathrm{C} = (\max|f''|)/2(\min f')$, où max et min sont pris sur l'intervalle $[c, d]$, pour déduire de 1 l'inégalité

$$|\mathrm{F}(x) - a| \leqslant \mathrm{C}|x - a|^2 , \; x \in [c, d] .$$

Soit $\alpha > 0$, assez petit pour que $\mathrm{C}\alpha < 1$ et que l'intervalle $\mathrm{I} = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit contenu dans $[c, d]$. Alors $x \in \mathrm{I}$ entraîne $|\mathrm{F}(x) - a| \leqslant \mathrm{C}\alpha^2 < \alpha$, d'où $\mathrm{F}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Si $x_0 \in \mathrm{I}$ on a donc $x_n \in \mathrm{I}$ pour tout n et

$$|x_{n+1} - a| = |\mathrm{F}(x_n) - a| \leqslant \mathrm{C}|x_n - a|^2 ,$$

d'où

$$C|x_n - a| \leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant (C\alpha)^{2^n}$$

et la convergence d'ordre deux de x_n vers a, puisque $C\alpha < 1$.

3. La dérivée f' est ici croissante, et f est une *fonction convexe* sur l'intervalle $]c, d[$ (Exercice 42). Pour $a \leqslant x \leqslant d$ on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geqslant 0$ d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x ,$$

avec inégalité stricte si $x > a$. D'après 1 on a d'autre part

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geqslant 0 ,$$

strictement si $x > a$, ce qui est clair géométriquement, le graphe de f étant au-dessus de ses tangentes (voir figure ci-dessus pour le nombre d'or).

Ces deux inégalités montrent que l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par F et que, pour $a < x_0 \leqslant d$, les itérés x_n vérifient aussi $a < x_n \leqslant d$ et forment une suite strictement décroissante. Si $x_0 = a$ la suite est constante. La suite (x_n) admet donc une limite ℓ, qui vérifie $F(\ell) = \ell$, donc $f(\ell) = 0$ et ℓ ne peut être que a.

La convergence de x_n vers a est quadratique : on a comme en 2

$$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2 .$$

Enfin cette inégalité est essentiellement *optimale* : si $a < x_0 \leqslant d$ on a $x_n > a$ pour tout n et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

d'après 1, avec $a < z_n < x_n$. La fraction tend donc vers $f''(a)/2f'(a)$ lorsque $n \to \infty$.

4. Les hypothèses précédentes sont vérifiées pour $f(x) = x^2 - y$ sur $[c, d]$ avec $c = 0$ et $d^2 > y$. Pour approcher le nombre $a = \sqrt{y}$ on doit donc itérer la fonction

$$F(x) = x - \frac{x^2 - y}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right) .$$

D'après 1 (ou par vérification directe immédiate) on a

$$F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2x} .$$

Pour approcher l'autre racine carrée $-a = -\sqrt{y}$ la méthode conduirait à itérer la même fonction F, qui satisfait donc aussi à

$$F(x) + a = \frac{(x+a)^2}{2x}$$

(ou vérification directe immédiate). Par suite

$$\frac{F(x)-a}{F(x)+a} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 \quad \text{pour } x \geqslant 0 \ ,$$

autrement dit

$$F = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi$$

en notant

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{x+a} \ , \ G(x) = x^2 \ .$$

Ainsi F *est conjuguée par* φ *à la fonction* $x \mapsto x^2$. L'itération $x_n = F^n(x_0)$ s'explicite alors en

$$x_n = \left(\varphi^{-1} \circ G^n \circ \varphi\right)(x_0) \ , \text{ i.e. } \frac{x_n - a}{x_n + a} = \left(\frac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n} \ .$$

Pour $x_0 > a$, on en déduit

$$1 + \frac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \left(\frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \ ,$$

d'où la majoration d'erreur

$$0 < x_n - a = 2a\left[\left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a}\right)^{2^n} - 1\right]^{-1} \leqslant 2a\left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n} \ .$$

Exercice 50. ***Moyenne arithmético-géométrique.*** **Pour $a, b > 0$ donnés on définit les suites récurrentes**

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \ , \ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \ , \ x_0 = a \ , \ y_0 = b \ .$$

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) tendent vers une limite commune m, appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_1$ et on note $e_n = (x_n - m, y_n - m)$. Établir l'inégalité

$$\|e_{n+1}\|_1 \leqslant \frac{1}{8m} \|e_n\|_1^2 \ .$$

2. Pour $x, y > 0$ on note $F(x,y) = ((x+y)/2, \sqrt{xy})$. Calculer la différentielle $A = DF(m,m)$ et interpréter géométriquement cette application linéaire. L'application F est-elle contractante ?

3. Soit $B = I - A$. Vérifier que

$$\|e_{n+1}\|_1 = \|B(e_{n+1} - Ae_n)\|_1$$

et retrouver ainsi le résultat de 1 : il existe C > 0 tel que

$$\|e_{n+1}\|_1 \leqslant C \|e_n\|_1^2 \ .$$

[On pourra appliquer à F la formule de Taylor à l'ordre deux (Théorème 6.3).]

4. ***(Réservé aux Géomètres)*** **Construire géométriquement, avec règle et compas, le point (x_{n+1}, y_{n+1}) à partir de (x_n, y_n) dans le plan euclidien.**

Commentaire. Des calculs élémentaires établissent la convergence d'ordre deux de x_n et y_n vers m (question 1) et on pourrait penser, sur la lancée de l'Exercice 48, que l'on a affaire à un point fixe superattractif (différentielle A nulle en ce point). Il n'en est rien ; l'étude des suites récurrentes de $\mathbb{R}^p$ pour $p \geqslant 2$ est beaucoup moins simple que pour $p = 1$. Ici A admet les valeurs propres 0 et 1 (question 2), mais le rôle prépondérant revient à la valeur propre 0, les points (x_n, y_n) étant attirés vers le noyau de A (question 3, d'après une idée due à Stéphane Junca).

Sur les systèmes dynamiques (suites récurrentes) en dimension supérieure à 1, voir Devaney [16] chapitre 2. Sur le lien de la moyenne arithmético-géométrique avec les intégrales elliptiques, voir Chambert-Loir *et al.* [41] p. 222.

Solution. 1. On a $x_n > 0$, $y_n > 0$ pour tout n,

$$2(x_{n+1} - y_{n+1}) = \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 \geqslant 0 \ ,$$

d'où $x_n \geqslant y_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et par suite $x_{n+1} \leqslant x_n$, $y_{n+1} \geqslant y_n$. Ainsi

$$y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \text{ pour } n \geqslant 1 \ .$$

La suite (y_n) est croissante et majorée, la suite (x_n) est décroissante et minorée, d'où l'existence de $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Comme $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ on a $x = (x+y)/2$ d'où $x = y$. Soit m (ou $m(a,b)$ pour préciser) cette limite commune des *suites adjacentes* (x_n) et (y_n) ; on a donc $y_n \leqslant m \leqslant x_n$ pour $n \geqslant 1$. De plus $m(a,b) = m(b,a)$ et $m(\lambda a, \lambda b) = \lambda m(a,b)$ pour $\lambda, a, b > 0$.

Pour majorer l'erreur e_n on observe que

$$x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 - x_n y_n = \frac{(x_n - y_n)^2}{4} \ .$$

Or $x_{n+1} + y_{n+1} = 2x_{n+2} \geqslant 2m$ d'où, pour tout $n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant x_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \frac{1}{8m} (x_n - y_n)^2 \ .$$

Comme $y_n \leqslant m \leqslant x_n$ on a $\|e_n\|_1 = |x_n - m| + |y_n - m| = x_n - y_n$, et l'inégalité obtenue s'écrit

$$\|e_{n+1}\|_1 \leqslant \frac{1}{8m} \|e_n\|_1^2 \ .$$

Il y a donc *convergence d'ordre deux* de (x_n, y_n) vers (m, m) dans le plan.

2. La suite (x_n, y_n) s'obtient en itérant l'application

$$\mathrm{F}(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) ,$$

de classe C^∞ sur le quart de plan $x > 0$, $y > 0$. Cette application n'est pas contractante, puisque sa restriction à la droite $y = x$ est l'identité ; tout point de cette droite est point fixe de F. On a

$$\mathrm{DF}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{y/x} & \sqrt{x/y} \end{pmatrix} .$$

En particulier, la différentielle au point fixe (m, m) est

$$\mathrm{A} = \mathrm{DF}(m, m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

de valeurs propres 0 et 1, de vecteurs propres respectifs $(1, -1)$ et $(1, 1)$. L'application A est donc la *projection orthogonale sur la première bissectrice* (si on munit le plan du produit scalaire usuel).

3. L'application $\mathrm{B} = \mathrm{I} - \mathrm{A}$ est la projection orthogonale sur la seconde bissectrice $y = -x$. Si $v = (x, y)$ on a $\mathrm{B}v = \frac{1}{2}(x - y, y - x)$ d'où

$$\|\mathrm{B}v\|_1 = |x - y| \leqslant |x| + |y| = \|v\|_1 \ ,$$

et même

$$\|\mathrm{B}v\|_1 = \|v\|_1 \ \text{si } y \leqslant 0 \leqslant x \ .$$

Comme $y_{n+1} - m \leqslant 0 \leqslant x_{n+1} - m$ d'après 1 on en déduit, compte tenu de $\mathrm{BA} = 0$,

$$\|e_{n+1}\|_1 = \|\mathrm{B}e_{n+1}\|_1 = \|\mathrm{B}(e_{n+1} - \mathrm{A}e_n)\|_1 \leqslant \|e_{n+1} - \mathrm{A}e_n\|_1 \ .$$

D'autre part, en revenant aux définitions,

$$e_{n+1} - \mathrm{A}e_n = \mathrm{F}((m, m) + e_n) - \mathrm{F}(m, m) - \mathrm{DF}(m, m)e_n$$

et la formule de Taylor à l'ordre deux pour F entraîne une inégalité de la forme

$$\|e_{n+1}\|_1 \leqslant \|e_{n+1} - \mathrm{A}e_n\|_1 \leqslant \mathrm{C}\,\|e_n\|_1^2 \ ,$$

où la constante C apparaît en majorant les dérivées partielles secondes de F sur un compact convexe du quart de plan contenant tous les points $(x_n, y_n) = (m, m) + e_n$ (voir Théorème 6.3). Ceci redonne la convergence d'ordre deux établie en 1 par un calcul direct.

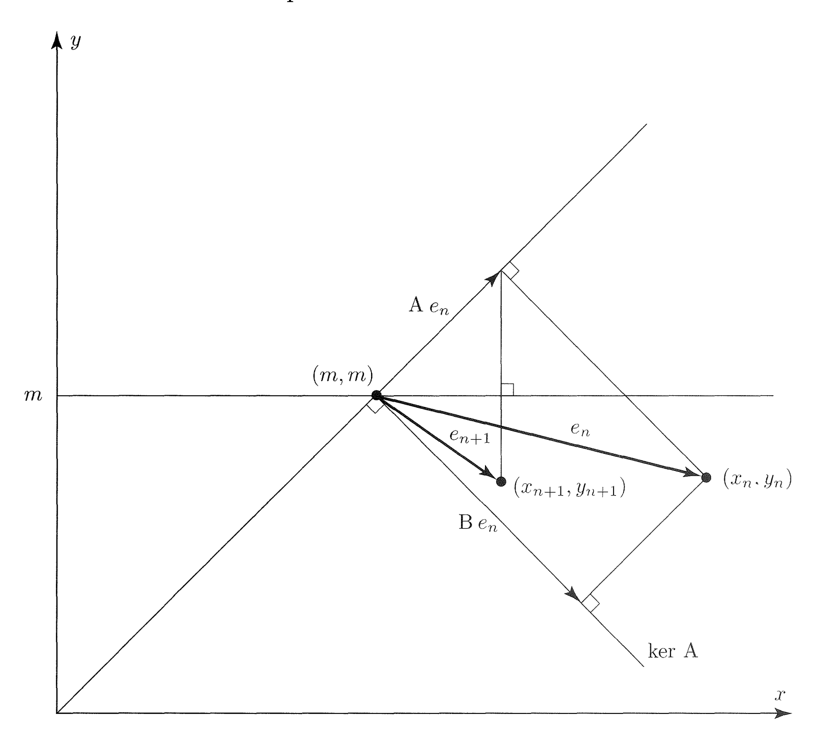


Fig. 76. Relation entre les erreurs e_n et e_{n+1} dans l'approximation de la moyenne arithmético-géométrique.

Remarques. Les inégalités précédentes entraînent aussi

$$\|\mathrm{A}e_n\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}e_n - e_{n+1}\|_1 + \|e_{n+1}\|_1 \leqslant 2\mathrm{C}\,\|e_n\|_1^2 = 2\mathrm{C}\,\|\mathrm{B}e_n\|_1^2 \ .$$

La composante $\mathrm{A}e_n$ de e_n sur la première bissectrice est donc beaucoup plus petite que la composante orthogonale $\mathrm{B}e_n$, ce qui traduit le caractère attractif de la direction de ker A.

Si l'on tient compte de la relation $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2 \geqslant m$ on peut apporter deux précisions supplémentaires. La première composante de $e_{n+1} - \mathrm{A}e_n$ est nulle, et ce vecteur est vertical; de plus $x_n - m \geqslant -(y_n - m) \geqslant 0$, et les points (x_n, y_n) sont dans le secteur de sommet (m, m) et d'angle compris entre $-\pi/4$ et 0.

4. La parallèle à la deuxième bissectrice passant par (x_n, y_n) coupe la première bissectrice au point d'abscisse $(x_n + y_n)/2 = x_{n+1}$. Pour

construire $\sqrt{x_n y_n} = y_{n+1}$, on peut s'aider du cercle de diamètre OP (voir figure) : le triangle OPQ est rectangle en Q, le carré de sa hauteur est donc $x_n y_n$, et y_{n+1} est l'ordonnée de Q.

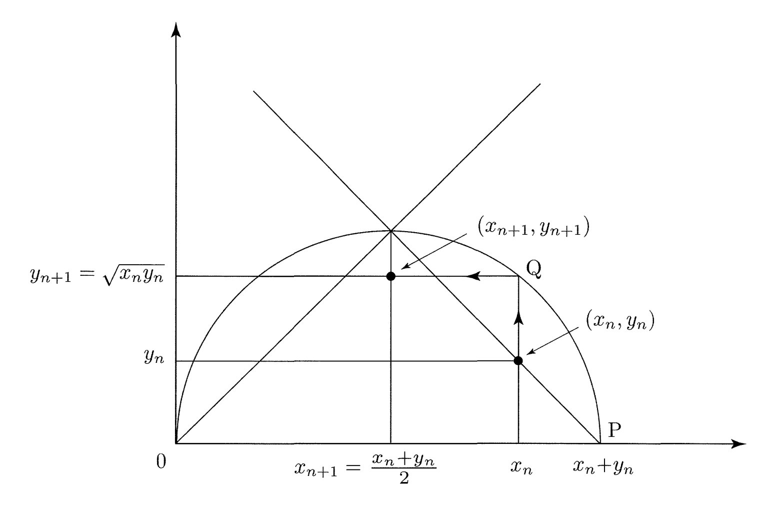


Fig. 77. Géométrie de la suite arithmético-géométrique.

Exercice 51. ***L'idée fixe du savant Cosinus.*** **Madame Belazor, qui s'ennuie à la conférence du Savant Cosinus**[2]**, met en marche sa calculette et frappe en cadence la touche cos. D'étranges phénomènes apparaissent, qui retiennent bientôt toute son attention...**

1. Réaliser l'expérience, en mode « degré » puis en mode « grade ».

2. Expliquer les phénomènes observés : on étudiera en détail le comportement de la suite récurrente (à paramètre $\lambda \in [0, 1[$)

$$x_{n+1} = \cos(\lambda x_n) \ , \ n \geqslant 0 \ , \ x_0 = 0 \ .$$

On établira notamment l'inégalité $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \lambda^{2n}$.

3. Soit $x = x(\lambda)$ le point fixe. Montrer que pour λ voisin de 0 on a

$$x(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \varepsilon(\lambda) \text{ avec } 0 \leqslant \varepsilon(\lambda) \leqslant \frac{25}{24}\lambda^4 \ .$$

Retrouver ainsi le résultat numérique de 1.

Solution. 1. Sur une calculette à huit chiffres, les pressions successives font apparaître les nombres :

2. Hommage à Georges Colomb, dit Christophe (1856-1945), pionnier de la bande dessinée, auteur de *La Famille Fenouillard, Le Sapeur Camember* et *L'idée fixe du Savant Cosinus.*

touche	*mode degré*	*mode grade*	
ON	0	0	x_0
cos	1	1	x_1
cos	0,9998477	0,9998766	x_2
cos	0,9998477	0,9998767	x_3
cos	0,9998477	0,9998767	x_4

Il y a, semble-t-il, convergence *très rapide* vers un point fixe de la fonction cos.

2. En mode degré, resp. grade, la fonction ainsi itérée est en fait $\cos \lambda x$ avec $\lambda = \pi/180 = 0{,}017...$, resp. $\lambda = \pi/200 = 0{,}015...$ Pour $\lambda = 0$ on a $x_n = 1$ pour $n \geqslant 1$; on peut donc s'attendre à un comportement voisin de celui-là lorsque λ est petit, ce qui va être justifié aisément.

Pour $0 \leqslant \lambda < 1$ on a d'abord $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$ par une récurrence immédiate. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ la fonction $f(x) = \cos \lambda x$ a pour dérivée $f'(x) = -\lambda \sin \lambda x$; comme $0 \leqslant \sin \lambda x \leqslant \lambda x \leqslant \lambda$ on en déduit $0 \leqslant -f'(x) \leqslant \lambda^2$. Par suite $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$ est de signe contraire à $x_n - x_{n-1}$ et, par l'inégalité de la moyenne,

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \lambda^2 |x_n - x_{n-1}| \leqslant \lambda^{2n} |x_1 - x_0| = \lambda^{2n} .$$

Les suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) sont donc *adjacentes*, et leur limite commune x est un point fixe de f qui vérifie

$$x_2 \leqslant x_{2p} \leqslant x \leqslant x_{2p+1} \leqslant x_3 \text{ pour } p \geqslant 1 ,$$

d'où

$$|x - x_n| \leqslant x_3 - x_2 \leqslant \lambda^4 \text{ dès que } n \geqslant 2 .$$

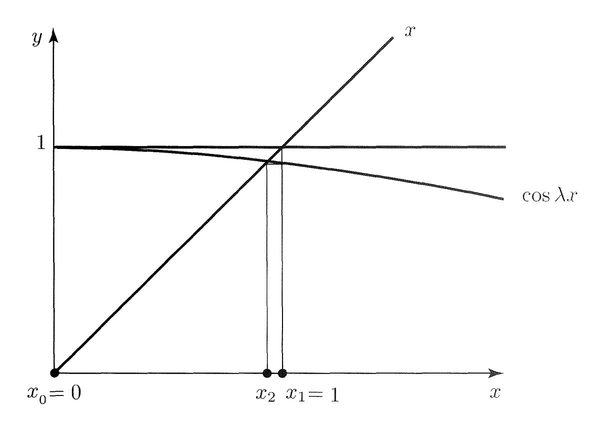


Fig. 78. Itération de $\cos \lambda x$, pour λ petit.

Pour $\lambda = \pi/180$ ou $\pi/200$ on a $\lambda^4 < 10^{-7}$, ce qui explique la stabilité observée à la question 1 dès la deuxième ligne du tableau (le léger changement en mode grade est dû aux erreurs d'arrondi).

La limite $x = x(\lambda)$ obtenue est l'*unique point fixe de* f sur $\mathbb{R}$: si x' en est un autre on a

$$|x' - x| = |\cos \lambda x' - \cos \lambda x| \leqslant \lambda |x' - x| \ ,$$

d'où $x' = x$ si $0 \leqslant \lambda < 1$.

3. On a $x_1 = 1$, $x_2 = \cos \lambda$ et on a vu en 2 que $0 \leqslant x_3 - x_2 \leqslant \lambda^4$ si $0 \leqslant \lambda < 1$. Le point fixe $x(\lambda)$ est entre x_2 et x_3, d'où

$$0 \leqslant x(\lambda) - \cos \lambda \leqslant \lambda^4 \ .$$

Or

$$0 \leqslant \cos \lambda - \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \leqslant \frac{\lambda^4}{4!}$$

(inégalité classique, qui se vérifie par exemple en intégrant quatre fois de suite de 0 à λ l'inégalité $\cos \lambda \leqslant 1$), d'où finalement

$$0 \leqslant x(\lambda) - \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{4!}\right) \lambda^4 = \frac{25}{24}\lambda^4 \ .$$

Pour $\lambda = \pi/180$, resp. $\pi/200$, on trouve ainsi

$$x(\lambda) \simeq 1 - \frac{\lambda^2}{2} \simeq 0{,}9998477 \ , \text{ resp. } 0{,}9998766 \ ,$$

avec une erreur inférieure à 10^{-7}, en accord avec l'expérience.

Remarque. On peut considérer l'équation $x = \cos \lambda x$ comme un problème de *point fixe avec paramètre* λ (Exercices 57 et 81), définissant implicitement une fonction $x = x(\lambda)$ de classe C^∞ pour $\lambda \in]-1, 1[$, car

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - \cos \lambda x) = 1 + \lambda \sin \lambda x > 0$$

pour $|\lambda| < 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Ceci permet d'écrire, par la formule de Taylor, un développement limité à tout ordre de $x(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 0$.

Exercice 52. ***Itération du sinus.*** **Soient $\mathbf{X} = [0, \pi/2]$ et $\mathbf{F}(x) = \sin x$.**

1. Montrer que F admet sur X un point fixe unique ; est-elle contractante ? Étudier la suite récurrente $x_{n+1} = \mathbf{F}(x_n)$, $x_0 \in \mathbf{X}$.

2. On suppose $0 < x_0 \leqslant \pi/2$ et on note $u_n = 1/x_n^2$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer (à l'aide d'un développement limité) que

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \frac{1}{3} \ .$$

En déduire un équivalent de x_n.

[On pourra appliquer à la suite (v_n) le théorème de Cesaro.]

Heuristique. La dérivée au point fixe est ici $F'(0) = 1$, situation plus délicate que celle étudiée à l'Exercice 48 ; les dérivées suivantes de F au point fixe vont jouer un rôle déterminant. Pour n grand, x_n est voisin de 0 et on a

$$x_{n+1} = \sin x_n = x_n - \frac{x_n^3}{6} + \cdots$$

d'où, en introduisant l'*opérateur* Δ *de différence* $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$,

$$\Delta x_n \sim -\frac{x_n^3}{6} \text{ pour } n \to \infty .$$

Si l'on ose appliquer à la « dérivation discrète » Δ les règles usuelles du calcul différentiel, on est conduit à écrire

$$\Delta\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \sim -2\frac{\Delta x_n}{x_n^3} \sim \frac{1}{3} = \Delta\left(\frac{n}{3}\right) ,$$

ce que l'on « intègre » (sous l'en-tête heuristique, tout n'est-il pas permis ?) selon

$$\frac{1}{x_n^2} \sim \frac{n}{3} , \text{ i.e. } x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} \text{ pour } n \to \infty .$$

Ces calculs osés (qui seront justifiés ci-dessous !) motivent l'introduction des suites auxiliaires $u_n = 1/x_n^2$ et $v_n = \Delta u_n$. Ils s'inspirent évidemment de la résolution de l'équation différentielle $x' = -x^3/6$.

La méthode (et son heuristique) s'étendent aux fonctions F de classe C^1 sur un intervalle $[0, a]$ qui admettent en 0 un développement limité de la forme

$$F(x) = x - \alpha x^p + o(x^p) ,$$

avec $\alpha > 0$, $p > 1$: pour $x_0 > 0$ assez petit, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ décroît vers 0 et admet l'équivalent $x_n \sim (\alpha(p-1)n)^{-1/(p-1)}$ pour $n \to \infty$.

Sur l'itération du sinus, ne pas manquer de lire le très beau chapitre 8 de De Bruijn [5], qui lui est presque entièrement consacré. On y trouvera le développement asymptotique

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1 - \frac{3}{10}\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(voir aussi Chambert-Loir *et al.* [41] p. 127).

Solution. 1. Pour $x > 0$ on a $x - \sin x = \int_0^x (1 - \cos t)dt > 0$, et 0 est donc le seul point fixe de la fonction sinus sur $[0, \infty[$. Si $0 < x_0 \leqslant \pi/2$ on a, par récurrence sur n,

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

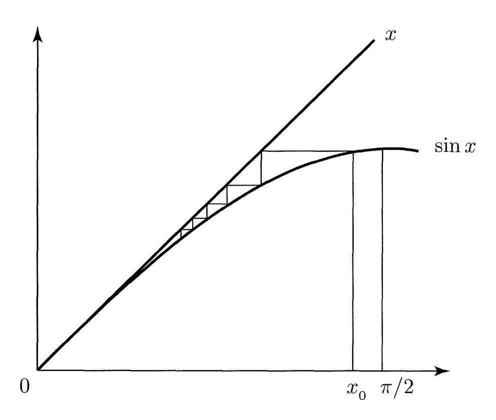


Fig. 79. Itération du sinus.

et la suite (x_n), strictement décroissante et minorée, converge vers une limite $\ell \geqslant 0$ telle que $\ell = \sin \ell$, d'où $\ell = 0$. Si $x_0 = 0$ on a $x_n = 0$ pour tout n.

La fonction sinus n'est cependant pas contractante sur X : pour $x, y \in$ X et $x \neq y$ on a $|\sin x - \sin y| < |x - y|$ par l'inégalité des accroissements finis, mais il n'existe aucun $k < 1$ tel que $|\sin x - \sin y| \leqslant k|x - y|$ pour tous $x, y \in$ X (prendre $y = 0$ et faire tendre x vers 0). Le théorème du point fixe ne s'applique pas ici ; de fait x_n convergera vers 0 beaucoup plus lentement qu'un multiple d'un k^n.

2. D'après 1 on a $x_n > 0$ pour tout n et $x_n \to 0$. En reprenant l'idée heuristique il vient, pour $n \to \infty$,

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \sin x_n - x_n \sim -\frac{x_n^3}{6} \,;$$

en particulier $\Delta x_n / x_n \to 0$. Ensuite

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{x_n^2}\right) &= \frac{1}{(x_n + \Delta x_n)^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_n^2}\left(\left(1 + \frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^{-2} - 1\right) \\ &\sim \frac{1}{x_n^2}\left(-2\frac{\Delta x_n}{x_n}\right) = -2\frac{\Delta x_n}{x_n^3} \end{aligned}$$

puisque $\Delta x_n / x_n \to 0$, d'où

$$v_n = \Delta u_n = \Delta\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \to \frac{1}{3} \,.$$

D'après le théorème de Cesaro, la suite des moyennes

$$\frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n} = \frac{u_n - u_0}{n}$$

admet aussi la limite $1/3$, d'où $u_n \sim n/3$ et finalement

$$x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} \text{ quand } n \to \infty .$$

Exercice 53. ***Apparition de Cantor.*** **On considère la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \mathbf{F}(x_n)$, $n \geqslant 0$, $x_0 = a$, où**

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1/2 \\ 3(1-x) & \text{si } x \geqslant 1/2 . \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (x_n) ne peut converger vers un point fixe de F que si elle est constante à partir d'un certain rang.

2. Montrer que la suite (x_n) est bornée si et seulement si elle reste dans l'intervalle $[0,1]$. Décrire l'ensemble C des points de départ a tels qu'il en soit ainsi (*ensemble de Cantor*).

Commentaire. L'ensemble de Cantor mériterait à lui seul un chapitre ; on n'aborde ici que son lien avec l'itération des fonctions. D'abord exhibé comme un monstre, nain d'un côté (car de mesure nulle) et géant de l'autre (car non dénombrable), cet ensemble est enfin devenu un être familier, compagnon quotidien de quiconque étudie l'itération de fonctions aussi banales que $\lambda x(1-x)$ (de même allure qualitative que la fonction « tente » F considérée ici). Pour s'initier aux mystères de ces itérations (systèmes dynamiques et chaos), voir Devaney [15], [16].

Solution. 1. Les points fixes de F sont 0 et $3/4$, répulsifs d'après l'Exercice 48 question 4, car $F'(0) = 3$ et $F'(3/4) = -3$. Il est facile de vérifier cela directement.

En effet, si x_n tend vers 0 il existe N tel que $x_n \leqslant 1/2$ pour $n \geqslant N$, d'où $x_n = F^{n-N}(x_N) = 3^{n-N}x_N$, qui ne peut tendre vers 0 que si $x_N = 0$: par suite $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant N$.

De même, si x_n tend vers $3/4$, on a $x_n \geqslant 1/2$ pour $n \geqslant N$ d'où

$$x_{n+1} - \frac{3}{4} = 3(1-x_n) - \frac{3}{4} = 3\left(\frac{3}{4} - x_n\right)$$

et $|x_n - (3/4)| = 3^{n-N}|x_N - (3/4)|$; par suite $x_n = 3/4$ pour tout $n \geqslant N$.

2. S'il existe p tel que $x_p < 0$, alors $x_n < 0$ pour tout $n \geqslant p$ (récurrence immédiate) d'où $x_n = 3^{n-p}x_p$, qui tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

S'il existe q tel que $x_q > 1$, alors $x_{q+1} = 3(1-x_q) < 0$, et on est ramené au cas précédent à partir du rang $q+1$.

La suite (x_n) est donc bornée si et seulement si $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

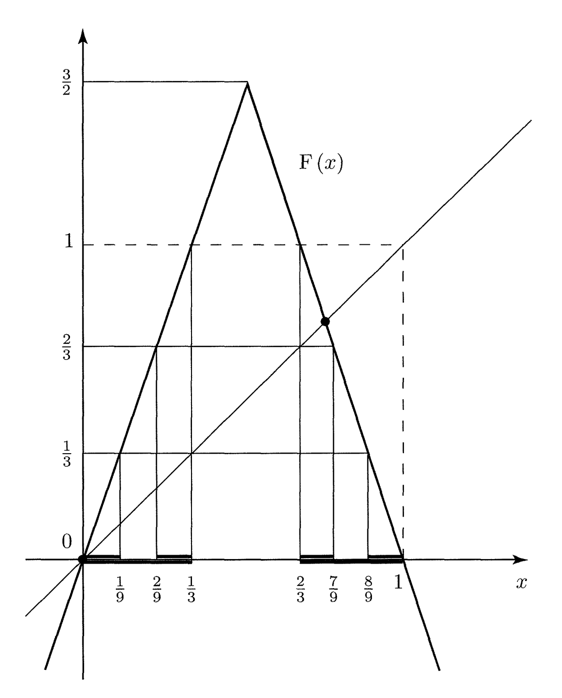


Fig. 80. Itération de la fonction « tente » F et construction de l'ensemble de Cantor.

Par définition, C est l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $F^n(a) \in [0,1]$ pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$C = C_0 \cap C_1 \cap \cdots \cap C_n \cap \cdots$$

où $C_0 = [0,1]$, $C_1 = F^{-1}(C_0)$, $C_2 = F^{-1}(C_1)$,... sont les images réciproques successives de $[0,1]$ par F. Explicitement

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

(car $F(x) > 1$ pour $1/3 < x < 2/3$),

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

(car $1/3 < F(x) < 2/3$ pour $1/9 < x < 2/9$ etc.), et C_n est formé de 2^n intervalles compacts de longueur $1/3^n$ chacun.

On reconnaît ainsi la définition classique de l'ensemble de Cantor : couper $[0,1]$ en trois intervalles de longueur $1/3$, supprimer celui du milieu, puis couper en trois ceux qui restent, supprimer celui du milieu...

Exercice 54. ***Inverser sans inverser.*** **L'espace E des matrices $n \times n$ réelles est muni d'une norme telle que**

$$\|\mathbf{XY}\| \leqslant \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|$$

(par exemple une norme d'application linéaire). Soit $A \in E$, inversible ; pour $X \in E$ on note

$$F(X) = 2X - XAX .$$

1. Montrer que $F : E \longrightarrow E$ est de classe C^1. Calculer $F(A^{-1})$ et $DF(A^{-1})$.

2. On définit la suite récurrente $X_{p+1} = F(X_p)$, $p \geqslant 0$. Déduire de 1 que, pour tout X_0 d'une boule convenablement choisie, on a $\lim_{p\to\infty} X_p = A^{-1}$.

3. Résoudre la relation de récurrence. En déduire que X_p a une convergence d'ordre deux vers A^{-1} dès que $\|I - AX_0\| < 1$.

[On pourra montrer que les matrices $Y_p = I - AX_p$ vérifient une relation de récurrence simple.]

Commentaire. L'exercice fournit une excellente approximation de l'inverse de A par les X_p, dont le calcul n'utilise que des multiplications matricielles. On peut, si on le souhaite, réduire le problème à sa question 3, indépendante des autres.

Les ressemblances avec l'Exercice 49 (point fixe superattractif, convergence d'ordre deux) s'expliquent aisément : on utilise ici la *méthode de Newton* pour résoudre l'équation

$$f(X) = A - X^{-1} = 0 .$$

En effet f est de classe C^∞ sur l'ouvert des matrices inversibles et

$$Df(X)H = X^{-1}HX^{-1} \text{ pour } H \in E$$

(Exercice 16), d'où $Df(X)^{-1}H = XHX$ et finalement

$$\begin{aligned} X - Df(X)^{-1}f(X) &= X - X(A - X^{-1})X \\ &= 2X - XAX = F(X) . \end{aligned}$$

Sur la méthode de Newton étendue aux espaces de Banach, voir Demailly [13] p. 107, Avez [3] p. 128.

Comme à l'Exercice 49 question 4, on constate ici (question 3) que *l'application* F *est conjuguée à l'application* $X \mapsto X^2$. Ce n'est pas un hasard ! On a en effet des résultats du type suivant (Devaney [16] p. 276-280, par la méthode des séries majorantes, ou De Bruijn [5] p. 151-153, à l'aide d'un produit infini). Soient $F(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de 0, point fixe de F, et $\lambda = F'(0)$. Si $0 < |\lambda| < 1$, il existe φ, bijection holomorphe d'un voisinage de 0 sur un autre, telle que

$$\varphi(F(z)) = \lambda\varphi(z) .$$

De même, si $F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(k-1)}(0) = 0$ et $F^{(k)}(0) \neq 0$, il existe φ telle que

$$\varphi(F(z)) = (\varphi(z))^k \ .$$

Ainsi F *est conjuguée par* φ *à la transformation* $z \mapsto \lambda z$, resp. $z \mapsto z^k$, et la récurrence est (théoriquement) résolue – à ceci près que φ et φ^{-1} sont, sauf cas particuliers, difficiles à expliciter.

Solution. 1. L'application F est polynomiale en les éléments de la matrice X, donc de classe C^1 partout. On a $F(A^{-1}) = 2A^{-1} - A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$. Pour $H \in E$

$$F(X+H) - F(X) = 2H - HAX - XAH - HAH$$

d'où, en isolant les termes linéaires en l'accroissement H,

$$DF(X)H = 2H - HAX - XAH \ ,$$

et en particulier

$$DF(A^{-1}) = 0 \ .$$

Donc A^{-1} est point fixe superattractif de F.

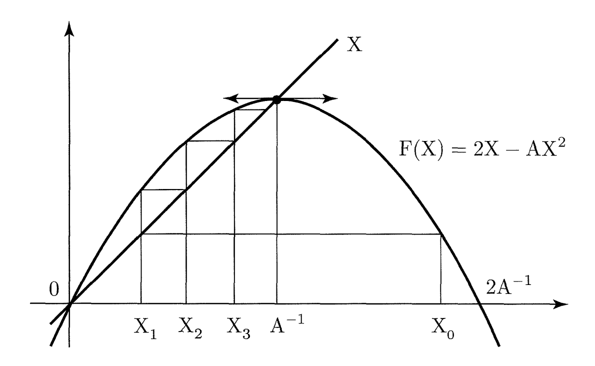


Fig. 81. Approximation de A^{-1}par la méthode de Newton ; ici $n = 1$ et la boule $\|I - AX\| < 1$ est l'intervalle $]0, 2A^{-1}[$.

2. Par continuité de DF, pour $0 < \varepsilon < 1$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|X - A^{-1}\| \leqslant \alpha$ entraîne $\|Df(X)\| \leqslant \varepsilon$ (norme d'application linéaire de $Df(X) \in \mathcal{L}(E, E)$) d'où, par l'inégalité de la moyenne,

$$\|X_{p+1} - A^{-1}\| = \|F(X_p) - F(A^{-1})\| \leqslant \varepsilon \|X_p - A^{-1}\| \leqslant \|X_p - A^{-1}\| \ ,$$

pourvu que $\|X_p - A^{-1}\|$ soit inférieur à α. C'est donc vérifié par récurrence sur p dès que $\|X_0 - A^{-1}\| \leqslant \alpha$, et alors

$$\|X_p - A^{-1}\| \leqslant \varepsilon^p \alpha \ ,$$

d'où la convergence de X_p vers A^{-1} quand $p \to \infty$. Ce résultat sera amélioré à la question 3.

3. On a $\mathrm{AF(X)} = 2\mathrm{AX} - (\mathrm{AX})^2$ d'où $\mathrm{I} - \mathrm{AF(X)} = (\mathrm{I} - \mathrm{AX})^2$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire

$$\varphi(\mathrm{F(X)}) = (\varphi(\mathrm{X}))^2 \text{ avec } \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{I} - \mathrm{AX} .$$

Par suite $\mathrm{Y}_p = \varphi(\mathrm{X}_p)$ vérifie la relation $\mathrm{Y}_{p+1} = \mathrm{Y}_p^2$, d'où on tire $\mathrm{Y}_p = \mathrm{Y}_0^{2^p}$ et

$$\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{X}_p = \mathrm{A}^{-1} (\mathrm{I} - \mathrm{AX}_0)^{2^p} .$$

Il y a donc convergence d'ordre deux de Y_p vers 0 et de X_p vers A^{-1} dès que $\|\mathrm{Y}_0\| = \|\mathrm{I} - \mathrm{AX}_0\| < 1$.

Exercice 55. ***Le point fixe, et un peu mieux.***

1. Démontrer le théorème du point fixe (Théorème 4.1).

[On pourra montrer que les (x_n) forment une suite de Cauchy.]

2. Soient X un espace métrique complet et F une application de X dans lui-même. On suppose qu'une certaine itérée F^p est contractante, où $p \geqslant 1$ est un entier. Montrer que F a encore un point fixe unique, qui est limite de la suite $(\mathrm{F}^n(x_0))_{n \geqslant 0}$ avec x_0 quelconque. Que dire de la vitesse de convergence de cette suite ?

[On pourra montrer que le point fixe de F^p est l'unique point fixe de F.]

Commentaire. Le théorème du point fixe est d'un remarquable rapport qualité/prix, au même titre que le théorème de Baire, ou l'intégration par parties, etc. : un énoncé simple et une preuve sans malice pour un résultat étonnamment puissant dans ses applications, nombreuses et variées !

Le raffinement apporté par 2 n'est pas purement académique : dans l'application aux équations différentielles ou intégrales (Exercices 60 et 61) il arrive que F ne soit pas contractante, mais que F^p le soit pour p assez grand.

Solution. 1. Pour $n \geqslant 1$ on a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\mathrm{F}(x_{n-1}), \mathrm{F}(x_n)) \leqslant k d(x_{n-1}, x_n) ,$$

par suite $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1)$ et, par l'inégalité triangulaire,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \left(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p}\right) d(x_0, x_1) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

pour $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$; la dernière inégalité s'obtient en sommant une série géométrique de raison $k < 1$.

On a donc $d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand et $p \geqslant 0$, et les x_n forment une suite de Cauchy de X, qui converge vers un point a. En faisant $p \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, il vient

$$d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) .$$

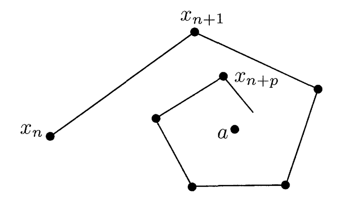


Fig. 82. Convergence des itérés.

Enfin $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$ tend vers a et vers $\mathrm{F}(a)$ (F est continue car contractante), d'où $\mathrm{F}(a) = a$, et a est un point fixe de F.

S'il y avait un autre point fixe b, on aurait

$$d(a,b) = d(\mathrm{F}(a),\mathrm{F}(b)) \leqslant kd(a,b) ,$$

d'où $d(a,b) = 0$ et $a = b$.

2. Le théorème précédent donne a, unique point fixe de F^p, et limite de la suite des $(\mathrm{F}^{np}(x_0))_{n\geqslant 0}$ pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$. Comme

$$\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(\mathrm{F}^p(a)) = \mathrm{F}^{p+1}(a) = \mathrm{F}^p(\mathrm{F}(a)) ,$$

le point $\mathrm{F}(a)$ est aussi point fixe de F^p, d'où $\mathrm{F}(a) = a$ par l'unicité, et a est point fixe de F. Inversement tout point fixe de F l'est évidemment pour F^p. Par suite le a précédent est l'unique point fixe de F.

Soit k_p la constante de Lipschitz de F^p ; d'après 1 on a

$$d(\mathrm{F}^{np}(x_0),a) \leqslant \frac{k_p^n}{1-k_p} d(x_0,\mathrm{F}^p(x_0)) .$$

En remplaçant le point initial x_0 par $\mathrm{F}^q(x_0)$ on en déduit

$$d(\mathrm{F}^{np+q}(x_0),a) \leqslant \frac{k_p^n}{1-k_p} d(\mathrm{F}^q(x_0),\mathrm{F}^{p+q}(x_0))$$

pour $q = 0, 1, \ldots, p-1$ et tout entier $n \geqslant 0$. Par division euclidienne tout entier m s'écrit $m = np + q$ avec $0 \leqslant q \leqslant p-1$. Alors $n > (m/p) - 1$ et on obtient facilement

$$d(\mathrm{F}^m(x_0),a) \leqslant \mathrm{C}k_p^{m/p} , \ m \in \mathbb{N} ,$$

où C est une constante indépendante de m. La suite des itérés $\mathrm{F}^m(x_0)$, à partir d'un x_0 quelconque, converge donc vers le point fixe. La vitesse de convergence est « géométrique », selon les puissances de $k_p^{1/p}$.

Exercice 56. ***Variations sur point fixe et compacité.*** **On cherche ici à affaiblir l'hypothèse « F contractante » du Théorème 4.1.**

1. Soient X un espace métrique *compact* (non vide), de distance d, et F une application de X dans lui-même. On suppose que, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$,

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y) \ .$$

Montrer que F admet un point fixe unique.

[On pourra raisonner sur $\min_{x \in X} d(x, F(x))$.]

2. Sous les hypothèses de 1 montrer que, pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérés $x_n = F^n(x_0)$ converge vers le point fixe.

[On pourra raisonner sur une suite extraite.]

3. Soient X une partie *convexe compacte* (non vide) d'un espace normé, et F une application de X dans lui-même. On suppose que, pour tous $x, y \in X$,

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|x - y\| \ .$$

Montrer que F admet (au moins) un point fixe.

[On pourra appliquer le Théorème 4.1 à $F_t(x) = (1-t)F(x) + tx_0$, avec $x_0 \in X$ fixé et $0 < t < 1$, puis faire tendre t vers 0 .]

Solution. 1. Noter que F n'est pas nécessairement contractante[3] : exemple $X = [0,1]$ et $F(x) = \sin x$, cf. Exercice 52. La compacité de X va jouer un rôle essentiel ici (cf. Exemple 3 en début de chapitre).

L'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue sur $X \times X$ et F est continue sur X d'après l'hypothèse. Par composition, la fonction $\varphi(x) = d(x, F(x))$ est continue sur X, donc atteint son minimum en un point a.

Si $a \neq F(a)$ on aurait

$$\varphi(F(a)) = d(F(a), F(F(a))) < d(a, F(a)) = \varphi(a) \ ,$$

ce qui contredirait la définition de a ; donc $F(a) = a$.

Si a et b étaient deux points fixes distincts de F on aurait

$$d(a, b) = d(F(a), F(b)) < d(a, b) \ ,$$

ce qui est impossible. Donc F a un point fixe unique.

2. On a

$$d(x_{n+1}, a) = d(F(x_n), F(a)) \leqslant d(x_n, a)$$

(strictement si $x_n \neq a$), et la suite décroissante des $d(x_n, a)$ admet donc une limite $\ell \geqslant 0$. On va voir que $\ell = 0$.

3. Mais elle l'est en dehors de la diagonale : pour $\varepsilon > 0$ il existe $k < 1$ tel que

$$d(F(x), F(y)) \leqslant k d(x, y)$$

pour $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ (considérer la fonction $d(F(x), F(y))/d(x, y)$ sur le compact de $X \times X$ défini par $d(x, y) \geqslant \varepsilon$).

Comme X est compact on peut extraire de (x_n) une sous-suite (x_{n_k}), convergeant vers un point b de X. Les $F(x_{n_k}) = x_{n_k+1}$ sont alors une autre suite extraite de (x_n), qui converge vers $F(b)$, d'où

$$d(x_{n_k}, a) \to d(b, a) = \ell$$
$$d(F(x_{n_k}), a) \to d(F(b), a) = \ell \ .$$

Si $a \neq b$ on aurait

$$\ell = d(F(b), a) = d(F(b), F(a)) < d(b, a) = \ell \, ;$$

c'est impossible, d'où $a = b$, $\ell = 0$, et finalement $\lim x_n = a$.

3. Comme X est convexe le point $F_t(x) = (1-t)F(x) + tx_0$ appartient à X pour $0 < t < 1$, et F_t applique X dans lui-même. De plus

$$\|F_t(x) - F_t(y)\| = (1-t)\,\|F(x) - F(y)\| \leqslant (1-t)\,\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in X$, et F_t est contractante. Comme X est métrique compact, donc complet, le Théorème 4.1 montre que F_t admet un unique point fixe $a_t \in X$

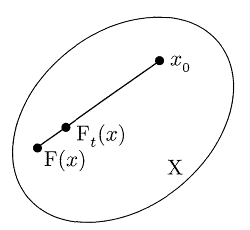


Fig. 83. Les contractions F_t.

Si t parcourt une suite tendant vers 0, les a_t associés forment une suite du compact X, dont on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point a de X. Notons simplement (a_n) cette suite, (t_n) la suite des valeurs correspondantes de t et $F_n = F_{t_n}$; ainsi

$$F_n(a_n) = a_n \text{ et } \lim a_n = a \ .$$

Pour en déduire $F(a) = a$ par passage à la limite, il suffit donc de montrer que $\lim F_n(a_n) = F(a)$, ce qui s'obtient par un argument classique de convergence uniforme :

$$\begin{aligned}\|F_n(a_n) - F(a)\| &\leqslant \|F_n(a_n) - F(a_n)\| + \|F(a_n) - F(a)\| \\ &\leqslant t_n\,\|F(a_n) - x_0\| + \|a_n - a\| \\ &\leqslant Mt_n + \|a_n - a\| \ ,\end{aligned}$$

en notant $M = \max_{x \in X} \|x - x_0\|$. Comme $t_n \to 0$, on en déduit $F_n(a_n) \to F(a)$ et finalement $F(a) = a$.

Remarque. Le résultat devient faux si on oublie l'hypothèse X *convexe* (penser à une rotation sur un cercle) ou *compact* (penser à une translation sur $\mathbb{R}$). Il demeure vrai, mais nettement plus difficile, si on suppose X convexe compact et F seulement continue de X dans X (sans l'inégalité) ; c'est le *théorème de Schauder*, cité (sous une forme un peu plus générale) à la fin de l'Exercice 59.

Exercice 57. ***Variation du point fixe.***

1. Soient X un espace métrique complet (non vide), Λ un espace métrique et $F : X \times \Lambda \longrightarrow X$ une application *continue*. On suppose F *uniformément contractante en x*, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tous $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$,

$$d(F(x, \lambda), F(y, \lambda)) \leqslant k\, d(x, y) \; .$$

Montrer que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'équation $F(x, \lambda) = x$ admet une solution unique $x = x(\lambda)$, qui varie continûment avec le paramètre λ.

2. *Exemple.* Montrer que le système d'équations

$$x = \frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1 \; , \; y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2}$$

définit $x = x(t)$, $y = y(t)$, fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (cf. Exercice 33).

Commentaire. Le résultat de 1, d'aspect innocent et de preuve facile, a des applications intéressantes : il entraîne par exemple la dépendance continue par rapport aux paramètres de solutions d'équations différentielles ou intégrales obtenues par la méthode du point fixe.

On établit ici la continuité d'une certaine fonction définie implicitement ; on verra à l'Exercice 81 sa différentiabilité.

Solution. 1. Le Théorème 4.1 s'applique à F pour chaque λ fixé dans Λ, d'où le point fixe $x(\lambda)$.

Pour $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$ notons $x = x(\lambda)$, $x_0 = x(\lambda_0)$. Alors

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &= d(F(x, \lambda), F(x_0, \lambda_0)) \\ &\leqslant d(F(x, \lambda), F(x_0, \lambda)) + d(F(x_0, \lambda), F(x_0, \lambda_0)) \; . \end{aligned}$$

Au second membre, le premier terme est inférieur à $kd(x, x_0)$ d'où

$$(1 - k) d(x, x_0) \leqslant d(F(x_0, \lambda), F(x_0, \lambda_0)) \; .$$

Comme $k < 1$, la continuité de F par rapport à λ entraîne donc celle de l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$.

2. Le paramètre $t \in \mathbb{R}$ disparaît lorsqu'on dérive en x ou en y l'application

$$(x,y,t) \mapsto \mathrm{F}(x,y,t) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y)+t-1, \frac{1}{2}\cos(x-y)-t+\frac{1}{2}\right) ,$$

et les calculs de l'Exercice 33 entraînent que F est uniformément contractante de rapport $k = 1/\sqrt{2}$ en (x,y) sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On peut donc appliquer 1, qui montre que l'équation $\mathrm{F}(x,y,t) = (x,y)$ admet une unique solution $x = x(t)$, $y = y(t)$, fonction continue de t sur $\mathbb{R}$. À suivre à l'Exercice 81.

Exercice 58. ***Point fixe et fonctions holomorphes.* Soient D le disque unité $|z| < 1$ du plan complexe, et F une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque $|z| \leqslant 1$. On suppose que $|\mathrm{F}(z)| < 1$ pour $|z| = 1$. Montrer que F a un point fixe unique dans D.**

[On pourra raisonner sur l'intégrale

$$\mathrm{N}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz ,$$

où $f_t(z) = z - t\mathrm{F}(z)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et γ est le cercle unité parcouru dans le sens direct.]

Solution. Rappelons d'abord un résultat classique sur l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz ,$$

où $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, et f est une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le disque fermé $|z| \leqslant 1$, ne s'annulant pas sur le cercle $|z| = 1$. L'intégrale se calcule par le théorème des résidus : la fonction f'/f est méromorphe dans U et ses pôles sont les zéros de f. Si a est un zéro d'ordre k de f, on peut écrire $f(z) = (z-a)^k g(z)$, où g est holomorphe et sans zéro sur un voisinage de a, d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

et le résidu de f'/f en a est k. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{N} ,$$

nombre total de zéros de f dans D, comptés avec leurs multiplicités. Cette intégrale est aussi l'indice par rapport à 0 du lacet $\theta \mapsto f(\gamma(\theta))$, comme le montre le changement de variable $w = f(z)$.

Ceci s'applique à la fonction $f_t(z) = z - t\mathrm{F}(z)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, car $|t\mathrm{F}(z)| \leqslant |\mathrm{F}(z)| < 1 = |z|$ sur le cercle, d'où $f_t(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Le nombre de zéros de f_t dans D est

$$\mathrm{N}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1 - t\mathrm{F}'(z)}{z - t\mathrm{F}(z)} dz \ .$$

D'après les théorèmes élémentaires sur les intégrales à paramètre, $\mathrm{N}(t)$ est fonction continue de t sur $[0,1]$, et à valeurs entières ; elle est donc constante. Or

$$\mathrm{N}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1 \ ,$$

d'où $\mathrm{N}(1) = 1$, ce qui veut dire que $z - \mathrm{F}(z)$ s'annule en un point unique de D.

Remarque. On reconnaîtra dans ce raisonnement un cas particulier du *théorème de Rouché* (Candelpergher [6] p. 69, Rudin [35] Théorème 10.43). Noter que, par le principe du maximum, on a $|\mathrm{F}(z)| < 1$ pour $|z| \leqslant 1$, d'où $\mathrm{F}(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$.

Exercice 59. ***Théorème du point fixe de Brouwer.* On note B la boule unité fermée et S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne). Le but de l'exercice est d'établir quelques cas particuliers du résultat suivant :**

Théorème de Brouwer. Toute application continue de* B *dans* B *admet (au moins) un point fixe.

1. Démontrer le théorème pour $n = 1$. En, déduire qu'un segment n'est pas homéomorphe à un cercle.

2. ($n \geqslant 2$) Si l'énoncé était faux, montrer qu'il existerait une *rétraction* de la boule sur la sphère, i.e. une application continue G : B $\longrightarrow$ S dont la restriction à S serait l'identité.

[Si F : B $\longrightarrow$ B est une application sans point fixe, on pourra définir G(x) comme l'intersection avec S de la demi-droite d'origine F(x) passant par x.]

3. ($n = 2$) Pour $s, t \in [0, 1]$ on note

$$\gamma_s(t) = \mathrm{G}(s \cos 2\pi t, s \sin 2\pi t) \ ,$$

où G est la rétraction construite en 2. Montrer que γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes, et calculer leurs indices par rapport à l'origine. Conclure.

4. *Application.* Soit $x \longmapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu sur B, supposé *rentrant* dans la sphère (i.e. le produit scalaire $x \cdot v(x)$ est strictement négatif pour tout $x \in$ S). Montrer que v s'annule en (au moins) un point de la boule B.

[On pourra appliquer le théorème de Brouwer à $\mathbf{F}(x) = x + tv(x)$, pour $t > 0$ assez petit.]

5. Étendre le théorème de Brouwer en remplaçant B par d'autres parties de $\mathbb{R}^n$.

Commentaire. À la différence du Théorème 4.1, essentiellement métrique, celui de Brouwer est un théorème *topologique* de $\mathbb{R}^n$, qui ne donne aucune garantie d'unicité du point fixe ni de convergence de la suite des itérés d'un point. On voit en 1 ci-dessous le rôle de la *connexité* (en dimension 1), on entrevoit en 2 celui de la *simple connexité* (en dimension 2). Le théorème serait faux pour un ensemble « à trou » comme une couronne ou un cercle : une rotation n'y a pas de point fixe.

Pour aller au-delà de $n = 2$, on aurait besoin des outils de la topologie algébrique (groupes d'homotopie). Une autre preuve peut s'obtenir en supposant F de classe C^1 (on se ramène à ce cas par approximation polynomiale) et en appliquant la formule de Stokes dans la boule ; voir les détails dans Lafontaine [28] p. 220 ou Berger et Gostiaux [4] p. 222.

Solution. 1. Montrons que toute fonction continue $F : [a, b] \to [a, b]$ a (au moins) un point fixe. Comme $F(a) \geqslant a$ et $F(b) \leqslant b$, la fonction $\varphi(x) = F(x) - x$, qui vérifie $\varphi(a) \geqslant 0$ et $\varphi(b) \leqslant 0$, s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ d'après le théorème de la valeur intermédiaire. Le graphe de F doit rencontrer la diagonale.

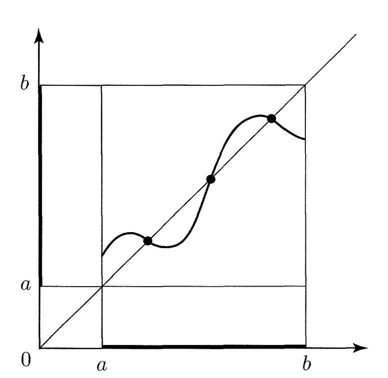


Fig. 84. Points fixes de $F : [a, b] \to [a, b]$.

La propriété correspondante est fausse si on remplace le segment $[a, b]$ par un cercle : une rotation autour de son centre n'a de point fixe sur le cercle que si c'est l'identité. Les notions de continuité et de point fixe étant invariantes par homéomorphisme, on en déduit que le cercle ne peut pas être homéomorphe à un segment.

2. On suppose que $F(x) \neq x$ pour tout $x \in B$. L'intersection $G(x)$ de la sphère unité avec la demi-droite issue de $F(x)$ passant par x s'obtient

en résolvant le système d'équations

$$G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \text{ et } \|G(x)\|^2 = 1 ,$$

à l'inconnue $\lambda > 0$ (fonction de x).

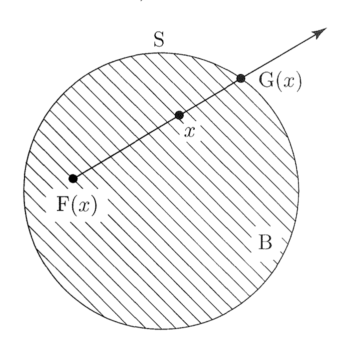


Fig. 85. Construction d'une rétraction G de la boule B sur la sphère S.

Cela s'écrit

$$\|\lambda(x - F(x)) + F(x)\|^2 - 1 = 0 ,$$

soit, en développant, $P_x(\lambda) = 0$ avec

$$P_x(\lambda) = \lambda^2 \|x - F(x)\|^2 + 2\lambda(x - F(x)) \cdot F(x) + \|F(x)\|^2 - 1 .$$

Comme

$$P_x(0) = \|F(x)\|^2 - 1 \leqslant 0 , P_x(1) = \|x\|^2 - 1 \leqslant 0$$

et $P_x(\lambda) \to +\infty$ si $\lambda \to \pm\infty$, on voit que cette équation du second degré admet une racine $\lambda \leqslant 0$ et une racine $\lambda \geqslant 1$. Le discriminant

$$\Delta(x) = ((x - F(x)) \cdot F(x))^2 + \|x - F(x)\|^2 \left(1 - \|F(x)\|^2\right)$$

est strictement positif pour tout $x \in B$, puisque P_x a deux racines distinctes ; la racine positive est

$$\lambda(x) = \frac{-(x - F(x)) \cdot F(x) + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - F(x)\|^2} .$$

De plus $P_x(1) = 0$ si $x \in S$, d'où $\lambda(x) = 1$ dans ce cas.

On a ainsi établi que $x \mapsto \lambda(x)$, et par suite $x \mapsto G(x)$, sont continues sur B, et que $G(x) = x$ si $x \in S$.

3. Lorsque $x = (s \cos 2\pi t, s \sin 2\pi t)$ parcourt le cercle de centre 0 et de rayon s fixé, t variant de 0 à 1, son image $G(x) = \gamma_s(t)$ parcourt un chemin continu fermé (lacet) contenu dans le cercle S. En particulier $\gamma_0(t)$ est le lacet réduit au point $G(0)$ et

$$\gamma_1(t) = G(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

est le cercle unité S parcouru dans le sens direct. Leurs indices par rapport à l'origine (nombre de tours autour de 0) sont, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et $\gamma_1(t)$ à $e^{2i\pi t}$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z} = 0 \text{ et } \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = 1 .$$

Or γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans le plan privé de 0 : l'application $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ est continue sur $[0,1] \times [0,1]$, à valeurs dans le cercle unité, et déforme continûment γ_0 en γ_1 sans rencontrer l'origine. Les deux intégrales ci-dessus devraient alors être égales d'après le théorème de Cauchy (Dieudonné [18] p. 223 ou [17] p.205). Cette contradiction montre qu'il ne peut pas exister de rétraction du disque B sur le cercle S, d'où le théorème de Brouwer pour $n = 2$.

4. Heuristique. Les propriétés d'un champ de vecteurs v sont intimement liées à celles du système différentiel

$$y' = v(y) \text{ , } y(0) = x \text{ ,}$$

dont la solution $y(t) = \varphi_t(x)$ définit le *flot* φ_t du champ v (on admet ici son existence et son unicité, au moins pour t petit). Les zéros du champ v sont les points fixes communs à tous les φ_t (*positions d'équilibre* du système différentiel), puisque l'égalité $v(a) = 0$ équivaut à $\varphi_t(a) = a$ pour tout t. Pour t petit on a

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + \cdots \text{ , i.e. } \varphi_t(x) = x + tv(x) + \cdots \text{ ,}$$

d'où l'idée suggérée par l'énoncé de rechercher les points fixes de l'application $F(x) = x + tv(x)$ pour un $t > 0$ convenablement choisi ; l'égalité $F(a) = a$ équivaut bien sûr à $v(a) = 0$.

Le champ v étant supposé continu sur B, l'application $F : B \to \mathbb{R}^n$ est continue. Il suffit donc d'avoir $F(B) \subset B$ pour pouvoir lui appliquer le théorème de Brouwer. Or, pour t petit, c'est seulement quand x est proche de la sphère que $F(x)$ risque d'être en dehors de la boule B ; mais cela lui est interdit car $v(x)$ est alors un vecteur rentrant...

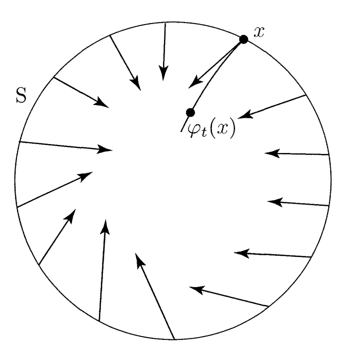


Fig. 86. Champ de vecteurs rentrant dans la sphère.

Solution. Il s'agit donc de choisir $t > 0$ pour que l'expression

$$\begin{aligned}\|F(x)\|^2 &= \|x + tv(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t\, x \cdot v(x) + t^2 \|v(x)\|^2\end{aligned}$$

soit inférieure à 1 pour tout $x \in B$.

On sait que $x \cdot v(x) < 0$ lorsque $\|x\| = 1$. Montrons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que cela reste vrai dans la couronne $1 - \alpha \leqslant \|x\| \leqslant 1$: sinon il existerait (en prenant $\alpha = 1/k$ par exemple) une suite (x_k) telle que

$$1 - \frac{1}{k} \leqslant \|x_k\| \leqslant 1 \text{ et } x_k \cdot v(x_k) \geqslant 0\,;$$

par compacité de B, on pourrait en extraire une sous-suite convergeant vers un point x, de norme 1 nécessairement, tel que $x \cdot v(x) \geqslant 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par compacité de cette couronne, la fonction continue $x \cdot v(x)$ y atteint son maximum, d'où

$$x \cdot v(x) \leqslant -a < 0 \text{ si } 1 - \alpha \leqslant \|x\| \leqslant 1\,.$$

Soit d'autre part $M = \max_{x \in B} \|v(x)\|$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\|F(x)\|^2 &\leqslant 1 - 2at + M^2t^2 \text{ si } 1 - \alpha \leqslant \|x\| \leqslant 1 \\ &\leqslant 1 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2a}{M^2}\,.\end{aligned}$$

Enfin on a, pour $\|x\| \leqslant 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned}\|F(x)\| = \|x + tv(x)\| &\leqslant 1 - \alpha + Mt \\ &\leqslant 1 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\alpha}{M}\,.\end{aligned}$$

En réunissant ces inégalités, on a donc $\|F(x)\| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$ si t est assez petit, d'où $F(B) \subset B$ et la conclusion par le théorème de Brouwer.

5. Comme observé en 1, l'énoncé du théorème de Brouwer est invariant par homéomorphisme. On peut donc y remplacer la boule unité B (pour la norme euclidienne) par toute partie de $\mathbb{R}^n$ qui lui est homéomorphe, par exemple toute boule fermée (pour une norme quelconque, cf. Exercice 2), ou même toute *partie compacte convexe* (non vide) de $\mathbb{R}^n$. On peut montrer en effet, en généralisant la notion de jauge (Exercice 6) que tout compact convexe de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule unité fermée d'un espace $\mathbb{R}^p$, $p \leqslant n$ (voir Chambert-Loir *et al.* [41] p. 79).

Complément. Le théorème de Brouwer permet même d'établir la généralisation suivante (*ibidem*, p. 79) :

Théorème du point fixe de Schauder. *Soient* X *une partie convexe fermée (non vide) d'un espace normé et* F *une application continue de* X *dans lui-même, telle que* F(X) *soit relativement compact. Alors* F *admet (au moins) un point fixe dans* X.

De même que notre Théorème 4.1 permet d'établir le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels à coefficients C^1 (existence et unicité d'une solution, voir Exercice 60), de même le théorème de Schauder entraîne un théorème d'existence (sans unicité) pour les systèmes différentiels à coefficients continus ; voir Pommellet [34] p. 81.

Exercice 60. ***Point fixe et équations différentielles : un théorème de Cauchy-Lipschitz.*** **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application *continue*, supposée *globalement lipschitzienne en y* au sens suivant : pour tout intervalle compact K $\subset$ I il existe $k > 0$ tel que, pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,**

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k\,\|y - z\|$$

(ici $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$; noter que k n'est pas supposé inférieur à 1).

Le but de l'exercice est de montrer que le système différentiel

$$y' = f(t,y)\ ,\ y(t_0) = x\ ,$$

avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés, admet alors une *solution unique* $t \longmapsto y(t)$, *qui est définie sur* I tout entier.

Dans les questions 1 à 4, on suppose I *compact*, et on note E l'espace des fonctions $t \longmapsto y(t)$ continues de K dans $\mathbb{R}^m$, muni de la norme $\|y\|_\infty = \max_{t\in I} \|y(t)\|$. Pour $y \in E$ et $t \in I$ on définit

$$F(y)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds\ .$$

1. Montrer que le système différentiel équivaut à $y \in E$ et $F(y) = y$.

2. Soit ℓ la longueur de I. Montrer que F est lipschitzienne sur E de rapport $k\ell$. Peut-on en déduire le résultat souhaité ?

3. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, l'application itérée

$$F^p = F \circ F \circ \cdots \circ F$$

est lipschitzienne de rapport $(k\ell)^p/p!$.

[On pourra montrer par récurrence que

$$\|F^p(y)(t) - F^p(z)(t)\| \leqslant \frac{(k|t-t_0|)^p}{p!}\,\|y - z\|_\infty\ .]$$

4. Conclure lorsque I est compact.

[On pourra utiliser l'Exercice 55.]

5. Étendre le résultat à un intervalle I quelconque.

[On pourra l'écrire comme réunion d'une suite d'intervalles compacts.]

6. ***Exemples.*** **Appliquer ce qui précède au système linéaire à coefficients constants $y' = \mathrm{A}y$, $y(0) = x$ (on explicitera les itérés $\mathrm{F}^n(x)$ de la fonction constante x), et à l'équation du pendule**

$$u'' = -\sin u \ , \ u(0) = a \ , \ u'(0) = b \ .$$

Commentaire. L'application aux équations différentielles de la méthode des approximations successives (de Picard) est un succès majeur de cette méthode. Partant de l'approximation grossière d'une solution par la fonction constante $y_o(t) = x$, on construit par récurrence une suite d'approximations $y_n(t)$ en résolvant le problème

$$y_n' = f(t, y_{n-1}) \ , \ y_n(t_o) = x \ ,$$

ce qui donne immédiatement

$$y_n(t) = x + \int_{t_o}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds \ ,$$

relation abrégée en $y_n = \mathrm{F}(y_{n-1})$. La convergence des $y_n(t)$ vers la solution cherchée $y(t)$ résulte alors directement du théorème du point fixe appliqué à l'*équation intégrale* $y = \mathrm{F}(y)$, équivalente au système différentiel (dont elle englobe la condition initiale) : quelques majorations élémentaires montrent que l'opérateur intégral F est contractant, si l'intervalle de temps est assez court. À défaut l'un de ses itérés sera contractant, ce qui permet encore de conclure. Voir aussi une légère variante de la preuve, à la fin de la question 4.

On ne donne ici qu'une *version simplifiée du théorème de Cauchy-Lipschitz*, sous l'hypothèse trop forte « globalement lipschitzienne en y ». En contrepartie, l'existence de la solution est alors assurée sur la totalité de l'intervalle I donné, ce qui n'allait pas de soi ! On pensera encore et toujours à l'exemple (non globalement lipschitzien) $y' = y^2$, $y(0) = 1$ dont la solution $y(t) = 1/(1-t)$, sagement partie de 1 à l'instant $t = 0$, explose irrémédiablement au bout d'un temps fini, en $t = 1$.

Le présent résultat s'applique notamment à tous les *systèmes différentiels linéaires*

$$y' = \mathrm{A}(t)y + b(t) \ , \ y(t_o) = x$$

où la matrice $\mathrm{A}(t)$ (à m lignes et m colonnes) et le vecteur $b(t)$ (à m composantes) sont continus en t sur I. Le théorème s'applique avec la constante $k = \max_{t \in \mathrm{K}} \|\mathrm{A}(t)\|$(norme d'application linéaire), et garantit existence et unicité d'une solution définie sur I tout entier.

Citons enfin pour comparaison une *version générale du théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Théorème. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1. *Alors, pour toute donnée initiale* $(t_o, x) \in \mathrm{U}$, *le système différentiel*

$$y' = f(t, y) \ , \ y(t_o) = x$$

admet une solution maximale unique.

Maximale signifie que la solution $y(t)$ obtenue ne peut être prolongée à un intervalle de temps strictement plus grand ; on notera que l'énoncé se garde bien de préciser l'intervalle de définition de la solution (cf. $y' = y^2$ ci-dessus !). L'application f n'est ici que *localement lipschitzienne en* y ; cela se voit en majorant la norme de la différentielle de f sur un compact convenable, et en appliquant l'inégalité de la moyenne. La méthode du présent exercice s'adapte cependant sans grand changement, à condition de raisonner sur un *cylindre de sécurité* où restent valables les hypothèses utiles ; voir Demailly [13] p. 130 pour les détails.

Solution. 1. Dire que y est solution du système différentiel sur l'intervalle I signifie que $t \mapsto y(t)$ est une fonction vectorielle dérivable[4] sur I et que

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in \mathrm{I} \text{ , et } y(t_0) = x \ .$$

Comme f est continue, cela entraîne que y' est continue d'où en intégrant

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \ .$$

Réciproquement, si y est continue sur I et vérifie cette équation intégrale, alors y est dérivable sur I et solution du système différentiel.

En particulier, pour I compact, le problème équivaut à la recherche d'un point fixe $y \in \mathrm{E}$ de l'application F.

2. Pour $y, z \in \mathrm{E}$ et $t \in \mathrm{I}$ on a

$$\begin{aligned}\|\mathrm{F}(y)(t) - \mathrm{F}(z)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \right\| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds \right| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k\, \|y(s) - z(s)\|\, ds \right| \leqslant k|t - t_0|\, \|y - z\|_\infty\end{aligned}$$

4. Si I contient sa borne inférieure (resp. supérieure), cela inclut l'existence d'une dérivée à droite (resp. à gauche) en cette borne, avec la valeur donnée par l'équation différentielle.

(ne pas oublier la valeur absolue sur l'intégrale, t pouvant être inférieur à t_0). En passant au max sur l'intervalle I, de longueur ℓ, il vient

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty \leqslant k\ell \|y - z\|_\infty \ ,$$

et F est lipschitzienne sur E de rapport $k\ell$.

Si l'intervalle I est de longueur $\ell < 1/k$, F est contractante sur l'espace de Banach E, et y admet donc un point fixe unique. Ceci établit le résultat voulu pour un intervalle I *compact et assez petit.*

3. En reprenant la majoration précédente avec $y, z \in E$, $t \in I$, on a

$$\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leqslant k \left| \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\| \, ds \right| \leqslant k|t - t_0| \, \|y - z\|_\infty \ ,$$

puis

$$\begin{aligned} \left\|F^2(y)(t) - F^2(z)(t)\right\| &\leqslant k \left| \int_{t_0}^t \|F(y)(s) - F(z)(s)\| \, ds \right| \\ &\leqslant k \left| \int_{t_0}^t k|s - t_0| \, \|y - z\|_\infty \, ds \right| \\ &\leqslant k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} \|y - z\|_\infty \end{aligned}$$

(l'intégrale se calcule pour $t \geqslant t_0$ et pour $t \leqslant t_0$). Par récurrence sur p, on vérifie que, pour $t \in I$ et $p \geqslant 1$,

$$\|F^p(y)(t) - F^p(z)(t)\| \leqslant \frac{(k|t - t_0|)^p}{p!} \|y - z\|_\infty \ .$$

Par suite

$$\|F^p(y) - F^p(z)\|_\infty \leqslant \frac{(k\ell)^p}{p!} \|y - z\|_\infty$$

pour tous $y, z \in E$ et tout entier $p \geqslant 1$.

4. Les nombres k et ℓ étant donnés, on peut choisir $p \geqslant 1$ assez grand pour que $(k\ell)^p/p! < 1$ (c'est le terme général de la série exponentielle $e^{k\ell}$). L'itérée F^p est contractante sur E, donc admet un unique point fixe y. Alors, en reprenant l'Exercice 55 question 2,

$$F^p(F(y)) = F(F^p(y)) = F(y)$$

et $F(y)$ est aussi point fixe de F^p, d'où $F(y) = y$ par unicité, et y est point fixe de F. Inversement tout point fixe de F l'est aussi de F^p. Le y obtenu est donc bien l'unique point fixe de F, ce qui établit le résultat pour *tout intervalle compact* I.

Variante de 2, 3 et 4. Pour un intervalle I compact, on peut aussi raisonner directement comme suit, sans référence au théorème du point fixe. Soit $(y_n(t))$ la suite de fonctions construite par la méthode des approximations successives (voir Commentaire ci-dessus). Pout $t \in \mathrm{I}$ on a

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,x)\|\, ds \right| \leqslant \mathrm{M}|t - t_0| \ ,$$

en notant $\mathrm{M} = \max_{t\in \mathrm{I}} \|f(t,x)\|$; plus généralement, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))\|\, ds \right| \\ &\leqslant k \left| \int_{t_0}^{t} \|y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)\|\, ds \right| \ , \end{aligned}$$

d'où, par une récurrence facile,

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leqslant \mathrm{M}k^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k} \frac{(k\ell)^n}{n!} \ .$$

De là résulte la convergence normale sur I de la série $\sum(y_n(t) - y_{n-1}(t))$, d'où la convergence uniforme de $y_n(t)$ vers une fonction $y(t)$, puis celle de $f(s, y_n(s))$ vers $f(s, y(s))$ grâce à l'hypothèse f lipschitzienne. On conclut que y est une solution de l'équation intégrale $\mathrm{F}(y) = y$. Enfin l'unicité s'obtient par une technique analogue : si y et z sont deux solutions, on a

$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \ ,$$

d'où comme précédemment

$$\|y(t) - z(t)\| \leqslant k \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\|\, ds \right| \ ,$$

et par récurrence

$$\|y(t) - z(t)\| \leqslant \mathrm{C}k^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

avec $\mathrm{C} = \max_{t\in \mathrm{I}} \|y(t) - z(t)\|$. En faisant tendre n vers l'infini on en déduit $y(t) = z(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.

5. Un intervalle quelconque I peut s'écrire $\mathrm{I} = \bigcup_j \mathrm{I}_j$, réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts $\mathrm{I}_0 \subset \mathrm{I}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{I}_j \subset \cdots$ contenant tous le point t_0 donné. Soit y_j *la* solution (donnée par 4) du problème sur I_j :

$$y_j' = f(t, y_j) \ , \ t \in \mathrm{I}_j \ , \ y_j(t_0) = x \ .$$

Si $y(t)$ est une solution du problème sur I

$$y' = f(t, y) \ , \ t \in \mathrm{I} \ , \ y(t_0) = x \ ,$$

la restriction de y à I_j coïncide nécessairement avec y_j, par l'unicité sur I_j. Inversement la fonction

$$y(t) = y_j(t) \text{ pour tout } j \text{ tel que } t \in \mathrm{I}_j$$

est bien définie (encore l'unicité sur I_j !) et donne une solution sur I.

Le problème sur un *intervalle quelconque* I admet donc une solution unique, définie sur I tout entier.

6. Le problème $y' = \mathrm{A}y$, $y(0) = x$, où A est une matrice $m \times m$ constante, se résout directement en $y(t) = e^{t\mathrm{A}}x$. D'autre part les itérés $\mathrm{F}^n(x)$, à partir de la fonction constante x, sont

$$\mathrm{F}(x) = x + \int_0^t \mathrm{A}x \, ds = x + t\mathrm{A}x = (\mathrm{I} + t\mathrm{A})x$$
$$\mathrm{F}^n(x) = \left(\mathrm{I} + t\mathrm{A} + \cdots + \frac{(t\mathrm{A})^n}{n!} \right) x \ .$$

On reconnaît les sommes partielles de la série exponentielle bien connue.

L'équation du pendule $u'' = -\sin u$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$ équivaut au système différentiel du premier ordre $y' = f(y)$, $y(0) = x$ avec

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \ , \ x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ , \ f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix} \ .$$

Pour $y, z \in \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$ on a

$$\|f(y) - f(z)\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ \sin z_1 - \sin y_1 \end{pmatrix} \right\|_1 = |y_2 - z_2| + |\sin y_1 - \sin z_1|$$
$$\leqslant |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| = \|y - z\|_1 \ ,$$

par l'inégalité de la moyenne sur la fonction sin. Donc f est globalement lipschitzienne en y, de rapport 1, et le résultat de 5 assure l'existence et l'unicité d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : le mouvement de l'horloge se poursuivra donc indéfiniment... (voir aussi l'Exercice 125).

Exercice 61. ***Point fixe et équations intégrales.*** **Soient $\mathbf{I} = [a, b]$ un intervalle compact, $\mathbf{K} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et E l'espace des fonctions réelles continues sur I, muni de la norme de la convergence uniforme. On donne $\varphi \in \mathbf{E}$.**

1. Montrer que l'*équation intégrale de Fredholm*

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)x(s) \, ds \ , \ t \in \mathrm{I} \ ,$$

admet une solution unique $x \in \mathrm{E}$, si $(b-a)\max_{s,t\in \mathrm{I}} |\mathrm{K}(s,t)| < 1$.

[Si $\mathrm{F}(x)(t)$ est le second membre de l'équation, on pourra appliquer le théorème du point fixe à F.]

2. Résoudre et discuter l'équation

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^1 \lambda x(s)\,ds\ ,\ t \in \mathrm{I}\ ,$$

selon les valeurs de la constante λ.

3. Montrer que l'*équation intégrale de Volterra*

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t \mathrm{K}(s,t)x(s)\,ds\ ,\ t \in \mathrm{I}\ ,$$

admet toujours une unique solution $x \in \mathrm{E}$.

[On pourra appliquer le théorème du point fixe, en reprenant la méthode de l'Exercice 60 question 3.]

Solution. 1. Soit

$$\mathrm{F}(x)(t) = \varphi(t) + \int_a^b \mathrm{K}(s,t)x(s)\,ds\ ,\ t \in \mathrm{I}\ .$$

À chaque $x \in \mathrm{E}$ l'opérateur F associe la fonction $\mathrm{F}(x) \in \mathrm{E}$, et le problème s'écrit $\mathrm{F}(x) = x$. On a

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(x)(t) - \mathrm{F}(y)(t)| &= \left|\int_a^b \mathrm{K}(s,t)(x(s)-y(s))ds\right| \\ &\leqslant (b-a)\,\|\mathrm{K}\|_\infty\,\|x-y\|_\infty\ ,\end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)\|_\infty \leqslant (b-a)\,\|\mathrm{K}\|_\infty\,\|x-y\|_\infty\ .$$

Par suite F est contractante sur E si $(b-a)\,\|\mathrm{K}\|_\infty < 1$. Comme E est complet, elle admet alors un point fixe unique.

2. Qu'advient-il pour $(b-a)\,\|\mathrm{K}\|_\infty \geqslant 1$? L'équation proposée en exemple entraîne évidemment $x(t) = \varphi(t) + c$, où c est une constante. En intégrant de 0 à 1 l'équation donnée il vient

$$\int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \lambda\int_0^1 x(s)\,ds\ ,$$

d'où, en reportant $x = \varphi + c$,

$$(1-\lambda)c = \lambda\int_0^1 \varphi(t)\,dt\ .$$

– Si $\lambda \neq 1$, il y a solution unique quelle que soit $\varphi \in \mathrm{E}$, à savoir

$$x(t) = \varphi(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 \varphi(s)\, ds \, .$$

– Si $\lambda = 1$, il y a solution si et seulement si $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$. Les solutions sont alors

$$x(t) = \varphi(t) + c \, ,$$

où c est maintenant une constante arbitraire.

Remarque. Plus généralement, on peut montrer que l'opérateur A défini par

$$\mathrm{A}(x)(t) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)x(s)\, ds$$

est un *opérateur compact* de E dans lui-même, d'où résulte que $\mathrm{I}-\mathrm{A}$ est un *opérateur de Fredholm*, i.e. son noyau est de dimension finie, et son image est fermée et de codimension finie dans E. En d'autres termes, l'équation intégrale de Fredholm admet une solution si et seulement si φ satisfait à un nombre fini de conditions linéaires (telles que $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$ ci-dessus), et la solution n'est (en général) pas unique. Voir Lang [29] chapitre 9 ou, pour la norme L^2, Dieudonné [18] chapitre 11.

3. La situation est meilleure ici qu'en 1, comme on va voir. Soit

$$\mathrm{F}(x)(t) = \varphi(t) + \int_a^t \mathrm{K}(s,t)x(s)\, ds \, ;$$

l'équation intégrale s'écrit $x = \mathrm{F}(x)$. Comme à l'Exercice 60 question 3 on a, pour $x, y \in \mathrm{E}$ et $a \leqslant t \leqslant b$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}(x)(t) - \mathrm{F}(y)(t)| &= \left| \int_a^t \mathrm{K}(s,t)(x(s) - y(s))ds \right| \\
&\leqslant \|\mathrm{K}\|_\infty \int_a^t |x(s) - y(s)|ds \\
&\leqslant (t-a)\, \|\mathrm{K}\|_\infty \, \|x - y\|_\infty \, .
\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$

$$|\mathrm{F}^p(x)(t) - \mathrm{F}^p(y)(t)| \leqslant \frac{((t-a)\, \|\mathrm{K}\|_\infty)^p}{p!} \, \|x-y\|_\infty \, ,$$

et finalement

$$\|\mathrm{F}^p(x) - \mathrm{F}^p(y)\|_\infty \leqslant \frac{((b-a)\, \|\mathrm{K}\|_\infty)^p}{p!} \, \|x-y\|_\infty \, .$$

Comme à l'Exercice 60 on en déduit que, si p est choisi assez grand, F^p est contractante sur E, donc admet un point fixe unique x, qui est aussi l'unique point fixe de F.

Chapitre 5

Fonctions inverses, implicites, et sous-variétés

1. Objectifs

Ce chapitre contient les résultats culminants du cours. La Grande Idée du calcul différentiel, approcher une application « quelconque » par une application linéaire, porte ici ses premiers fruits, par exemple en ramenant (localement au moins) l'étude d'un système général de p équations à n inconnues à celle d'un système linéaire.

Les théorèmes expliqués ci-dessous ont d'importantes applications géométriques : en apprenant à raisonner « à difféomorphisme local près », on est enfin en mesure de clarifier la notion de courbe, de surface ou (plus généralement) de sous-variété de $\mathbb{R}^n$, l'équivalence de leurs trois modes classiques de définition (paramétriquement, implicitement, ou comme graphe), et la notion de tangente ou espace tangent.

Le panorama du cours contient trois résultats majeurs :

- le théorème d'inversion locale (résoudre $y = f(x)$ en $x = f^{-1}(y)$)
- le théorème des fonctions implicites (résoudre $f(x, y) = 0$ en $y = \varphi(x)$)
- le théorème des sous-variétés (équivalence des diverses définitions d'une courbe ou d'une surface).

L'importance de ces énoncés justifie qu'on en donne quelques variantes[1].

C'est par simple commodité que le chapitre est ainsi divisé en trois ; le troisième théorème n'est en fait qu'une version géométrique des deux premiers, lesquels sont équivalents entre eux !

Les versions « banachiques » des énoncés seront délibérément laissées de côté (on les trouvera par exemple dans Avez [3] ou Cartan [8]). On se range ici sagement à l'avis, maintes fois répété, du jury d'agrégation : il est inutile de remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace de Banach quelconque, si les seules applications que l'on a en vue ne sont qu'en dimension finie[2]. Une

1. Notamment celles de classe C^k (sans attendre le chapitre 6), ceci afin d'éviter les redites ; mais l'essentiel des résultats repose sur l'usage des seules différentielles premières.

2. Signalons toutefois une intéressante preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz par les fonctions implicites en dimension infinie (Demazure [14] p. 186).

telle généralisation pourrait même virer au désastre si l'on n'a pas réfléchi au sens exact d'une hypothèse telle que « $D_y f(a, b)$ est un isomorphisme » et si on s'avère incapable, comme il est trop fréquent, de l'expliciter sur un exemple en dimension un ou deux...

2. Fonctions inverses (panorama)

Théorème 5.1. (Théorème d'inversion locale) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, a *un point de* U, *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^1. *On suppose que la matrice jacobienne* $\mathrm{D}f(a)$ *est inversible, i.e.* $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$.

Il existe alors un ouvert V *contenant* a *(et contenu dans* U*) et un ouvert* W *contenant* $b = f(a)$, *tels que* f *(restreinte à* V*) soit un difféomorphisme de classe* C^1 *de* V *sur* $\mathrm{W} = f(\mathrm{V})$.

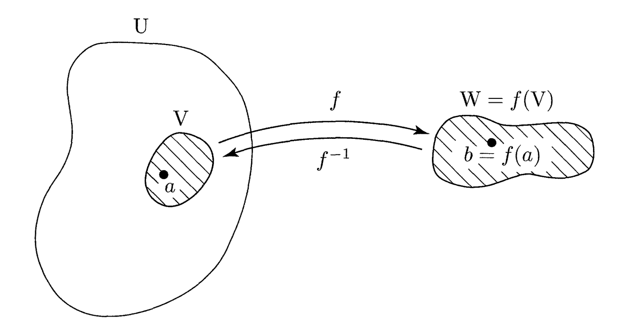


Fig. 87. Le théorème d'inversion locale.

On a ainsi l'équivalence

$$(x \in \mathrm{V} \text{ et } y = f(x)) \iff (y \in \mathrm{W} \text{ et } x = f^{-1}(y)) ,$$

en notant $f^{-1} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ la bijection réciproque de f (il s'agit en fait de la bijection réciproque de la *restriction* de f à V). L'équation $f(x) = y$, à l'inconnue x, admet une unique solution x *dans* V ; mais elle peut en avoir d'autres en dehors de V (exemple : $x^2 = y$, ou Exercice 63 question 1). Rien n'assure que V = U !

On a de plus

$$\mathrm{D}(f^{-1})(y) = \mathrm{D}f(x)^{-1} \text{ pour } x \in \mathrm{V} .$$

Pratiquement, l'application f s'écrit

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

et l'hypothèse à vérifier est

$$\det \mathrm{D}f(a) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \ .$$

Noter que *cette hypothèse est nécessaire* : si f est bijective et si f^{-1} est de classe C^1 on a $f^{-1}(f(x)) = x$ d'où, par dérivation de fonctions composées,

$$\mathrm{D}(f^{-1})(f(a)) \circ \mathrm{D}f(a) = \mathrm{I} \ ,$$

et il faut bien que $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$.

Heuristique du théorème d'inversion locale. On veut résoudre en l'inconnue x (voisine de a) l'équation

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(x-a) + \cdots \\ &= b + \mathrm{D}f(a)(x-a) + \cdots \end{aligned}$$

où les $\cdots$ sont un $o(\|x-a\|)$. Si $\mathrm{D}f(a)$ est inversible, il y a solution unique pour y donné (voisin de b), à savoir

$$x = f^{-1}(y) = a + \mathrm{D}f(a)^{-1}(y-b) + \cdots$$

On voit de plus, par définition de la différentielle, que $\mathrm{D}(f^{-1})(b) = \mathrm{D}f(a)^{-1}$.

La démonstration rigoureuse utilise le *théorème du point fixe.* Pour résoudre en x l'équation $f(x) - y = 0$ (où y est fixé, dans un premier temps), on la transforme en un problème équivalent de la forme $\mathrm{F}(x) = x$, en choisissant l'application

$$\mathrm{F}(x) = x - \mathrm{D}f(a)^{-1}(f(x) - y)$$

(cf. l'heuristique de la méthode de Newton, Exercice 49). La solution s'obtiendra comme limite de la suite récurrente $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$, $x_0 = a$, rapidement convergente puisque $\mathrm{DF}(x)$ est voisin de

$$\mathrm{DF}(a) = \mathrm{I} - \mathrm{D}f(a)^{-1} \circ \mathrm{D}f(a) = 0 \ .$$

On termine en montrant que la solution x obtenue est continûment différentiable par rapport au paramètre y. Voir les détails à l'Exercice 71.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *changement de coordonnées sur* V la donnée de n fonctions $f_1, \ldots, f_n : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ telles que l'application

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)) = (u_1, ..., u_n)$$

soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$. Par exemple les relations $u_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_j$ définissent un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ si (a_{ij}) est une matrice inversible ; ou l'application

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = (r, \theta)$$

donne le passage en coordonnées polaires sur le demi-plan ouvert $x > 0$ de $\mathbb{R}^2$ (Exercice 20).

Théorème 5.2. (Théorème du changement de coordonnées) *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions numériques de classe C^1 au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$. Les relations*

$$u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)\ , \ \ldots\ , \ u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si et seulement si le déterminant jacobien $\det(\partial f_i/\partial x_j)(a)$ n'est pas nul, c'est-à-dire si les différentielles $Df_1(a), \ldots, Df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Les $Df_i(a)$ sont les vecteurs lignes de la matrice $Df(a)$. Cet énoncé n'est bien sûr qu'une simple paraphrase du théorème d'inversion locale.

Corollaire 5.1. *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions numériques de classe C^1 au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1}, \ldots, f_n$ en un changement de coordonnées au voisinage de a sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les différentielles $Df_1(a), \ldots, Df_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.*

Ce corollaire généralise le théorème de la base incomplète en algèbre linéaire (voir Exercice 72 question 1). Il permet notamment de simplifier un problème en prenant pour nouvelles coordonnées certaines fonctions qui y jouent un rôle important (voir Exercice 64).

Voici enfin quelques variantes du théorème d'inversion.

Théorème 5.3. (Théorème d'inversion globale) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose que f est injective sur U et que, pour tout $x \in U$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible, i.e.* $\det Df(x) \neq 0$.

Alors l'ensemble image $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $f(U)$.

(Voir Cartan [8] p. 57 pour une preuve). Il ne faut pas oublier ici l'hypothèse d'injectivité de f : voir le contre-exemple de l'Exercice 63 question 1. Cet énoncé global n'est pas aussi satisfaisant qu'il y paraît : *en pratique* on est souvent amené, pour vérifier l'injectivité de f, ou pour expliciter l'image $f(U)$, à faire des calculs qui reviennent à expliciter f^{-1} ; le théorème perd alors tout intérêt ! Ces réserves ne concernent pas

l'énoncé du théorème d'inversion locale, pour lequel il suffit de s'assurer que $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$, ce qui est généralement immédiat.

Un résultat global satisfaisant, mais plus difficile, est le suivant (voir Zuily et Queffélec [40] p. 392 ; voir aussi Avez [3] p. 131 et, avec des hypothèses plus fortes, l'Exercice 70).

Théorème 5.4. (Hadamard-Lévy) *Soit f une application de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

(ii) f est propre et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(x)$ *est inversible.*

Une application est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Lorsque $\mathbb{R}^n$ est l'espace de départ et d'arrivée, cela revient à dire que $\|f(x)\|$ tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini.

Théorème 5.5. (Théorème d'inversion locale, version C^k) *Même énoncé que le Théorème 5.1, en remplaçant « classe* C^1 *» par « classe* C^k *» dans l'hypothèse et dans la conclusion.*

On peut prendre ici $k = 1, 2, \ldots$ ou $k = \infty$. Voir Cartan [8] p.74.

Théorème 5.6. (Théorème d'inversion globale, version holomorphe) *On note* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. On suppose f* injective *sur* U.

Alors l'image $f(\mathrm{U})$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et f est un difféomorphisme holomorphe de* U *sur* $f(\mathrm{U})$, *i.e.* f^{-1} *est holomorphe sur* $f(\mathrm{U})$.

Il est remarquable que l'on n'ait ici besoin d'aucune hypothèse sur la dérivée de f : la seule injectivité de f suffit à empêcher f' de s'annuler ! Si, en effet, cette dérivée s'annulait en un point z_o, le développement en série entière de f autour de z_o serait de la forme

$$f(z) - f(z_o) = a_k(z - z_o)^k + \cdots$$

avec $k \geqslant 2$; au voisinage de z_o la fonction se comporterait à peu près comme la fonction « puissance k », et ne pourrait pas être injective. Voir Cartan [9] p. 178 ou Rudin [35] théorème 10.33 pour les détails.

Références. Cartan [8] p. 54 sq. ; Avez [3] chapitre 3.

3. Fonctions implicites (panorama)

Théorème 5.7. (Théorème des fonctions implicites) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (a, b) *un point de* U, *et* $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ *une application de classe* C^1 *de* U *dans* $\mathbb{R}^p$. *On suppose que* $f(a, b) = 0$ *et que la matrice jacobienne* $\mathrm{D}_y f(a, b)$, *formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible, i.e.* $\det \mathrm{D}_y f(a, b) \neq 0$.

Alors l'équation $f(x,y) = 0$ *peut être résolue localement par rapport aux variables* y *: il existe* V *(voisinage ouvert de* a *dans* $\mathbb{R}^n$*),* W *(voisinage ouvert de* b *dans* $\mathbb{R}^p$*), avec* $\mathrm{V} \times \mathrm{W} \subset \mathrm{U}$*, et une application* $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$*, de classe* C^1*, unique, telle que*

$$(x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{W} \text{ et } f(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x \in \mathrm{V} \text{ et } y = \varphi(x)) \ .$$

De plus $\mathrm{D}_y f(x,y)$ *est inversible pour tout* $(x,y) \in \mathrm{V} \times \mathrm{W}$*, ce qui permet le calcul de* $\mathrm{D}\varphi(x)$ *comme expliqué plus bas.*

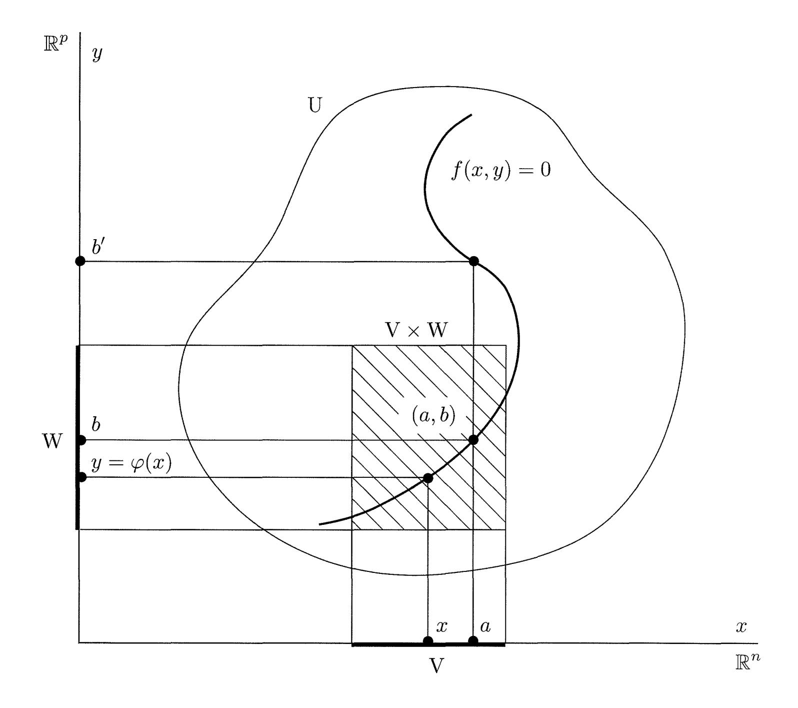


Fig. 88. Le théorème des fonctions implicites.

On appelle φ la *fonction implicite* définie par f au voisinage du *point de départ* (a,b) ; on a en particulier $\varphi(a) = b$.

La signification du théorème est que la « courbe » définie implicitement par l'équation $f(x,y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le *graphe d'une fonction* φ.

Le résultat est *local* au voisinage de (a,b) : si on agrandit trop W, il pourra par exemple contenir un point tel que b' (voir figure) et on ne pourra plus avoir unicité de φ. Sous des hypothèses convenables, il y a une fonction implicite au voisinage de (a,b) et une autre au voisinage de (a,b').

Exemple 1. Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $f'_y(x,y) = 2y$ et il faut exclure les points où $y = 0$. En prenant $(0,1)$ ou $(0,-1)$ pour points de départ, on voit que l'équation définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2, correspondant aux demi-cercles supérieur et inférieur :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1 &=]-1,1[\ , \mathrm{W}_1 =]0,\infty[\ , \quad y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ \mathrm{V}_2 &=]-1,1[\ , \mathrm{W}_2 =]-\infty,0[\ , y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}\ . \end{aligned}$$

Pratiquement, on a un système de p équations

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_p) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_p(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_p) = 0 \end{cases}$$

à p inconnues $y_1,\ldots,y_p$ (les x_i étant donnés), que l'on souhaite résoudre sous la forme

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \quad\vdots \\ y_p = \varphi_p(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

L'hypothèse à vérifier au *point de départ* (a,b) est

$$f_j(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_p) = 0 \text{ pour } j = 1,\ldots,p$$

et

$$\det \mathrm{D}_y f(a,b) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{bmatrix} (a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_p) \neq 0\ .$$

Les noms des variables étant susceptibles de varier d'un problème à l'autre, on retiendra que le jacobien à considérer est le *déterminant des dérivées partielles des fonctions données par rapport aux inconnues que l'on veut obtenir.*

Différentielle de la fonction implicite. L'existence de $\mathrm{D}\varphi(x)$ sur V est donnée par le théorème. Son calcul n'est plus alors qu'un exercice *élémentaire* de dérivation de fonction composée. Il est, comme toujours, inutile d'apprendre une formule (car souvent notation varie, et bien fol qui s'y fie), mais bien plus profitable de retenir une méthode : *différentier les relations que vérifient (par définition) les fonctions implicites.* On partira ainsi de

$$f_j(x_1,\ldots,x_n;\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_p(x_1,\ldots,x_n)) = 0\ ,\ j = 1,\ldots,p$$

pour tout $x \in \mathrm{V}$; ces expressions étant identiquement nulles, leurs dérivées partielles par rapport à x_i le sont aussi, ce qui donne

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x,\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x,\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x) = 0$$

par dérivation de fonction composée. Les $(\partial f_j/\partial y_k)$ forment la matrice $\mathrm{D}_y f(x,y)$, inversible, et on peut donc tirer de là les dérivées $(\partial\varphi_k/\partial x_i)$ des fonctions implicites, en résolvant un système linéaire de Cramer de p équations à p inconnues. Le résultat peut s'écrire

$$\mathrm{D}\varphi(x) = -(\mathrm{D}_y f(x,\varphi(x))^{-1} \circ \mathrm{D}_x f(x,\varphi(x)) \ ,$$

mais il est préférable, répétons-le, de refaire à chaque fois le calcul élémentaire précédent.

Exemple 2. L'équation $x^2+y^2-1=0$ donne $y=\varphi(x)$ (Exemple 1), d'où en dérivant par rapport à x

$$2x + 2yy' = 0$$

et par suite $y' = \varphi'(x) = -x/y$. La division par y est possible, puisqu'on est justement sur un ouvert où y ne s'annule pas. Un exemple analogue sera détaillé à l'Exercice 76.

Notation différentielle. Cette notation, introduite au chapitre 2 pour dériver les fonctions composées, conduit ici à une présentation simple et agréable du calcul des

$$d\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i \ ,$$

et donc des dérivées partielles des φ_k. Voyons-le sur un exemple.

Si le théorème des fonctions implicites s'applique au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3+y^3+z^3=3 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{array} \right. ,$$

définissant implicitement x et y fonctions de z, on obtient les dérivées $x'(z)=dx/dz$ et $y'(z)=dy/dz$ en différentiant les relations, ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{c} 3\left(x^2dx+y^2dy+z^2dz\right)=0 \\ 2\left(xdx+ydy-dx\right)=0 \end{array} \right. ,$$

et en résolvant ce système linéaire en dx et dy :

$$dx = \frac{-z^2}{x^2-(x-1)y}dz \ , \ dy = \frac{(x-1)z^2}{(x^2-(x-1)y)y}dz \ ,$$

d'où x' et y'. On a supposé non nulle l'expression $(x^2-(x-1)y)y$, qui n'est autre (à un facteur constant près) que le déterminant jacobien des deux fonctions données $x^3+y^3+z^3-3$ et x^2+y^2-2x par rapport aux inconnues x et y que l'on extrait. Ces calculs sont valables notamment au voisinage du point de départ $x=y=z=1$.

Heuristique du théorème des fonctions implicites. On veut résoudre en l'inconnue y l'équation $f(x,y)=0$. Or, pour x voisin de a et y voisin de b on a

$$f(x,y)=f(a,b)+\mathrm{D}_x f(a,b)(x-a)+\mathrm{D}_y f(a,b)(y-b)+\cdots$$

En oubliant les $\cdots$ (c'est là le privilège de l'heuristique), on voit que l'équation a une solution y unique si $\mathrm{D}_y f(a,b)$ est inversible. Comme $f(a,b)=0$ par hypothèse, la solution est

$$y=\varphi(x)=b-\mathrm{D}_y f(a,b)^{-1}\circ\mathrm{D}_x f(a,b)(x-a)+\cdots\ ,$$

ce qui fournit en prime l'expression

$$\mathrm{D}\varphi(a)=-\mathrm{D}_y f(a,b)^{-1}\circ\mathrm{D}_x f(a,b)\ .$$

Pour une preuve rigoureuse, on peut *se ramener au théorème d'inversion locale* par un petit artifice (motivé par l'Exercice 90). Soit $g(x,y)=(x,f(x,y))$; alors g applique $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ dans lui-même, et l'hypothèse sur f permet d'inverser g par le théorème 5.1. On a donc, sur des ouverts convenables,

$$(f(x,y)=0)\iff\left\{\begin{array}{l}x=x\\ f(x,y)=0\end{array}\right.\iff(g(x,y)=(x,0))$$
$$\iff\big((x,y)=g^{-1}(x,0)\big)\iff\left\{\begin{array}{l}x=x\\ y=\varphi(x)\end{array}\right.\ .$$

La fonction implicite φ est ainsi donnée par la deuxième composante de g^{-1}. Voir Cartan [8] p. 61 pour les détails.

On peut aussi obtenir directement $y=\varphi(x)$ *par la méthode du point fixe*, comme limite de la suite récurrente

$$y_{n+1}=y_n-\mathrm{D}_y f(a,b)^{-1}f(x,y_n)\ ,\ y_o=b\ ,$$

où on reconnaîtra sans peine la méthode du point fixe pour l'inversion de l'application g. Voir les détails à l'Exercice 86.

Les théorèmes 5.1 (inversion locale) et 5.7 (fonctions implicites) sont *équivalents* : on a vu que l'inversion de $g(x,y)=(x,f(x,y))$ donne la fonction implicite $y=\varphi(x)$ pour $f(x,y)=0$; d'autre part la résolution de l'équation implicite $f(x)-y=0$ donne la fonction inverse $x=f^{-1}(y)$.

Voici enfin deux variantes du théorème 5.7.

Théorème 5.8. (Théorème des fonctions implicites, version C^k ou holomorphe) *Même énoncé que le Théorème 5.7, en remplaçant « classe* C^1 *» par « classe* C^k *» dans l'hypothèse et dans la conclusion.*

De même en remplaçant partout $\mathbb{R}$ *par* $\mathbb{C}$ *et « classe* C^1 *» par « holomorphe ».*

On peut prendre ici $k = 1, 2, \ldots$ ou $k = \infty$. Voir Cartan [8] p. 74 pour la version C^k, et Cartan [9] p. 138 pour la version holomorphe (déduite de la version C^1 réelle) ou Valiron [39] p. 89 (par la méthode des séries majorantes).

Références. Cartan [8] p. 61 ; Avez [3] p. 30 ; Dieudonné [18] p. 275 ; Schwartz [37] p. 175.

4. Sous-variétés (panorama)

Quoi de commun à la parabole d'équation

$$y = x^2 ,$$

à l'ovale de Cassini

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 + 1 ,$$

à l'ellipse

$$x = a \cos t \ , \ y = b \sin t \ ,$$

tous trois baptisés « courbes » ? Et au paraboloïde hyperbolique

$$z = xy ,$$

au cylindre

$$x^2 + y^2 - x = 0 ,$$

au tore

$$x = (2 + \cos\varphi)\cos\theta \ , \ y = (2 + \cos\varphi)\sin\theta \ , \ z = \sin\varphi \ ,$$

appelés « surfaces » ?

La réponse est dans l'aspect local de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$, qui est celui d'une droite, resp. d'un plan, que l'on aurait déformé(e). Ainsi l'application

$$\mathrm{F} : (x, y) \mapsto (u, v) = (x, y - x^2) ,$$

d'inverse

$$\mathrm{F}^{-1} : (u, v) \mapsto (x, y) = (u, v + u^2) ,$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{R}^2$ sur lui-même, qui transforme la parabole $y = x^2$ en la droite $v = 0$.

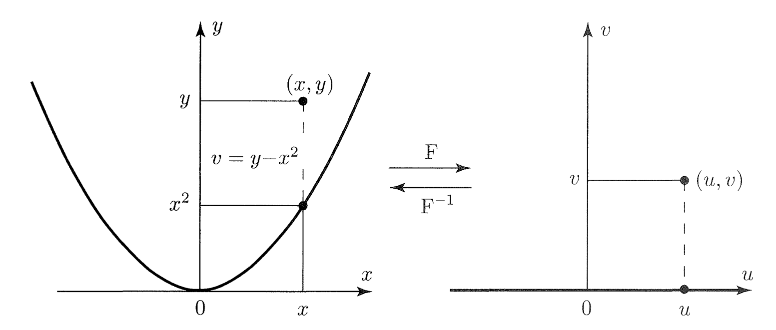


Fig. 89. Comment aplatir une parabole.

Il peut sembler bien facile, voire futile, d'aplatir ainsi une parabole... Ce serait pourtant impossible pour les ensembles définis par $y = |x|$ ou par $x^2 - y^3 = 0$ (voir Exercice 88) : l'une est *lisse* à l'origine, les autres pas, au sens de la définition suivante.

Définition 5.1. *Soient* V *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$, $a \in$ V, *et* d *un entier naturel. On dit que* V *est* lisse *en* a, *de dimension* d, *s'il existe un difféomorphisme* F *de classe* C^1 *d'un voisinage ouvert* U *de* a *dans* $\mathbb{R}^n$ *sur le voisinage ouvert* F(U) *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$, *qui transforme* V *en un sous-espace vectoriel de dimension* d, *i.e.*

$$\mathrm{F}(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}) = \mathrm{V}' \cap \mathrm{F}(\mathrm{U}) \quad \textit{avec } \mathrm{V}' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

On dit que V *est une* sous-variété *de dimension* d *de* $\mathbb{R}^n$ *si* V *est lisse (de dimension* d*) en chacun de ses points.*

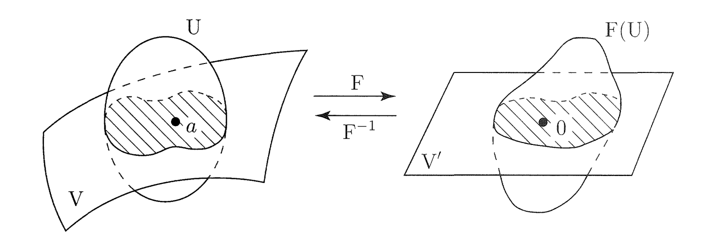


Fig. 90. V est lisse au point a.

En bref, une sous-variété se ramène (localement) à une droite, ou un plan, etc., par simple changement de coordonnées. Par définition même, les notions de « lisse en un point » et de « sous-variété » sont *invariantes par difféomorphisme* : si φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, V est lisse en a

(de dimension d) si et seulement si $\varphi(\mathrm{V})$ est lisse en $\varphi(a)$ (de dimension d). Noter que si V est lisse en a, elle l'est aussi en tout point voisin. L'entier d est unique.

On appelle[3] *courbe lisse*, resp. *surface lisse*, resp. *hypersurface lisse*, une sous-variété de dimension 1, resp. 2, resp. $n-1$, de $\mathbb{R}^n$. La définition précédente est celle d'une sous-variété de classe C^1 ; on pourrait évidemment l'étendre à la classe C^k, $k = 1, 2, ..., \infty$.

Exemple 3. Le cône C d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est lisse, de dimension 2, en chacun de ses points sauf l'origine (où il est pointu !). Donc $\mathrm{C}\backslash\{0\}$ est une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ (Exercice 88).

Définition 5.2. *Soient* V *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathrm{V}$. *Un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *est dit* tangent *en* a *à* V *s'il existe une fonction dérivable* $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(où* I *est un intervalle ouvert contenant* 0*) telle que*

$$\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathrm{V} \ , \ \gamma(0) = a \ \textit{et} \ \gamma'(0) = v \ .$$

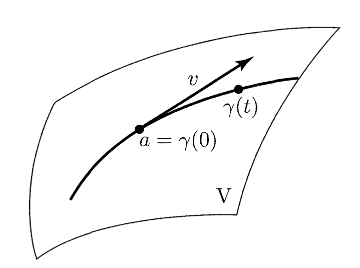


Fig. 91. Vecteur tangent en a à V.

Autrement dit, v est tangent à un arc tracé sur V et passant par a. Pour une notion plus générale de vecteur tangent (comme direction limite), voir les Exercices 17 et 104.

Théorème 5.9. *Si* V *est lisse en* a*, de dimension* d*, ses vecteurs tangents en* a *forment un sous-espace vectoriel de dimension* d*, appelé* espace vectoriel tangent *en* a *à* V.

On préfère souvent considérer l'*espace affine tangent en* a *à* V, parallèle au précédent et passant par a.

Sur les sous-variétés on pourra, en première lecture, se contenter de l'énoncé suivant.

3. Noter qu'on n'a pas défini les mots de *courbe*, *surface* ou *hypersurface* ! Aucune définition raisonnable n'est susceptible d'englober tous les cas intéressants, qui ne sont pas nécessairement lisses (cf. Exercices 76, 104, 109, 110, courbes de niveau, etc.). Il est cependant fréquent, dans un contexte bien précis, d'abréger *courbe lisse* en *courbe*, etc.

Théorème 5.10. (Sous-variété définie implicitement) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f_1, \ldots, f_p : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *des fonctions de classe* C^1*. Soit* V *l'ensemble des points* x *tels que*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U} \text{ et } f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ .$$

On suppose les différentielles $\mathrm{D}f_1(x), \ldots, \mathrm{D}f_p(x)$ *indépendantes en tout point de* V*.*

Alors V *est une sous-variété de dimension* $n - p$ *de* $\mathbb{R}^n$*. L'espace vectoriel tangent en* a *à* V *est l'ensemble des vecteurs* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *tels que*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) v_j = 0 \ , \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) v_j = 0 \ .$$

L'espace affine tangent en a *à* V *est l'ensemble des* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ *tels que*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)(\mathrm{X}_j - a_j) = 0 \ , \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a)(\mathrm{X}_j - a_j) = 0 \ .$$

Pour $p = 1$, l'hypothèse est donc que les dérivées partielles de f_1 ne s'annulent simultanément en aucun point de V, qui est alors une hypersurface de $\mathbb{R}^n$; l'espace affine tangent en a est l'hyperplan passant par a et orthogonal à $\operatorname{grad} f_1(a)$ (en supposant $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire).

Exemple 4. Pour $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ on obtient $\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, ne s'annulant qu'à l'origine. Comme l'origine n'appartient pas à la sphère d'équation $f(x, y, z) = 0$, c'est bien une surface lisse de $\mathbb{R}^3$.

Pour $p \geqslant 2$, on peut voir V comme l'intersection des p hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$ d'équations $f_1(x) = 0$, ou $f_2(x) = 0$, etc., et l'espace tangent comme l'intersection des p hyperplans tangents à ces hypersurfaces.

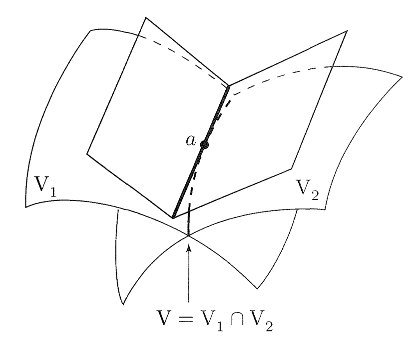


Fig. 92. La tangente à l'intersection des surfaces V_1 et V_2 est l'intersection de leurs plans tangents.

Le théorème suivant, plus complet, est aussi plus lourd à digérer en raison de tous les voisinages qu'il faut y introduire. Il exprime cependant un fait simple et fondamental : l'équivalence des trois procédés classiques de définition d'une sous-variété, *implicitement* (*ii*), ou comme *graphe* (*iii*), ou *paramétriquement* (*iv*). L'entier d donne le nombre de « degrés de liberté » sur V : en (*i*) il y en a autant que dans $\mathbb{R}^d$, en (*ii*) on a n variables liées par $n-d$ relations, en (*iii*) resp. (*iv*) on a d paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$, resp. $(u_1, \ldots, u_d)$. Sur les espaces tangents, on pourra relire d'abord les Exemples 5 et 6 au début du chapitre 2.

Théorème 5.11. (Théorème des sous-variétés) *Soient* V *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{V}$ *et* d *un entier naturel. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*
(*i*) V *est* lisse *en* a, *de dimension* d
(*ii*) (définition implicite) *il existe un voisinage ouvert* U *de* a *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $n-d$ *fonctions* $f_i : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1, *telles que*

$$(x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{U}) \iff (x \in \mathrm{U} \text{ et } f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-d}(x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

et les différentielles $\mathrm{D}f_1(a), \ldots, \mathrm{D}f_{n-d}(a)$ *sont indépendantes*
(*iii*) (graphe) *il existe un voisinage ouvert* U *de* a *dans* $\mathbb{R}^n$, *un voisinage ouvert* U′ *de* $(a_1, \ldots, a_d)$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *et* $n-d$ *fonctions* $g_i : \mathrm{U}' \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1, *telles que (après permutation éventuelle des coordonnées* x_i*)*

$$(x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{U}) \iff \begin{cases} (x_1, \ldots, x_d) \in \mathrm{U}' \text{ et} \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, x_n = g_{n-d}(x_1, \ldots, x_d) \end{cases}$$

(*iv*) (définition paramétrique) *il existe un voisinage ouvert* U *de* a *dans* $\mathbb{R}^n$, *un voisinage ouvert* Ω *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *et* n *fonctions* $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1, *telles que l'application*

$$\varphi : u = (u_1, \ldots, u_d) \mapsto x = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$$

soit un homéomorphisme de Ω *sur* $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$, *avec* $a = \varphi(0)$, *et que la matrice jacobienne* $\mathrm{D}\varphi(0)$ *soit injective (i.e. de rang* d*).*

Si on note $f = (f_1, \ldots, f_{n-d})$, $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots \ldots, \varphi_n)$ *pour abréger, l'espace vectoriel tangent en* a *à* V *est alors*
(*ii*) *le noyau de* $\mathrm{D}f(a)$
(*iii*) *le graphe de* $\mathrm{D}g(a_1, \ldots, a_d)$
(*iv*) *l'image de* $\mathrm{D}\varphi(0)$.

Remarques. (*a*) Le point de vue (*iii*) (graphe) est évidemment un cas particulier des deux autres (*ii*) et (*iv*) : ainsi la courbe $y = g(x)$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle donnée aussi bien par l'équation implicite $g(x) - y = 0$ que par la paramétrisation $x = u$, $y = g(u)$.

(*b*) L'implication (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) résulte du théorème des fonctions implicites, en résolvant le système d'équations $f_1(x) = \cdots = f_{n-d}(x) = 0$ par rapport à $x_{d+1}, \ldots, x_n$.
(*c*) L'implication (*iv*) $\Rightarrow$ (*iii*) résulte du théorème d'inversion locale, en inversant $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ (par exemple) pour obtenir $u_1, \ldots, u_d$ fonctions de $x_1, \ldots, x_d$, que l'on reporte ensuite dans $\varphi_{d+1}, \ldots, \varphi_n$ pour avoir $x_{d+1}, \ldots, x_n$ fonctions de $x_1, \ldots, x_d$.
(*d*) Ne pas oublier l'hypothèse « homéomorphisme » en (*iv*), qui signifie que deux points sont voisins sur V si et seulement si leurs paramètres u sont voisins : on ne repasse pas par un point déjà atteint, ni même au voisinage (voir Exercice 88 question 6).
(*e*) On reconnaîtra en (*ii*), resp. (*iv*), la notion de *submersion*, resp. *immersion* : les différentielles de f, resp. φ, sont de rang maximum $n-d$, resp. d (cf. Exercices 72 et 73).

Heuristique du théorème des sous-variétés. C'est une nouvelle illustration de la Grande Idée du calcul différentiel. En (*ii*), V est définie par

$$0 = f(x) = \mathrm{D}f(a)(x-a) + \cdots$$

(puisque $f(a) = 0$), et V est donc voisine du sous-espace d'équation

$$\mathrm{D}f(a)(x-a) = 0 \ ,$$

qui n'est autre que son espace affine tangent en a. De même en (*iii*)

$$x = \varphi(u) = a + \mathrm{D}\varphi(0)u + \cdots$$

(puisque $\varphi(0) = a$), et V est voisine du sous-espace $a + \operatorname{Im} \mathrm{D}\varphi(0)$, qui est son espace affine tangent en a. Voir Lafontaine [28] p. 29, ou Avez [3] chapitre 9 pour des preuves détaillées du théorème des sous-variétés, et ci-dessous Exercices 90 et 91 pour le cas particulier usuel des courbes et surfaces de $\mathbb{R}^3$.

Références. Lafontaine [28] p.28-38 ; Avez [3] chapitre 9 ; Berger et Gostiaux [4] §2.1 ; Dixmier [20] §47.6 .

Trente-cinq exercices de niveaux variés vont illustrer cet important chapitre, regroupés (assez arbitrairement) en trois thèmes : fonctions inverses (62 à 75), fonctions implicites (76 à 87), et sous-variétés (88 à 96). Certains donnent des preuves détaillées de résultats du cours : théorème d'inversion locale (71), des fonctions implicites (83, 84 ou 86), et des sous-variétés (90 et 91).

5. Exercices sur les fonctions inverses

Exercice 62. ***Un exemple simple.*** **On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même**

$$\boldsymbol{f : (x, y) \mapsto (s, p) = (x + y, xy)} \ .$$

Expliciter un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur f(U).

Solution. On cherche d'abord à avoir une bijection ensembliste.

L'application f n'est visiblement pas injective sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, puisque $f(x, y) = f(y, x)$.

Pour caractériser son image, on se donne $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ et on cherche à résoudre le système d'équations

$$x + y = s \ , \ xy = p$$

aux inconnues x et y. Cela revient à dire que x et y sont les deux racines de l'équation $\mathrm{X}^2 - s\mathrm{X} + p = 0$, qui admet des solutions réelles si et seulement si $\Delta = s^2 - 4p \geqslant 0$. Par suite

$$f(\mathbb{R}^2) = \{s^2 - 4p \geqslant 0\} \ ,$$

où la notation $\{\cdots\}$ signifie l'ensemble des $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\cdots$ Lorsque cette inégalité est vérifiée on a

$$(f(x, y) = (s, p)) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x, y) = \Big(\dfrac{s + \sqrt{\Delta}}{2}, \dfrac{s - \sqrt{\Delta}}{2}\Big) \\ \text{ou bien} \\ (x, y) = \Big(\dfrac{s - \sqrt{\Delta}}{2}, \dfrac{s + \sqrt{\Delta}}{2}\Big). \end{cases}$$

Si on impose par exemple la condition supplémentaire $x \geqslant y$, on aura donc solution unique (la première). Ainsi les applications

$$f : \{x \geqslant y\} \to \{s^2 - 4p \geqslant 0\} \ , \ f : \{x \leqslant y\} \to \{s^2 - 4p \geqslant 0\} \ ,$$

et aussi

$$f : \{x > y\} \to \{s^2 - 4p > 0\} \ , \ f : \{x < y\} \to \{s^2 - 4p > 0\} \ ,$$

sont toutes *bijectives.*

Il reste à voir si ce sont des difféomorphismes. Notons

$$\mathrm{U} = \{x > y\} \ , \ \mathrm{V} = \{s^2 - 4p > 0\} \ .$$

Ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, et les formules explicites ci-dessus montrent directement (sans même recourir au théorème d'inversion locale !) que f

est de classe C^1 sur U et que f^{-1} est de classe C^1 sur V. Donc $f : U \to V$ est un *difféomorphisme* de classe C^1 (et même C^∞) ; même résultat avec $U = \{x < y\}$.

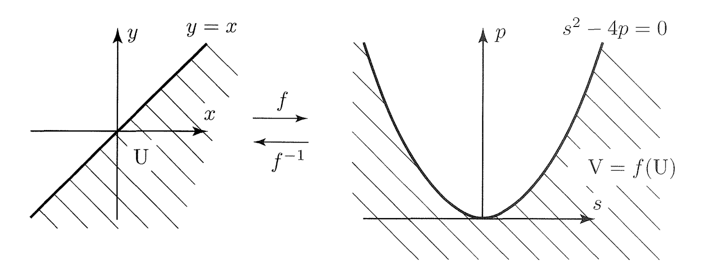


Fig. 93. Le difféomorphisme $f(x, y) = (x + y, xy)$ sur l'ouvert connexe maximal $x > y$.

D'autre part, si Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega \to f(\Omega)$ soit un difféomorphisme, alors nécessairement

$$\det \mathrm{D}f(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} = x - y \neq 0 \text{ pour } (x, y) \in \Omega$$

(voir remarques après le Théorème 5.1). Donc Ω est contenu dans le complémentaire de la bissectrice $y = x$; si de plus Ω est *connexe*, il doit être contenu dans l'un des demi-plans séparés par cette droite. On voit donc que les ouverts U choisis plus hauts sont des *ouverts connexes maximaux* tels que $f : \Omega \to f(\Omega)$ soit un difféomorphisme.

Remarque. La figure suivante donne un exemple d'ouvert maximal *non connexe* ayant cette même propriété : si on rajoutait un point à cet ouvert $U = \{|x| > |y|\}$, et donc un voisinage de ce point, alors U contiendrait deux points distincts symétriques par rapport à la bissectrice, et on perdrait l'injectivité de f sur U.

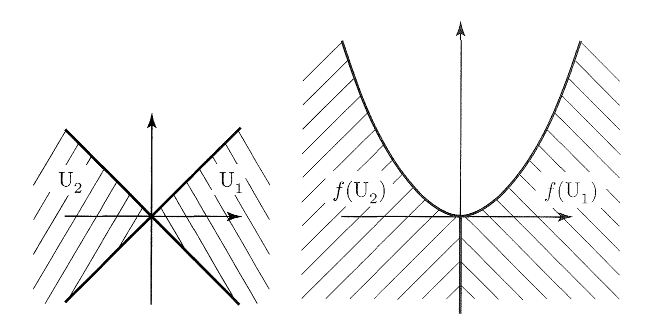


Fig. 94. Le difféomorphisme $f(x, y) = (x + y, xy)$ sur l'ouvert maximal non connexe $|x| > |y|$.

Complément. L'application f admet une généralisation intéressante, à savoir

$$f:(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(s_1,\ldots,s_n)\ ,$$

où $s_1 = x_1+\cdots+x_n$, ... , $s_n = x_1\cdots x_n$ sont les *fonctions symétriques élémentaires* des n variables réelles x_i. On peut montrer que

$$\det \mathrm{D}f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)\ .$$

D'après le théorème d'inversion locale, les racines d'un polynôme à coefficients réels sont donc fonction C^∞ de ses coefficients, au voisinage d'un polynôme *à racines réelles et distinctes* – ce qui pourra consoler un peu de l'absence d'une formule générale de résolution par radicaux pour $n \geqslant 5$... Voir Chambert-Loir *et al.* [43] p. 181.

Exercice 63. ***Deux contre-exemples.***

1. Soient U le plan privé de l'origine et

$$\boldsymbol{f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)}\ .$$

Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Expliciter des ouverts V et W, aussi grands que possible, tels que $f:\mathrm{V}\longrightarrow\mathrm{W}$ soit un difféomorphisme global.

2. Soit

$$\boldsymbol{f(x)=x+x^2\sin\frac{\pi}{x}\ \text{si}\ x\neq 0\ ,\ f(0)=0}\ .$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0)\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Que se passe-t-il ?

[On pourra comparer les valeurs $f(1/(k+t))$ pour k entier pair et $t=0$, $1/2$ et 1.]

Solution. 1. La matrice jacobienne de f est

$$\mathrm{D}f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}\ ,$$

de déterminant $4(x^2+y^2)\neq 0$ sur U.

Plus simplement, f est l'application $z\mapsto z^2$ de $\mathrm{U}=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dans lui-même (avec $z=x+iy$), et $\mathrm{D}f(x,y)$ est l'écriture réelle de la multiplication complexe par $f'(z)=2z$ (cf. Exercice 18). Le Théorème 5.1 d'inversion locale s'applique donc à f au voisinage de tout point $a\neq 0$ du plan complexe : il existe un ouvert V, contenant a et non 0, et un ouvert W tels que f soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W. Autrement

dit : il existe sur W une *détermination de classe* C^1 (et même holomorphe, par le Théorème 5.6) *de la racine carrée* :

$$\left(z \in V \text{ et } w = z^2\right) \Longleftrightarrow \left(w \in W \text{ et } z = f^{-1}(w)\right) .$$

Ce résultat n'est pas global : on ne peut pas prendre $V = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, puisque f n'y est pas injective ($f(z) = f(-z)$). Si on ne restreignait pas l'ouvert V, on ne pourrait choisir entre les deux racines carrées. Pour réaliser l'équivalence ci-dessus, il est donc nécessaire que V ne contienne pas deux points opposés du plan complexe. Un ouvert V *maximal* ayant cette propriété est le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$: si un ouvert V' contient V strictement, il contient un point z_0 tel que $\operatorname{Re} z_0 < 0$ et les points opposés z_0 et $-z_0$ appartiennent à V'. Ainsi f est un difféomorphisme entre ce demi-plan et le plan fendu selon l'axe réel négatif, d'après le Théorème 5.3 d'inversion globale. On pourrait aussi prendre pour V tout demi-plan déduit du précédent par rotation autour de 0. Voir aussi Dieudonné [17] p. 252-255.

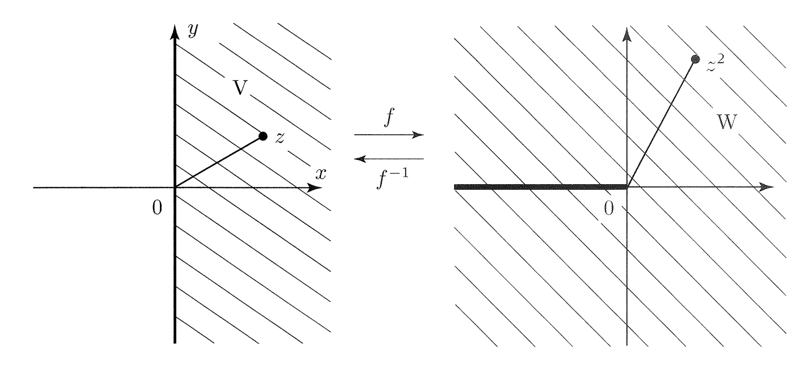


Fig. 95. L'application $z \mapsto z^2$.

2. La fonction f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et on a $f(x) = x + O(x^2)$ lorsque x tend vers 0, d'où l'existence de $f'(0) = 1$.

Mais les oscillations rapides dues à $\sin(\pi/x)$ empêchent f d'être injective au voisinage de 0. Pour tout entier pair $k \geqslant 2$ on a en effet

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} < f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{2k+1} + \frac{4}{(2k+1)^2} ,$$

où la deuxième inégalité résulte de

$$f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2k-1}{k(2k+1)^2} > 0 .$$

Toute valeur comprise entre $f(1/k)$ et $f\left(1/\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ est alors atteinte deux fois sur l'intervalle $]1/(k+1), 1/k[$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire.

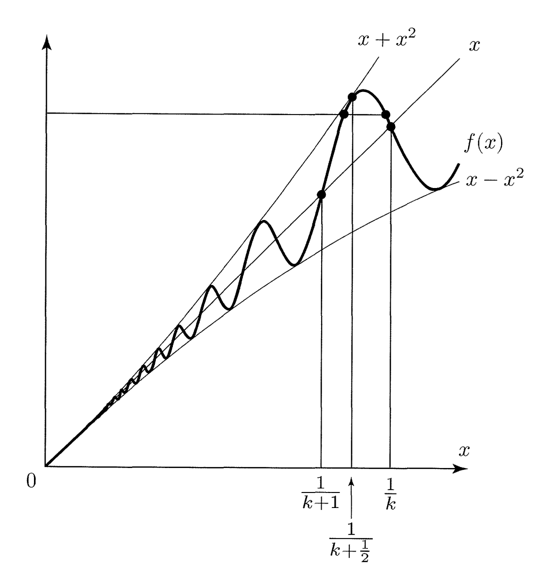


Fig. 96. Non injectivité de $f(x) = x + x^2 \sin(\pi/x)$.

Il n'existe donc aucun voisinage de 0 sur lequel f soit injective. Le théorème d'inversion locale ne s'applique pas ici, f étant *dérivable mais non continûment* au voisinage de 0.

Exercice 64. ***Une équation aux dérivées partielles.***

1. Deviner deux solutions particulières simples u et v de l'équation aux dérivées partielles, à l'inconnue f,

$$(y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

2. Compléter u, v en un système de coordonnées u, v, w sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Écrire l'équation dans les nouvelles coordonnées, et en déduire la solution générale.

Commentaire. C'est un exemple simple et typique de résolution d'un problème à l'aide d'un changement de coordonnées bien adapté. Un point de vue plus général sur cette méthode sera donné à l'Exercice 72 question 3.

Les solutions particulières peuvent s'obtenir par une méthode moins divinatoire, comme intégrales premières du « système différentiel caractéristique » associé à l'équation aux dérives partielles (Voir Exercice 85, et Cartan [8] p. 162-165).

Solution. 1. Supposons, par commodité, l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et orienté. L'équation donnée exprime l'orthogonalité de $\operatorname{grad} f$ avec le vecteur

$$(y - z, z - x, x - y) = (x, y, z) \wedge (1, 1, 1)$$

(produit vectoriel), ce qui suggère d'essayer $\operatorname{grad} f = (1, 1, 1)$ ou $\operatorname{grad} f = (x, y, z)$, et conduit aux solutions particulières

$$u(x, y, z) = x + y + z \ , \ v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$

2. Les différentielles de u et v sont indépendantes en tout point (x_0, y_0, z_0) à coordonnées non toutes égales, car $\operatorname{grad} u \wedge \operatorname{grad} v = -2(y - z, z - x, x - y)$ comme ci-dessus. On peut alors les compléter par une fonction $w(x, y, z)$ de classe C^1 en un système de coordonnées locales au voisinage de ce point (Corollaire 5.1 du théorème d'inversion locale).

Cela peut aussi s'obtenir par les calculs directs suivants, qui nous permettront de préciser le domaine de validité. Montrons par exemple que les relations

$$u(x, y, z) = x + y + z \ , \ v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ w(x, y, z) = x$$

définissent un difféomorphisme de classe C^1 du demi-espace $y > z$ de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ que l'on va préciser. En cherchant à inverser ces relations on obtient en effet

$$x = w \ , \ y + z = u - w \ , \ y^2 + z^2 = v - w^2 \ ,$$

d'où

$$yz = \frac{1}{2}\left((u - w)^2 - (v - w^2)\right) \ .$$

Ceci détermine de manière unique y et z, avec $y > z$, par leur somme S et leur produit P si et seulement si $\mathrm{S}^2 > 4\mathrm{P}$ (cf. Exercice 62), c'est-à-dire

$$2v > (u - w)^2 + 2w^2 \ .$$

Cette inégalité définit l'ouvert U cherché. Comme x, y, z s'expriment comme fonctions C^1 sur U de (u, v, w), le résultat annoncé est établi.

Notons $f(x, y, z) = g(u, v, w)$. L'équation aux dérivées partielles vérifiée par g s'écrit aisément par dérivation de fonctions composées. On peut aussi observer que, si on note L l'opérateur différentiel

$$\mathrm{L}f = (y - z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial z}$$

on a, par linéarité des calculs, une expression de la forme

$$\mathrm{L}f = a\,\frac{\partial g}{\partial u} + b\,\frac{\partial g}{\partial v} + c\,\frac{\partial g}{\partial w}$$

où les coefficients a, b, c sont des fonctions de u, v, w indépendantes de f (ou g). L'exemple de $f(x, y, z) = u(x, y, z)$ donne $g(u, v, w) = u$ d'où

$$a = \mathrm{L}u \ , \text{ et de même } b = \mathrm{L}v \ , \ c = \mathrm{L}w \ .$$

Mais $\mathrm{L}u = \mathrm{L}v = 0$ puisque u et v sont des solutions particulières de l'équation $\mathrm{L}f = 0$, qui s'écrit donc simplement

$$(\mathrm{L}w)\frac{\partial g}{\partial w} = 0 \ .$$

Pour $w = x$ on a $\mathrm{L}w = y - z$, strictement positif sur l'ouvert considéré. Il reste donc

$$\frac{\partial g}{\partial w} = 0 \text{ sur U},$$

de résolution immédiate dès que l'on aura précisé le domaine utile de variation de w. Or l'inéquation qui définit U, mise sous forme canonique par rapport à la variable w, s'écrit

$$(3w - u)^2 < 2\left(3v - u^2\right) \ .$$

Elle a donc des solutions si et seulement si $u^2 < 3v$; si u et v sont ainsi fixés, les solutions w forment un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$. Par suite l'équation $\partial g/\partial w = 0$ sur U se résout en $g(u, v, w) = \varphi(u, v)$, où φ est une fonction arbitraire de classe C^1 sur l'ouvert $u^2 < 3v$ de $\mathbb{R}^2$.

En conclusion, les solutions de l'équation $\mathrm{L}f = 0$ qui sont de classe C^1 sur le demi-espace $y > z$ sont les fonctions

$$f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) \ ,$$

où $\varphi(u, v)$ est une fonction C^1 arbitraire sur l'ouvert $u^2 < 3v$. On parviendrait au même résultat en raisonnant sur les demi-espaces $y < z$, ou $x > y$, etc.

Exercice 65. ***Logarithme d'une matrice.*** **Soit E l'espace des matrices réelles $n \times n$. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geqslant 2$.**

Solution. D'après les Exercices 16 et 39, l'application exp est de classe C^1 sur E et $\mathrm{D}\exp(0)$ est l'identité de E. Par le théorème d'inversion locale, il existe donc V, voisinage de 0, et W, voisinage de $\exp 0 = \mathrm{I}$, tels que $\exp : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ soit un difféomorphisme de classe C^1.

Pour $n = 1$ on sait que $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ est un difféomorphisme global. Il n'en est plus de même pour l'exponentielle complexe : $\exp 2i\pi = \exp 0 = 1$. En identifiant $\mathbb{C}$ à l'espace des matrices réelles 2×2 de la forme

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (multiplication par le nombre complexe $a + ib$) cela suggère, plus généralement, le contre-exemple suivant pour $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{matrix} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} ,$$

qui donne $\exp \mathrm{X} = \mathrm{I} = \exp 0$. Donc $\exp : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ n'est pas injective.

Compléments. L'inverse local $\exp^{-1}$ est la « détermination principale du logarithme matriciel » sur W. On pourrait la définir aussi par la série classique

$$\ln \mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\mathrm{Y} - \mathrm{I})^k}{k} ,$$

convergente pour $\|\mathrm{Y} - \mathrm{I}\| < 1$ (norme d'application linéaire) et vérifier, par des manipulations de séries, les égalités $\exp(\ln \mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$ et $\ln(\exp \mathrm{X}) = \mathrm{X}$, valables pour $\|\mathrm{Y} - \mathrm{I}\| < 1$ et $\|\mathrm{X}\| < \ln 2$ (ce qui entraîne $\|\exp \mathrm{X} - \mathrm{I}\| \leqslant e^{\|\mathrm{X}\|} - 1 < 1$).

On peut améliorer ce résultat en utilisant l'expression générale de la différentielle $\mathrm{D}\exp$ (Exercices 39 et 101). Soit U l'ensemble des $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ tels que $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi$ pour toute valeur propre λ de X ; alors U est un ouvert de E, l'application exp donne un difféomorphisme de U sur $\exp \mathrm{U}$, et U est un ouvert connexe maximal ayant cette propriété (Mneimné et Testard [32] p. 83).

Exercice 66. ***Réduction des formes quadratiques, version différentiable.*** **On note E l'espace des matrices réelles $n \times n$ et S le sous-espace des matrices *symétriques.* On fixe $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{S}$, *inversible.* Soit $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{S}$ l'application définie par**

$$\varphi(\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}\mathrm{A}_0\mathrm{M} .$$

1. Montrer que $\mathrm{D}\varphi(\mathrm{I})$ est surjective, et préciser son noyau.

2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{M}$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{M}\mathrm{A}_0\mathrm{M}$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$.

[On pourra considérer l'ensemble F des $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ telles que $\mathrm{A}_0\mathrm{M} \in \mathrm{S}$, et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de φ à F.]

Commentaire. Le résultat obtenu est que toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, i.e. se ramène à celle-ci par changement de base. Elle a en particulier

même signature; les matrices symétriques de signature donnée (p, q), avec $p + q = n$, forment donc un ouvert de S.

Outre une preuve simple de ce résultat, le calcul différentiel apporte une précision intéressante : on peut ramener A à A_0 par une matrice de passage M qui est fonction continûment différentiable de A ; ce sera utile dans la preuve du lemme de Morse donnée à l'Exercice 114.

Solution. 1. L'application φ est polynomiale, donc de classe C^1 sur E. Pour $H \in E$ on a

$$\begin{aligned}\varphi(I + H) - \varphi(I) &= {}^t HA_0 + A_0H + {}^t HA_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + O(\|H\|^2)\end{aligned}$$

(on a muni E et S d'une norme d'application linéaire), par suite

$$D\varphi(I)H = {}^t(A_0H) + A_0H \ .$$

Le noyau de l'application linéaire $D\varphi(I) : E \to S$ est donc formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétrique.

Cette application est par ailleurs surjective : pour A donnée dans S, l'équation $D\varphi(I)H = A$ admet la solution évidente $H = \frac{1}{2}A_0^{-1}A \in E$.

Variante. Le noyau de $D\varphi(I)$ a même dimension que l'espace des matrices antisymétriques $n \times n$, soit $n(n-1)/2$; la dimension de son image est donc $\dim E - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 = \dim S$, d'où la surjectivité.

2. Le sous-espace F de E formé des matrices M telles que $A_0M \in S$ est un *supplémentaire* du noyau de $D\varphi(I)$ dans E ; de plus I appartient à F.

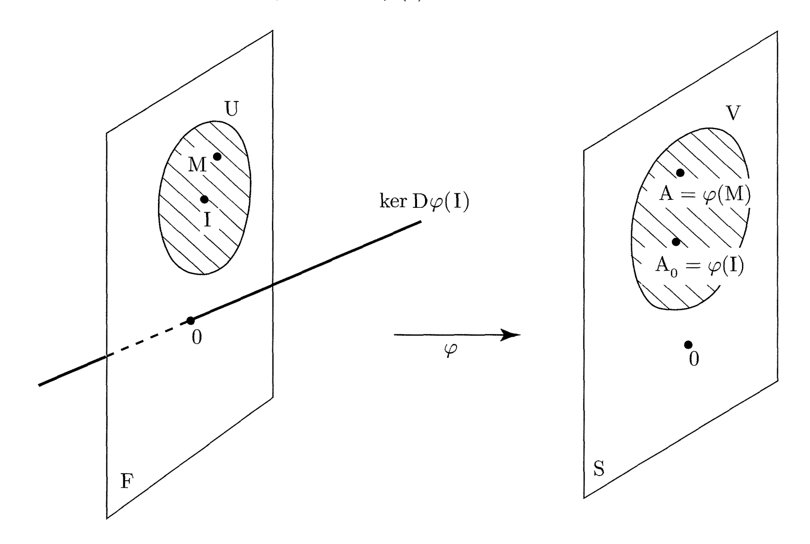


Fig. 97. Inversion locale de l'application $\varphi(M) = {}^t MA_0M$.

Soit $\psi : \mathrm{F} \to \mathrm{S}$ la restriction de φ à F. Comme $\ker \mathrm{D}\varphi(\mathrm{I}) \cap \mathrm{F} = 0$, la différentielle $\mathrm{D}\psi(\mathrm{I})$ est bijective. Par le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U de I dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que ψ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $\mathrm{V} = \psi(\mathrm{U})$. Ainsi V est un voisinage ouvert de $\mathrm{A}_0 = \psi(\mathrm{I}) = \varphi(\mathrm{I})$ dans S et, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$, il existe une unique matrice inversible $\mathrm{M} \in \mathrm{U}$ telle que

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{M}\mathrm{A}_0\mathrm{M} ,$$

et $\mathrm{M} = \psi^{-1}(\mathrm{A})$ est fonction continûment différentiable de A.

Remarque. En appliquant ce résultat à $\mathrm{A}_0 = \mathrm{I}$, on voit que toute matrice symétrique A suffisamment proche de I admet une *racine carrée* symétrique : il existe $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^2$.

Exercice 67. ***Deux équations, deux inconnues.***

1. Rappeler brièvement la discussion du système linéaire

$$ax + by = u \ , \ cx + dy = v \ ,$$

où u, v sont donnés et x, y sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système.

Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 ; on écrira $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. On veut discuter le système d'équations

$$f(x, y) = u \ , \ g(x, y) = v \qquad \text{(S)}$$

aux inconnues x, y, pour u, v donnés.

2. On suppose que la différentielle $\mathrm{D}\varphi(x, y)$ est *de rang* 2 *en tout point* $(x, y) \in \mathrm{U}$. Montrer que le système (S) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

3. On suppose que $\mathrm{D}\varphi(x, y)$ est *de rang* 1 *en tout point* $(x, y) \in \mathrm{U}$. En raisonnant sur un ouvert où (par exemple) f'_x ne s'annule pas, montrer que les relations

$$\mathrm{X} = f(x, y) \ , \ \mathrm{Y} = y$$

définissent un changement (local) de coordonnées qui transforme (S) en le système équivalent

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = u \ , \ \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = v$$

avec $\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X}$ et G indépendante de Y.

En déduire que les fonctions f et g sont *liées par une relation* de la forme

$$g(x, y) = \mathrm{G}(f(x, y)) \ .$$

Qu'en déduit-on pour le système (S) ?

4. On suppose que $D\varphi(x,y)$ est *de rang* 0 *en tout point* $(x,y) \in U$. Que dire alors de (S) ?

5. *Exemple.* Étudier le cas où

$$f(x,y) = \frac{x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ g(x,y) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Commentaire. Cet exercice fondamental illustre l'apport des techniques du calcul différentiel : grâce au théorème d'inversion locale, un système quelconque (de classe C^1) de deux équations à deux inconnues se discute essentiellement comme un système linéaire, selon le rang de sa matrice jacobienne. Le cas de rang un, particulièrement instructif, sera repris à l'Exercice 82 à l'aide du théorème des fonctions implicites.

Solution. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice du système.

Si A est de rang 2, le système est de Cramer et admet une solution (x,y) unique, quel que soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Si A est de rang 1, ses vecteurs lignes sont proportionnels : on a par exemple $(c,d) = \lambda(a,b)$, d'où $cx + dy = \lambda(ax+by)$ pour tous (x,y), et le système admet une solution (non unique) si et seulement si les données u, v vérifient $v = \lambda u$.

Si A est de rang 0, le système se réduit à $0 = u$, $0 = v$. Si les données u, v sont nulles, tout (x,y) est solution ; il n'y a pas de solution sinon.

2. Si le rang de $D\varphi$ est 2 en tout point $(x_0,y_0) \in U$, alors $D\varphi(x_0,y_0)$ est inversible et le théorème d'inversion locale donne un voisinage ouvert V de (x_0,y_0) (contenu dans U) tel que φ soit un difféomorphisme de V sur l'ouvert $\varphi(V)$ de $\mathbb{R}^2$. En particulier l'équation $\varphi(x,y) = (u,v)$ *admet une solution* $(x,y) \in V$ *unique, pour chaque* $(u,v) \in \varphi(V)$.

3. Si la matrice

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

est de rang 1 en tout $(x,y) \in U$, l'un au moins de ses quatre éléments n'est pas identiquement nul. Supposons par exemple (quitte à restreindre l'ouvert U) que f'_x ne s'annule pas sur U. L'application

$$\psi : (x,y) \mapsto (X,Y) = (f(x,y), y) = \psi(x,y)$$

a pour matrice jacobienne

$$D\psi(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

inversible puisque $\det D\psi(x,y) = f'_x \neq 0$. Chaque point de U admet donc un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que ψ soit un difféomorphisme de V sur l'ouvert $W = \psi(V)$; en bref, *on peut prendre* $X = f$ et $Y = y$ *pour nouvelles coordonnées locales sur* V. Quitte à diminuer V, on peut supposer que W est un rectangle ouvert $W_X \times W_Y$.

Soit alors Φ la traduction de φ dans les nouvelles coordonnées, i.e. $\varphi = \Phi \circ \psi$, ou encore

$$\Phi(X,Y) = \varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = (X, G(X,Y)) ,$$

en notant $G = g \circ \psi^{-1}$. On a donc

$$\begin{cases} (x,y) \in V \\ f(x,y) = u \ , \ g(x,y) = v \end{cases} \iff \begin{cases} X \in W_X \ , \ Y \in W_Y \\ X = u \ , \ G(X,Y) = v \ . \end{cases}$$

De plus $D\varphi(x,y) = D\Phi(X,Y) \circ D\psi(x,y)$ par dérivation de fonction composée et, $D\psi$ étant inversible, les matrices $D\varphi$ et $D\Phi$ ont même rang. Comme

$$D\Phi(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G'_X & G'_Y \end{pmatrix} ,$$

l'hypothèse de rang 1 se traduit par $G'_Y(X,Y) = 0$ pour tous $X \in W_X$, $Y \in W_Y$, et G ne dépend pas de la variable Y. Le système d'équations équivaut donc à

$$X \in W_X \ , \ Y \in W_Y \text{ et } X = u \ , \ G(X) = v \ ,$$

dont la discussion est immédiate, en supposant $u \in W_X$:

- *si* $v = G(u)$ *il y a une infinité de solutions* ($X = u$ et $Y = y$ arbitraire dans W_Y) ; le système se réduit à la première équation ;
- *si* $v \neq G(u)$ *il n'y a pas de solution.*

Au passage on a établi l'identité

$$g(x,y) = G(X,Y) = G(X) = G(f(x,y))$$

pour tout $(x,y) \in V$. Les fonctions f et g ne sont pas « indépendantes » (cf. Exercice 72), mais *liées par une relation* sur V.

Remarque. À la question 2, il suffirait de supposer $D\varphi$ de rang 2 *en un point*, il le resterait alors nécessairement sur un voisinage grâce à la continuité de $\det D\varphi(x,y)$. Ici en revanche, l'hypothèse de rang 1 *en tout point* est réellement utile : pour $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y^2$ par exemple, la matrice $D\varphi(x,y)$ est de rang 1 pour $y = 0$, de rang 2 sinon. Ces deux fonctions ne sont liées par aucune relation.

4. Si le rang est 0 en tout point, les quatre dérivées partielles de f et g sont identiquement nulles, et (en supposant U connexe) les fonctions f et

g sont des constantes A et B. Le système (S) n'a de solution que si $u = \mathrm{A}$ et $v = \mathrm{B}$; tout point $(x, y) \in \mathrm{U}$ est alors solution.

5. En prenant pour U le plan privé de l'origine, le calcul donne

$$\mathrm{D}\varphi(x,y) = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} y(2x+y) & -x(2x+y) \\ y(2y-x) & -x(2y-x) \end{pmatrix}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$; cette matrice est de rang 1 en tout point $(x, y) \in \mathrm{U}$. Les deux fonctions données sont, d'après 4, liées par une relation au voisinage de chaque point de U. On voit d'ailleurs directement que

$$f(x,y)^2 + g(x,y)^2 = 5$$

en tout point de U.

Exercice 68. ***Changement de variables dans une intégrale double.*** **Soit**

$$\mathbf{F} : (t,u) \mapsto (x,y) = (f(t,u), g(t,u))$$

un changement de coordonnées de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. En supposant (par exemple) $g'_u \neq 0$, montrer qu'il existe (localement) deux changements de coordonnées

$$\mathbf{F}_1 : (t,u) \mapsto (t,v) \text{ et } \mathbf{F}_2 : (t,v) \mapsto (w,v)$$

tels que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1$ (noter que $\mathbf{F}_i$ ne change pas la i-ième variable).

[Après avoir déterminé $\mathbf{F}_1$, on pourra définir $\mathbf{F}_2$ par $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}_1^{-1}$.] ***Exemple.*** **Expliciter $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ lorsque F est le passage en coordonnées polaires.**

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, identiquement nulle hors d'un compact suffisamment petit. Déduire de 1 la formule

$$\iint \varphi(x,y)\, dxdy = \iint \varphi(\mathbf{F}(t,u))\, |\det \mathbf{DF}(t,u)|\, dtdu\ .$$

[On pourra appliquer deux fois la formule classique de changement de variable dans une intégrale simple.]

Commentaire. L'intervention du déterminant jacobien dans une intégrale double a de quoi intriguer ; sa vraie raison a été entrevue à l'Exercice 29. On en donne ici une preuve plus « calculatoire », basée sur une idée naïve : pour changer deux variables, il n'y a qu'à changer deux fois une variable. Cette petite gymnastique du changement de coordonnées s'étend aisément aux intégrales multiples à n variables (Faraut [22] p. 66, Gramain [24] p. 213).

Solution. 1. Puisque F est un changement de coordonnées, sa matrice jacobienne est inversible et les dérivées partielles de f et g ne peuvent s'annuler simultanément. Supposons par exemple $g'_u(t_0, u_0) \neq 0$.

La composée $F_2 \circ F_1$ est l'application $(t,u) \mapsto (w,v)$, on doit donc avoir $w = f(t,u)$ et $v = g(t,u)$. Par suite F_1 est *nécessairement* donnée par

$$F_1(t,u) = (t,v) = (t, g(t,u)) \ .$$

Montrons que c'est bien un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\det DF_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g'_t & g'_u \end{pmatrix} = g'_u \ .$$

D'après le théorème d'inversion locale F_1 définit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de (t_0, u_0) sur l'ouvert $U_1 = F_1(U)$.

Alors l'application définie par $F_2 = F \circ F_1^{-1}$ est un difféomorphisme de U_1 sur l'ouvert $V = F(U)$, qui a les propriétés voulues. Sur U on a en effet $F = F_2 \circ F_1$ par construction et, sur U_1,

$$F_2(t,v) = F(F_1^{-1}(t,v)) = F(t,u) = (f(t,u), g(t,u)) = (f(t,u), v) \ ,$$

donc F_2 ne change pas la deuxième variable.
Exemple. Le passage en coordonnées polaires

$$F : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

se décompose ainsi en $F = F_2 \circ F_1$, avec

$$F_1(r,\theta) = (r, r\sin\theta) = (r,y) \ , \ F_2(r,y) = \left(\sqrt{r^2 - y^2}, y\right) = (x,y) \ .$$

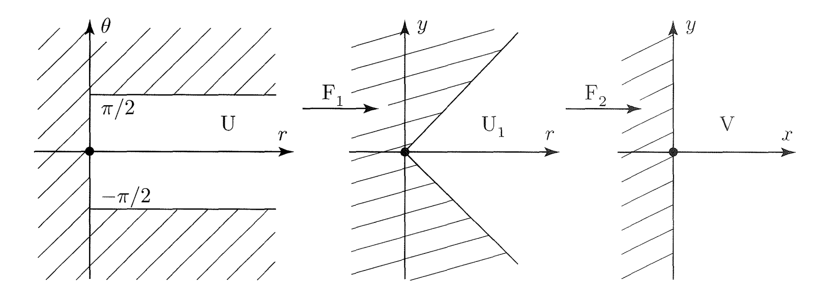


Fig. 98. Décomposition du passage en coordonnées polaires $(r,\theta) \mapsto (r,y) \mapsto (x,y)$.

On peut prendre ici pour U l'ouvert $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, sur lequel $\partial y/\partial\theta = r\cos\theta$ ne s'annule pas. Alors $U_1 = F_1(U)$ est l'ouvert $|y| < r$, et $V = F_2(U) = F(U)$ est le demi-plan $x > 0$.

2. Pour appliquer 1, supposons la fonction φ identiquement nulle en dehors d'un compact contenu dans V. On sait que

$$\iint \varphi(x,y)\,dxdy = \int \left(\int \varphi(x,y)\,dx \right) dy \ .$$

Dans l'intégrale en x effectuons le changement $t \mapsto x$ donné par

$$(x, y) = \mathrm{F}_2(t, y) = (x(t, y), y) \ ,$$

avec y fixé. Il vient

$$\int \varphi(x, y)\, dx = \int \psi(t, y)\, dt \ ,$$

en notant $\psi(t, y) = \varphi(\mathrm{F}_2(t, y)) \cdot |x'_t(t, y)|$, d'après la formule élémentaire de changement de variable dans une intégrale simple. Alors

$$\iint \varphi(x, y)\, dxdy = \int \left(\int \psi(t, y)\, dy \right) dt \ .$$

Dans l'intégrale en y effectuons le changement $u \mapsto y$ donné par

$$(t, y) = \mathrm{F}_1(t, u) = (t, y(t, u)) \ ,$$

avec t fixé. Il vient

$$\int \psi(t, y)\, dy = \int \psi(\mathrm{F}_1(t, u))\, |y'_u(t, u)|\, du \ .$$

Il n'y a plus qu'à assembler les morceaux pour obtenir

$$\iint \varphi(x, y)\, dxdy = \iint \varphi(\mathrm{F}_2 \circ \mathrm{F}_1(t, u))\, |\mathrm{J}(t, u)|\, dtdu \ ,$$

où $\mathrm{J}(t, u) = x'_t(\mathrm{F}_1(t, u)) \cdot y'_u(t, u)$. Or l'expression de F_1 et F_2 donne immédiatement

$$\mathrm{DF}_2 = \begin{pmatrix} x'_t & x'_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{DF}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y'_t & y'_u \end{pmatrix} \ ,$$

donc

$$\mathrm{J}(t, u) = \det \mathrm{DF}_2(\mathrm{F}_1(t, u)) \cdot \det \mathrm{DF}_1(t, u) = \det \mathrm{DF}(t, u)$$

par dérivation de fonction composée, ce qui établit le résultat demandé.

Il est vivement recommandé de reprendre la méthode sur l'exemple des coordonnées polaires !

Exercice 69. ***Redressement d'un champ de vecteurs.* Soit $v : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ (*champ de vecteurs sur* U), et soit $y = \varphi_t(x)$, pour x donné dans U, une solution du système différentiel**

$$\frac{dy}{dt} = v(y) \ , \ y(0) = x \ .$$

On admettra[4] que l'application $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ est de classe C^1 sur un voisinage de $t = 0$, $x = 0$.

Le but de l'exercice est de montrer que, si $v(0) \neq 0$, il existe un changement de coordonnées locales $y = f(Y)$, au voisinage de 0, qui transforme le système différentiel en

$$\frac{dY}{dt} = V \ , \ Y(0) = X \ ,$$

avec $V = (1, 0, \ldots, 0)$ et $x = f(X)$, c'est-à-dire qui « redresse » v en un champ de vecteurs constant V.

1. Traiter le cas où $n = 1$.

2. Pour $n \geqslant 2$, vérifier que l'on peut prendre pour f l'application

$$f(t, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_t(0, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

en supposant par exemple $v_1(0) \neq 0$.

3. *Exemple.* Redresser le champ $v(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$ au voisinage du point $(1, 0)$.

Commentaires. Voir ceux d'Arnold [1] §7. Le fait que tout champ de vecteurs puisse être localement redressé (i.e. transformé en un champ constant, par changement de coordonnées) au voisinage d'un point non singulier[5] signifie qu'il n'y a, à difféomorphisme local près, qu'un seul type de champ de vecteurs sans point singulier. Voir aussi Demazure [14] chapitre 8 pour le cas, beaucoup plus subtil, d'un point singulier.

Solution. 1. En dimension un, v est une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ et on cherche un difféomorphisme $f : I \to J$ entre deux intervalles ouverts I et J (contenant 0), tels que $J \subset U$, $f(0) = 0$ et

$$\frac{dy}{dt} = v(y) \text{ et } y = f(Y) \text{ entraînent } \frac{dY}{dt} = 1 \ .$$

Par suite

$$v(y) = \frac{dy}{dt} = f'(Y)\frac{dY}{dt} = f'(Y) = \frac{dy}{dY} \ .$$

Pour que f soit un difféomorphisme, il est donc nécessaire que v ne s'annule pas sur J.

Inversement, soit J le plus grand intervalle ouvert contenu dans U sur lequel v ne s'annule pas ; il contient 0 car $v(0) \neq 0$. Pour obtenir f les équations précédentes suggèrent d'écrire $dY = dy/v(y)$ d'où

$$Y = \int_0^y \frac{du}{v(u)} \ , \text{ avec } y \in J \ ;$$

4. Voir Cartan [8] p. 148, ou Demazure [14] p. 186.

5. Un point singulier est un point où le champ s'annule.

la borne inférieure 0 est imposée par la condition $f(0) = 0$. Plus rigoureusement, la fonction réciproque $\mathrm{Y} = f^{-1}(y)$ doit vérifier

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(\mathrm{Y})} = \frac{1}{v(y)} \text{ et } f^{-1}(0) = 0 ,$$

d'où l'expression intégrale ci-dessus. Le problème est donc résolu en prenant pour I l'image de J par l'application $y \mapsto \mathrm{Y}$ ainsi définie.

Remarques. (i) Il suffirait ici de supposer v continue sur U.
(ii) Le calcul précédent revient exactement à résoudre l'équation $dy/dt = v(y)$, $y(0) = 0$, la variable Y jouant le rôle de t. Par suite, avec les notations de l'énoncé, on a $f(t) = \varphi_t(0)$ pour $t \in \mathrm{J}$, ce qui motive la généralisation qui va suivre.

2. *L'idée* est que, pour redresser le champ v, on doit redresser ses trajectoires : celles de V seront en effet les droites parallèles définies paramétriquement par $t \mapsto \mathrm{X} + t\mathrm{V}$. Les nouvelles coordonnées $\mathrm{Y} = (t, x_2, \ldots, x_n)$, où t est le temps de parcours sur les trajectoires de v et $(x_2, \ldots, x_n)$ est une variable *transverse* à ces courbes, vont conduire au résultat.

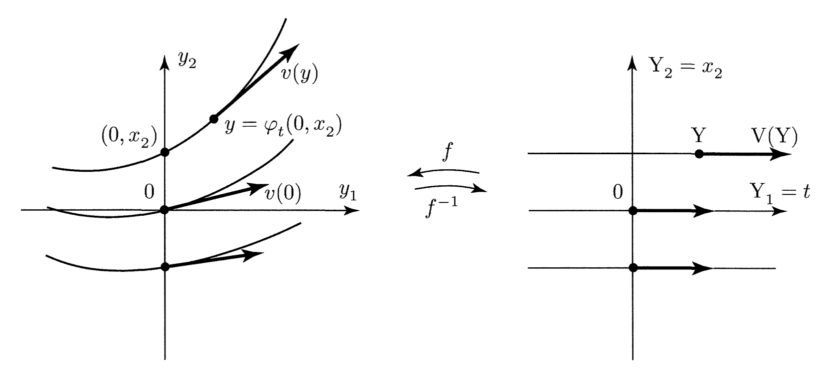


Fig. 99. Redressement d'un champ de vecteurs au voisinage de l'origine ; ici $n = 2$, et la figure représente les trajectoires dans $\mathbb{R}^2$.

Supposons par exemple la première composante $v_1(0)$ non nulle (on peut se ramener à ce cas par permutation des coordonnées). L'application f définie par

$$\mathrm{Y} = (t, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y = f(t, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_t(0, x_2, \ldots, x_n)$$

est de classe C^1 au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, et $f(0) = 0$. Sa matrice jacobienne $\mathrm{D}f(\mathrm{Y})$ a pour premier vecteur colonne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(0, x_2, \ldots, x_n) \\ &= v\left(\varphi_t(0, x_2, \ldots, x_n)\right) = v(y) . \end{aligned}$$

D'autre part $f(0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_0(0, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_2, \ldots, x_n)$, d'où les colonnes suivantes de $\mathrm{D}f(\mathrm{Y})$ pour $t = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, x_2, \ldots, x_n) = e_i \ , \ i \geqslant 2 \ ,$$

(i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Le déterminant jacobien à l'origine est donc

$$\det \mathrm{D}f(0) = \det(v(0), e_2, \ldots, e_n) = v_1(0) \neq 0 \ .$$

Par suite f est un changement de coordonnées au voisinage de l'origine, par le théorème d'inversion locale.

Le changement de variables $y = f(\mathrm{Y})$ transforme le système différentiel $dy/dt = v(y)$ en $\mathrm{D}f(\mathrm{Y})(d\mathrm{Y}/dt) = v(f(\mathrm{Y}))$, c'est-à-dire

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \mathrm{V}(\mathrm{Y}) \ ,$$

en notant

$$\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = (\mathrm{D}f(\mathrm{Y}))^{-1} v(f(\mathrm{Y})) = \mathrm{D}f^{-1}(y)v(y)$$

le *champ de vecteurs transformé* du champ v par le difféomorphisme f. La condition initiale $y(0) = x$ est changée en $\mathrm{Y}(0) = \mathrm{X}$ avec $x = f(\mathrm{X})$.

Il reste à vérifier que $\mathrm{V}(\mathrm{Y})$ est le champ constant $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Or la première colonne de la jacobienne de f, déjà calculée, s'écrit

$$\mathrm{D}f(\mathrm{Y})e_1 = v(y) = v(f(\mathrm{Y})) = \mathrm{D}f(\mathrm{Y})\mathrm{V}(\mathrm{Y}) \ ,$$

et on a bien $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = e_1$.

3. *Exemple.* Le champ $v(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et non singulier en $(1, 0)$, avec $v_1(1, 0) \neq 0$. On peut donc appliquer la méthode précédente avec $(1, 0)$ pour origine.

D'abord on résout le système différentiel associé à v :

$$y_1' = y_1 \ , \ y_2' = y_2 \ , \text{ avec } y_1(0) = x_1 \ , \ y_2(0) = x_2 \ ,$$

ce qui donne

$$y_1 = e^t x_1 \ , \ y_2 = e^t x_2 \ .$$

Les trajectoires de v sont les demi-droites issues de 0. Puis on définit f par $f(t, x_2) = \varphi_t(1, x_2) = (e^t, e^t x_2)$ (l'origine est ici $(1, 0)$) soit, dans d'autres notations, $y = f(\mathrm{Y})$ avec

$$y_1 = e^{\mathrm{Y}_1} \ , \ y_2 = e^{\mathrm{Y}_1}\mathrm{Y}_2 \ .$$

Alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur le demi-plan $y_1 > 0$, inversé en $\mathrm{Y} = f^{-1}(y)$ avec

$$\mathrm{Y}_1 = \ln y_1 \ , \ \mathrm{Y}_2 = \frac{y_2}{y_1} \ ,$$

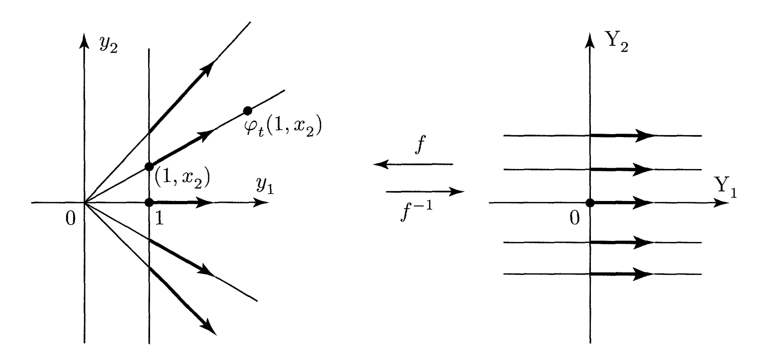


Fig. 100. Redressement du champ de vecteurs $v(y_1,y_2)=(y_1,y_2)$ sur le demi-plan $y_1>0$ par le changement de coordonnées $Y_1=\ln y_1, Y_2=y_2/y_1$.

et on a bien

$$V(Y)=Df^{-1}(y)v(y)=\begin{pmatrix} 1/y_1 & 0 \\ -y_2/y_1^2 & 1/y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 70. ***Inversion globale.*** **Soient k une constante strictement positive et $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, supposée** ***k-dilatante*** **(pour une certaine norme), i.e.**

$$\|f(x)-f(y)\|\geqslant k\,\|x-y\|$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}^n$. On veut montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
[On pourra raisonner sur des suites.]

2. Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.

3. Montrer par inversion locale que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Conclure.

Commentaire. Ce résultat est un cas particulier du Théorème 5.4 (Hadamard-Lévy, plus difficile). L'hypothèse k-dilatante entraîne en effet que f est une application propre : on a $\|f(x)\|\geqslant k\,\|x\|-\|f(0)\|$, donc $\|f(x)\|$ tend vers l'infini avec $\|x\|$; elle entraîne aussi que $Df(x)$ est inversible en tout point (question 2).

Pour un résultat similaire dans les espaces de Hilbert, voir Avez [3] p. 130.

Solution. 1. L'égalité $f(x)=f(y)$ entraîne $x=y$, donc f est injective.

Soit $(f(x_p))_{p\geqslant 0}$ une suite de l'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$, supposée converger vers une limite $\ell\in\mathbb{R}^n$. C'est donc une suite de Cauchy : pour tout $\varepsilon>0$ il

existe N tel que

$$\|f(x_p) - f(x_q)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour } p, q \geqslant \mathrm{N} .$$

Alors $\|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon/k$, et la suite de Cauchy (x_p) converge vers un point x dans $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue on a $\lim f(x_p) = f(x)$, et $\ell = f(x)$ appartient à $f(\mathbb{R}^n)$. Cet ensemble est donc une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

2. Il résulte de la définition de la différentielle que, pour $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{D}f(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x)) .$$

Par hypothèse $\|f(x+th) - f(x)\| \geqslant k\,\|th\| = k|t| \cdot \|h\|$, d'où

$$\|\mathrm{D}f(x)h\| \geqslant k\,\|h\| .$$

Ceci montre que l'application linéaire $h \mapsto \mathrm{D}f(x)h$ est injective, donc inversible ; de plus $\left\|\mathrm{D}f(x)^{-1}\right\| \leqslant 1/k$.

3. Le théorème d'inversion locale est donc applicable au voisinage de chaque point x_0 de $\mathbb{R}^n$. Il donne un voisinage V de x_0 et un voisinage W de $f(x_0)$ tels que $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ soit un difféomorphisme. En particulier $f(\mathbb{R}^n)$ contient $f(\mathrm{V}) = \mathrm{W}$. Par suite l'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$, voisinage de chacun de ses points, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $f(\mathbb{R}^n)$ est non vide, ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n$ est *connexe*, on a nécessairement $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, et f est surjective.

C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, de classe C^1, et l'application réciproque f^{-1} est aussi de classe C^1 au voisinage de chaque point par le théorème d'inversion locale. Donc f est un C^1-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Exercice 71. **Point fixe et inversion locale.* Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $f(0) = 0$ (pour simplifier les notations) et $\mathrm{D}f(0)$ *inversible.* On veut démontrer le théorème d'inversion locale : il existe V et W, voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tels que f soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W.

Pour $x \in \mathrm{U}$, $y \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\mathbf{F}(x) = x - \mathrm{D}f(0)^{-1}(f(x) - y) .$$

Dans les questions 1 à 3 y sera *fixé.* Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$, indépendant de y, tel que

$$\|\mathrm{D}f(x)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour } \|x\| \leqslant r$$

(avec la norme d'application linéaire associée à une norme sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient $\overline{\mathrm{B}}_r$ la boule $\|x\| \leqslant r$, et W l'ensemble des y tels que

$$\left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}y\right\| < (1 - \varepsilon)r .$$

Montrer que $F(\overline{B}_r) \subset \overline{B}_r$ si on choisit $y \in W$.

3. On note B_r la boule $\|x\| < r$ et $V = B_r \cap f^{-1}(W)$. Montrer par le théorème du point fixe que f est une bijection de V sur W.

4. En utilisant 1 et 3 montrer que

$$(1-\varepsilon)Df(0)(\overline{B}_r) \subset f(\overline{B}_r) \subset (1+\varepsilon)Df(0)(\overline{B}_r) .$$

5. Montrer que la fonction inverse f^{-1} est continue, et même lipschitzienne, sur W.

[On pourra reprendre la méthode du point fixe avec paramètre de l'Exercice 57.]

6. En revenant à 1, montrer que $Df(x)$ est inversible pour $\|x\| \leqslant r$.

7. Montrer enfin que la fonction inverse est différentiable, puis de classe C^1, sur W.

[On pourra utiliser 5 et 6, à partir de $f(x) - f(x_0) = y - y_0$.]

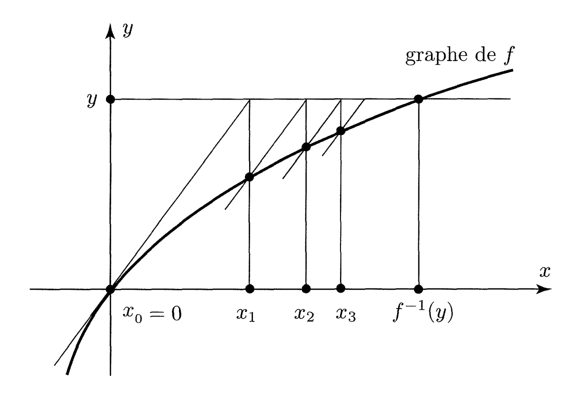


Fig. 101. Preuve du théorème d'inversion locale : $x = f^{-1}(y)$ est limite de la suite $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - Df(0)^{-1}(f(x_n) - y)$.

Commentaire. C'est la preuve classique du théorème d'inversion locale, qui transforme l'équation $f(x) = y$ (à l'inconnue x) en un problème équivalent de point fixe $F(x) = x$ (avec paramètre y). Le choix de F dans l'énoncé donne $DF(0) = 0$; la norme $\|DF(x)\|$ est donc petite au point x cherché, voisin de 0, ce qui conduit à une convergence rapide des itérés $x_{n+1} = F(x_n)$ vers la solution. On pourra revoir à l'Exercice 49 l'heuristique de la méthode de Newton, qui aurait consisté ici à itérer l'application $x \mapsto x - Df(x)^{-1}(f(x) - y)$, un peu plus compliquée. La figure (en dimension un) montre la différence entre les deux méthodes. Pour construire x_{n+1} on trace ici, par le point $(x_n, f(x_n))$ du graphe de f, la parallèle à sa tangente à l'origine, qui recoupe l'horizontale d'ordonnée y au point d'abscisse $x_{n+1} = F(x_n)$; dans la méthode de Newton, on aurait utilisé la tangente au point d'abscisse x_n.

La double inclusion de 4, qui n'intervient pas dans la suite du problème, est un nouveau succès de la Grande Idée du calcul différentiel : l'image par f de la boule $\overline{\mathrm{B}}_r$ est très proche de son image par l'application linéaire $\mathrm{D}f(0)$. Ces inclusions sont utilisées à l'Exercice 29 question 3 – où elles sont établies de façon légèrement différente, en sachant déjà f est un difféomorphisme.

Solution. 1. L'application F est de classe C^1 sur U, avec

$$\mathrm{DF}(x) = \mathrm{I} - \mathrm{D}f(0)^{-1} \circ \mathrm{D}f(x) \ ,$$

où I est l'identité de $\mathbb{R}^n$ et $\circ$ désigne la composition des applications linéaires (produit matriciel). Donc $\mathrm{DF}(0) = 0$ et, par continuité, il existe $r > 0$ tel que $\|x\| \leqslant r$ entraîne $\|\mathrm{D}f(x)\| \leqslant \varepsilon$; on choisit r assez petit pour que $\overline{\mathrm{B}}_r \subset \mathrm{U}$.

Noter que, $\mathrm{DF}(x)$ étant indépendant de y, il en est de même de r.

2. Pour $\|x\| \leqslant r$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathrm{F}(x)\| &\leqslant \|\mathrm{F}(0)\| + \|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)\| \\ &\leqslant \left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}y\right\| + \varepsilon \|x\| \end{aligned}$$

par l'inégalité de la moyenne. En supposant $\left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}y\right\| < (1-\varepsilon)r$ il vient

$$\|\mathrm{F}(x)\| < (1-\varepsilon)r + \varepsilon r = r \ ,$$

a fortiori $\mathrm{F}(\overline{\mathrm{B}}_r) \subset \overline{\mathrm{B}}_r$.

3. D'après 1 et 2, F est contractante de $\overline{\mathrm{B}}_r$ dans elle-même si $y \in \mathrm{W}$. Comme la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}_r$ est complète, il en résulte que F admet dans $\overline{\mathrm{B}}_r$ un point fixe unique x, limite de la suite récurrente $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$, avec par exemple $x_0 = 0$. Il reste à traduire ce résultat pour f.

L'ensemble W des y tels que $\left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}y\right\| < (1-\varepsilon)r$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $y \in \mathrm{W}$ il existe $x \in \overline{\mathrm{B}}_r$, unique, tel que $f(x) = y$. On a même $x \in \mathrm{B}_r$ (boule ouverte), car on peut appliquer ce qui précède avec un $r' < r$ choisi tel que $\left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}y\right\| < (1-\varepsilon)r'$, d'où $x \in \overline{\mathrm{B}}_{r'} \subset \mathrm{B}_r$.

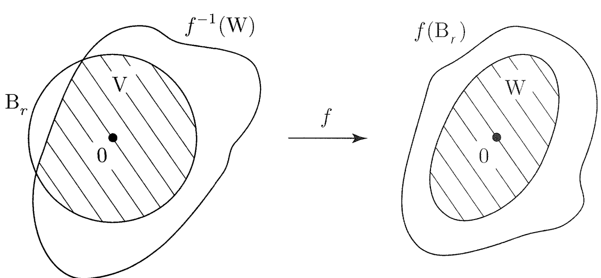


Fig. 102. Les voisinages V et W.

L'application f n'est peut-être pas une bijection de B_r sur W : on a $W \subset f(B_r)$, mais on n'a pas montré l'inclusion inverse. En posant

$$V = B_r \cap f^{-1}(W)$$

on obtient cependant un voisinage ouvert de 0 tel que f soit une *bijection* de V sur W.

4. Il suffit de traduire sous forme d'inclusions les résultats précédents. L'inégalité $\left\|Df(0)^{-1}y\right\| < (1-\varepsilon)r$ signifie que $Df(0)^{-1}y$ appartient à $(1-\varepsilon)B_r$, d'où $W = (1-\varepsilon)Df(0)B_r$. D'après 3, cet ensemble est contenu dans le compact $f(\overline{B}_r)$, et son adhérence aussi.

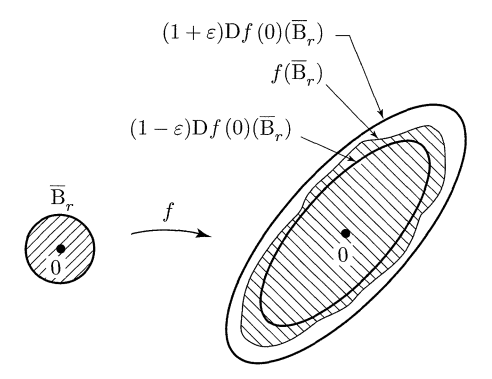


Fig. 103. L'image d'une boule par f.

Pour la deuxième inclusion, il s'agit de voir que

$$\|x\| \leqslant r \text{ entraîne } \left\|Df(0)^{-1}f(x)\right\| < (1+\varepsilon)r\ .$$

Or, en revenant à F (où on fixe un y quelconque), on a

$$\begin{aligned}\left\|Df(0)^{-1}f(x)\right\| &= \|F(x) - F(0) - x\| \\ &\leqslant \|F(x) - F(0)\| + \|x\| \\ &\leqslant \varepsilon\,\|x\| + \|x\| \leqslant (1+\varepsilon)r\end{aligned}$$

pour $\|x\| \leqslant r$, d'après 1 et l'inégalité de la moyenne, d'où le résultat.

5. Notons ici $F(x,y) = x - Df(0)^{-1}(f(x) - y)$, pour faire apparaître le paramètre y. Pour $y, y_0 \in W$ soient $x, x_0 \in V$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$. On a donc

$$\begin{aligned}x - x_0 &= F(x,y) - F(x_0,y_0) \\ &= (F(x,y) - F(x_0,y)) + (F(x_0,y) - F(x_0,y_0)) \\ &= (F(x,y) - F(x_0,y)) + Df(0)^{-1}(y - y_0)\end{aligned}$$

d'où, grâce à 1 et l'inégalité de la moyenne,

$$\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\| + \left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}\right\| \cdot \|y - y_0\| ,$$

c'est-à-dire

$$\left\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right\| \leqslant \frac{\left\|\mathrm{D}f(0)^{-1}\right\|}{1-\varepsilon} \|y - y_0\| ,$$

ce qui montre que f est lipschitzienne sur W.

6. Pour $\|x\| \leqslant r$ on avait en 1

$$\|\mathrm{DF}(x)\| = \left\|\mathrm{I} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right\| \leqslant \varepsilon$$

en notant $\mathrm{A} = \mathrm{D}f(0)$, $\mathrm{B} = \mathrm{D}f(x)$ pour abréger. Comme $\varepsilon < 1$ la série de Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{I} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)^k$$

converge, et a pour somme l'inverse de $\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ (cf. Exercice 16 question 1). Par suite $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ est inversible, donc aussi $\mathrm{B} = \mathrm{D}f(x)$.

7. Soient $y, y_0 \in \mathrm{W}$ et $x, x_0 \in \mathrm{V}$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$. La différentiabilité de f en x_0 s'écrit

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0) + \mathrm{R} ,$$

avec $\mathrm{R} = o(\|x - x_0\|)$ c'est-à-dire : pour tout $\eta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \alpha$ entraîne $\|\mathrm{R}\| \leqslant \eta \|x - x_0\|$.

D'après 5 on a $\|x - x_0\| \leqslant \mathrm{C} \|y - y_0\|$, où C est une constante. Par suite $\|y - y_0\| \leqslant \alpha/\mathrm{C}$ entraîne

$$\|\mathrm{R}\| \leqslant \eta \|x - x_0\| \leqslant \eta\mathrm{C} \|y - y_0\| .$$

En bref, le reste $o(\|x - x_0\|)$ est aussi un $o(\|y - y_0\|)$, d'où

$$\mathrm{D}f(x_0)(x - x_0) = y - y_0 + o(\|y - y_0\|) .$$

Comme $\mathrm{D}f(x_0)$ est inversible d'après 6, on en déduit

$$x - x_0 = \mathrm{D}f(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\|y - y_0\|) ,$$

ce qui établit la différentiabilité de f^{-1} en y_0 avec

$$\mathrm{D}f^{-1}(y_0) = \mathrm{D}f(x_0)^{-1} .$$

Enfin f^{-1} est de classe C^1 sur W, car l'application $y \mapsto \mathrm{D}f^{-1}(y)$ est la composée des trois applications continues

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \mapsto \mathrm{D}f(x) \mapsto \mathrm{D}f(x)^{-1} = \mathrm{D}f^{-1}(y)$$

(la dernière est le passage à l'inverse d'une matrice, continu sur l'ouvert des matrices inversibles d'après l'Exercice 16).

Exercice 72. ***Submersion ; fonctions indépendantes.*** **Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose qu'en un point a de U la différentielle $\mathrm{D}f(a)$ est une application linéaire *surjective* de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ (donc $n \geqslant p$).**

1. Montrer qu'on peut compléter les fonctions

$$\mathrm{X}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathrm{X}_p = f_p(x_1, \ldots, x_n)$$

en un système de coordonnées locales $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sur $\mathbb{R}^n$, sur un voisinage V de a.

2. Vérifier que, traduite dans les coordonnées $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sur l'espace de départ, l'application $f : x \longmapsto y = f(x)$ devient la *projection*

$$\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p, \mathrm{X}_{p+1}, \ldots, \mathrm{X}_n) \longmapsto y = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p) .$$

Montrer que f est une *application ouverte* sur V (l'image de tout ouvert est un ouvert), et qu'il n'existe aucune fonction φ (autre que 0) telle que

$$\varphi(f_1(x), \ldots, f_p(x)) = 0 \text{ identiquement sur V} .$$

Montrer que f admet (localement) un *inverse à droite*, i.e. une application g de classe C^1 telle que $f(g(y)) = y$.

3. *Application.* Soit une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre à n variables :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

à coefficients $v_i(x)$ continus et non simultanément nuls sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On suppose connues p solutions particulières $f_1, \ldots, f_p$ de l'équation, de classe C^1, de différentielles $\mathrm{D}f_1(a), \ldots, \mathrm{D}f_p(a)$ indépendantes en un point a de U.

Montrer que $p < n$ et que l'équation peut se ramener (localement, à l'aide de 1) à une équation de même type à $n - p$ variables seulement. Intégrer l'équation si $p = n - 1$ (cf. Exercice 64).

Commentaire. L'application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ (de classe C^1) est dite une *submersion* sur U si sa matrice jacobienne est surjective en tout point de U, c'est-à-dire si les différentielles $\mathrm{D}f_1(x)$,..., $\mathrm{D}f_p(x)$ sont indépendantes en tout point $x \in \mathrm{U}$. Si c'est vrai en un point a (comme supposé ici), cela reste vrai au voisinage : un certain mineur $p \times p$ de la matrice, non nul en a, le reste au voisinage par continuité.

Le résultat essentiel (question 2) est qu'il n'y a, à difféomorphisme local près au départ, qu'une seule submersion, la projection π de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathbb{R}^n & \longrightarrow & y = f(x) = \pi(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}^p \\ \downarrow & \nearrow \pi & \\ \mathrm{X} = (f(x), \ldots) \in \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Cela généralise le théorème d'inversion locale (cas $n = p$), et entraîne le Théorème 5.10 sur les sous-variétés définies implicitement.

De plus *l'indépendance des formes linéaires* $\mathrm{D}f_1(a)$,..., $\mathrm{D}f_p(a)$ (au sens de l'algèbre linéaire) *entraîne l'indépendance fonctionnelle des fonctions* f_1,..., f_p, qui ne vérifient aucune « relation de liaison » entre elles (question 2).

L'exemple de 3, qui généralise l'Exercice 64, illustre un usage de cette notion : si on connaît $n - 1$ solutions particulières indépendantes de l'équation aux dérivées partielles, la solution générale s'en déduit aussitôt (localement) – nouvel exemple de transfert de technologie de l'algèbre linéaire vers les fonctions « quelconques ».

Solution. 1. Si $p = n$ la réponse est donnée directement par le Théorème 5.2 d'inversion locale.

Supposons $p < n$. On peut ici appliquer le Corollaire 5.1, ou le redémontrer comme suit. L'hypothèse $\mathrm{D}f(a)$ surjective signifie que cette matrice est de rang p ou encore qu'une certaine matrice extraite $p \times p$ est inversible. Quitte à permuter les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ au départ, on peut supposer que c'est la matrice A des $(\partial f_i / \partial x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. L'application $x \mapsto \mathrm{X}$ définie par

$$\begin{cases} \mathrm{X}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ \mathrm{X}_i = x_i & \text{si } p+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

a pour matrice jacobienne en a

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \cdots \\ 0 & \mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix},$$

où I_{n-p} est la matrice unité $(n-p) \times (n-p)$. Cette matrice est inversible ; d'après le théorème d'inversion locale l'application $x \mapsto \mathrm{X}$ définit un difféomorphisme (changement de coordonnées) entre un voisinage ouvert V de a (contenu dans U) et un ouvert W de $\mathbb{R}^n$.

2. La première assertion est immédiate, par construction des coordonnées X_i.

Pour les autres, on peut raisonner sur W en coordonnées X_i, et remplacer f par la projection $\pi : \mathbb{R}^n \supset \mathrm{W} \to \mathbb{R}^p$. D'une part π est une application ouverte : l'image par π d'un voisinage cubique d'un point X_0 dans $\mathbb{R}^n$ est un voisinage cubique de sa projection $\pi(\mathrm{X}_0)$ dans $\mathbb{R}^p$. Donc f (restreinte à V) est ouverte. D'autre part la relation

$$\varphi(f_1(x), \ldots, f_p(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{V}$$

équivaut à

$$\varphi(X_1, \ldots, X_p) = 0 \text{ pour tout } X \in W \ ,$$

et φ est identiquement nulle. Cela signifie, de manière imprécise, que les fonctions f_1,..., f_p peuvent prendre sur V des valeurs arbitraires.

Enfin l'application

$$(X_1, \ldots, X_p) \mapsto (X_1, \ldots, X_p, a_{p+1}, \ldots, a_n)$$

est évidemment un inverse à droite (de classe C^1) de π, d'où l'application g demandée en revenant aux coordonnées x.

3. Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Une fonction f est solution de l'équation aux dérivées partielles si et seulement si $\operatorname{grad} f(x)$ est orthogonal au vecteur (non nul) $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$. L'orthogonal de $v(a)$ est de dimension $n-1$; les vecteurs $\operatorname{grad} f_1(a)$,..., $\operatorname{grad} f_p(a)$ ne peuvent donc être indépendants que si $p \leqslant n-1$.

Notons

$$X = \Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \ ,$$

avec $x \in V$, $X \in W$, le changement de coordonnées construit en 1 à partir des fonctions données f_1,..., f_p (on avait choisi $X_i = x_i$ pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$, mais peu importe ici). Soit $F(X) = F(\Phi(x)) = f(x)$ l'écriture d'une fonction f dans les nouvelles coordonnées X. Par dérivation de fonctions composées l'opérateur différentiel

$$Lf = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = < Df(x), v(x) > \ ,$$

où la forme linéaire $Df(x)$ est appliquée au vecteur $v(x)$, s'écrit encore

$$\begin{aligned} Lf &= < DF(X) \circ D\Phi(x), v(x) > \\ &= < DF(X), V(X) > = \sum_{i=1}^{n} V_i(X) \frac{\partial F}{\partial X_i} \ , \end{aligned}$$

en notant

$$V(X) = (V_1(X), \ldots, V_n(X)) = D\Phi(x)v(x) \ .$$

Pour la fonction $f_i(x) = X_i$ on obtient en particulier $Lf_i(x) = V_i(X)$, identiquement nul par hypothèse pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

L'équation aux dérivées partielles $Lf = 0$ se réduit donc à

$$\sum_{i=p+1}^{n} V_i(X) \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0 \ ,$$

avec X_{p+1},..., X_n pour seules variables effectives, X_1,..., X_p jouant le rôle de paramètres.

Pour $p = n - 1$ on a simplement

$$\mathrm{D}\Phi(x)v(x) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) = (\mathrm{V}_1(\mathrm{X}), \ldots, \mathrm{V}_n(\mathrm{X})) = (0, \ldots, 0, \mathrm{L}f_n(x)) \; .$$

Or $\mathrm{D}\Phi$ est injective et v ne s'annule pas sur l'ouvert considéré, par suite $\mathrm{V}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{L}f_n(x)$ ne s'y annule pas. L'équation $\mathrm{L}f = 0$, qui se réduit ici à

$$\mathrm{V}_n(\mathrm{X})\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}_n} = 0 \; ,$$

équivaut donc à $\partial\mathrm{F}/\partial\mathrm{X}_n = 0$, d'où $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1})$, fonction arbitraire des $n-1$ premières variables.

En revenant aux variables x on a montré le résultat suivant : si l'équation aux dérivées partielles $\mathrm{L}f = 0$ admet $n-1$ solutions particulières f_1,..., f_{n-1} de classe C^1, de différentielles indépendantes au point a, il existe un voisinage de a sur lequel sa solution générale est

$$f(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)) \; ,$$

où φ est une fonction arbitraire de classe C^1.

Exercice 73. ***Immersion.*** **Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose qu'en un point a de U la différentielle $\mathrm{D}f(a)$ est une application linéaire *injective* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (donc $n \leqslant p$).**

Après permutation des coordonnées de $\mathbb{R}^p$ (si nécessaire), montrer que les relations

$$\begin{cases} y_i = f_i(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i = f_i(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n) + \mathrm{Y}_i & \text{si } n+1 \leqslant i \leqslant p \end{cases}$$

définissent un changement de coordonnées locales $y \mapsto \mathrm{Y}$ sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^p$, qui transforme l'application $f : x \mapsto y = f(x)$ en l'*injection* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathrm{Y} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \; .$$

Montrer que f admet (localement) un *inverse à gauche*, i.e. une application g de classe C^1 telle que $g(f(x)) = x$.

Commentaire. L'application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ (de classe C^1) est dite une *immersion* sur U si sa matrice jacobienne est injective en tout point de U. Si c'est vrai en un point a (comme supposé ici), cela reste vrai au voisinage : un certain mineur $n \times n$ de la matrice, non nul en a, le reste au voisinage par continuité.

Le résultat essentiel est qu'il n'y a, à difféomorphisme local près à l'arrivée, qu'une seule immersion, l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathbb{R}^n & \longrightarrow & y = f(x) \in \mathbb{R}^p \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \mathrm{Y} = (x, 0) \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Cela généralise le théorème d'inversion locale (cas $n = p$), et intervient dans la preuve du Théorème 5.11 pour les sous-variétés définies paramétriquement.

Solution. Si $n = p$ la réponse est donnée directement par le Théorème 5.2 d'inversion locale.

Supposons $n < p$. L'hypothèse $\mathrm{D}f(a)$ injective signifie que cette matrice est de rang n ou encore qu'une certaine matrice extraite $n \times n$ est inversible. Quitte à permuter les coordonnées $y_1,\ldots, y_p$ à l'arrivée, on peut supposer que c'est la matrice A des $(\partial f_i/\partial x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. L'application $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_p) \mapsto (y_1, \ldots, y_p)$ de l'énoncé est alors de classe C^1 sur U et sa matrice jacobienne en a

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \cdots & \mathrm{I}_{p-n} \end{pmatrix},$$

où I_{p-n} est la matrice unité $(p - n) \times (p - n)$, est inversible. C'est donc un changement de coordonnées locales au voisinage de $f(a)$ sur $\mathbb{R}^p$.

Les relations $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ avec $1 \leqslant i \leqslant p$ sont alors équivalentes à

$$\mathrm{Y}_i = x_i \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \mathrm{Y}_i = 0 \text{ si } n + 1 \leqslant i \leqslant p \ .$$

Autrement dit f se traduit en coordonnées Y par l'injection

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathrm{Y} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \ .$$

La projection

$$(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_{n+1}, \ldots, \mathrm{Y}_p) \mapsto (\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$$

en est évidemment un inverse à gauche, d'où l'application g demandée en revenant aux coordonnées y.

Exercice 74. ***Théorème du rang constant.* Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f : U $\longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose que le rang de la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(x)$ est *constant sur* U, égal à r.**

On veut montrer qu'il existe un changement de coordonnées locales $x \mapsto \mathrm{X}$ au départ (au voisinage d'un point a de U) et un changement

$y \mapsto Y$ à l'arrivée (au voisinage de $f(a)$), qui transforment f en l'application linéaire A (de rang r) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

$$A : X = (X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n) \mapsto Y = (X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0) .$$

1. Simplifier les notations : montrer qu'on peut, par translations et changements linéaires de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, se ramener au cas où $a = 0$, $f(a) = 0$ et $Df(a) = A$.

Dans ces conditions, on va voir qu'on peut résoudre le problème par des changements de coordonnées de la forme :

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ X_r = f_r(x_1, \ldots, x_n) \\ X_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ X_n = x_n \end{cases} , \quad \begin{cases} y_1 = Y_1 \\ \vdots \\ y_r = Y_r \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_{r+1} \\ \vdots \\ y_p = \varphi_p(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_p \end{cases}$$

où les fonctions φ_i seront choisies convenablement.

2. Vérifier que les relations $x \mapsto X$ ci-dessus sont un changement de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de 0.

3. Dans les coordonnées X (au départ) et y (à l'arrivée), l'application $x \mapsto y = f(x)$ devient $X \mapsto y = \varphi(X)$. Expliciter φ, et montrer que seuls X_1,..., X_r figurent dans les expressions obtenues.

4. Montrer que les relations $Y \mapsto y$ ci-dessus sont un changement de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^p$ au voisinage de 0, qui répond à la question.

Commentaires. Le théorème du rang constant généralise les Exercices 72 et 73 (submersions si $r = p$, immersions si $r = n$), et *a fortiori* le théorème d'inversion locale ($r = n = p$). Il s'obtient en combinant les méthodes de ces deux exercices, par changement de coordonnées locales au départ et à l'arrivée :

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathbb{R}^n & \longrightarrow & y = f(x) \in \mathbb{R}^p \\ \downarrow & & \uparrow \\ X \in \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Y = AX \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

À ces changements près, la seule application C^1 de rang constant r est donc l'application linéaire A de matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

à p lignes et n colonnes, où I_r est la matrice unité $r \times r$.

L'hypothèse de rang constant est nécessaire : s'il existe des difféomorphismes (locaux) $X = \Phi(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ et $y = \Psi(Y)$ sur $\mathbb{R}^p$ tels que $f = \Psi \circ A \circ \Phi$, alors nécessairement

$$Df(x) = D\Psi(AX) \circ A \circ D\Phi(x)$$

et, $D\Psi$ et $D\Phi$ étant inversibles, $Df(x)$ doit avoir même rang que A en tout point.

On notera qu'il suffisait, dans le cas des submersions (resp. immersions) de l'*hypothèse ponctuelle* $Df(a)$ surjective (resp. injective) en un point a de U. Ce n'est plus le cas ici. Si une matrice dépend continûment d'un paramètre x, son rang peut augmenter brusquement : ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est de rang 1 en $x = 0$, de rang 2 dès que $x \neq 0$. Mais le rang ne peut pas diminuer brusquement : s'il vaut r pour $x = a$, un certain mineur $r \times r$ est non nul en a, il le reste au voisinage par continuité, et le rang est au moins r en un point x proche de a. On dit que le rang est une *fonction semi-continue inférieurement* de x (cf. Choquet [10] p. 128). Dans les Exercices 72 et 73, l'application linéaire $Df(a)$ était *de rang maximal* ; son rang restait donc constant au voisinage de a, puisqu'il ne pouvait ni augmenter ni diminuer.

Application aux sous-variétés : si f est une application de classe C^1, de rang constant r sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ alors, pour chaque y^0 donné dans l'image $f(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des $x \in U$ qui vérifient l'équation $f(x) = y^0$ est une *sous-variété de* $\mathbb{R}^n$, *de dimension* $n - r$. La preuve est immédiate : traduite en coordonnées locales X, Y, l'équation s'écrit $AX = Y^0$ et définit le sous-espace affine d'équations $X_1 = Y_1^0, \ldots, X_r = Y_r^0$ dans $\mathbb{R}^n$. Voir à l'Exercice 94 question 2 un exemple d'utilisation de ce résultat.

Solution. 1. En remplaçant f par l'application $g(x) = f(x + a) - f(a)$ on se ramène à raisonner au voisinage de $x = 0$, avec $g(0) = 0$, et $Dg(x) = Df(x + a)$ est encore de rang constant r.

Comme $Dg(0)$ est de rang r, son image est un sous-espace de dimension $n - r$ de $\mathbb{R}^n$. Soient alors $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ obtenue en complétant une base $e_{r+1}, \ldots, e_n$ du noyau, et $f_1, \ldots, f_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ obtenue en complétant la base

$$f_1 = Dg(0)e_1 \ , \ \ldots \ , \ f_r = Dg(0)e_r$$

de l'image. Ces bases sont faites pour que la matrice de $Dg(0)$ y devienne

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

En notant $x = P\widetilde{x}$, resp. $y = Q\widetilde{y}$, les relations de changement linéaire de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{R}^p$ (avec des matrices de passage P et Q), on

voit que l'application

$$\widetilde{x} \mapsto \widetilde{y} = h(\widetilde{x}) = \mathrm{Q}^{-1}g(\mathrm{P}\widetilde{x})$$

vérifie $h(0) = 0$, $\mathrm{D}h(0) = \mathrm{A}$ et $\mathrm{D}h(\widetilde{x})$ est de rang constant r.

On note désormais f, au lieu de h, cette application.

2. Comme $\mathrm{D}f(0) = \mathrm{A}$, la matrice jacobienne de l'application $x \mapsto \mathrm{X}$ est, à l'origine,

$$\begin{pmatrix} (\partial f_i/\partial x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant r} & \cdots \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \cdots \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$$

(où I_k est la matrice unité $k \times k$). Elle est inversible ; l'application $x \mapsto \mathrm{X}$ est donc un changement de coordonnées au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, d'après le Théorème 5.2 d'inversion locale.

3. L'égalité $y = f(x)$ s'écrit, en coordonnées X,

$$\begin{cases} y_1 = \mathrm{X}_1 \ , \dots , \ y_r = \mathrm{X}_r \ , \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) \ , \dots , \ y_p = \varphi_p(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) \ , \end{cases}$$

où les φ_i sont des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, au voisinage de 0. La matrice jacobienne de l'application $\mathrm{X} \mapsto y$ (à p lignes et n colonnes) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ \cdots & (\partial\varphi_i/\partial \mathrm{X}_j)(\mathrm{X}) \end{pmatrix} ,$$

avec $r + 1 \leqslant i \leqslant p$, $r + 1 \leqslant j \leqslant n$. Comme elle est de rang r pour tout X voisin de 0 (l'hypothèse de rang constant n'avait pas servi jusque-là !), ces $\partial\varphi_i/\partial\mathrm{X}_j$ doivent être identiquement nuls. Par suite les φ_i ne dépendent que de X_1,..., X_r et l'écriture de f en coordonnées X et y est donc

$$\begin{cases} y_1 = \mathrm{X}_1 \ , \ \dots \ , \ y_r = \mathrm{X}_r \ , \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r) \ , \ \dots \ , \ y_p = \varphi_p(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r) \ . \end{cases}$$

4. Les relations $\mathrm{Y} \mapsto y$ de l'énoncé (avec les notations φ_i introduites en 3) définissent un changement de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^p$, car elles s'inversent immédiatement selon

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_1 = y_1 \ , \dots , \ \mathrm{Y}_r = y_r \ , \\ \mathrm{Y}_{r+1} = y_{r+1} - \varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r) \ , \dots , \ \mathrm{Y}_p = y_p - \varphi_p(y_1, \dots, y_r) \end{cases}$$

(point n'est besoin de recourir ici au théorème d'inversion locale !).

L'égalité $y = f(x)$ est alors équivalente à

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}_1 \ , \dots , \ \mathrm{Y}_r = \mathrm{X}_r \ , \\ \mathrm{Y}_{r+1} = 0 \ , \dots , \ \mathrm{Y}_p = 0 \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire Y = AX, d'où le résultat.

Exercice 75. ***Inversion d'une fonction holomorphe.*** **Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $|z| < 1$. On suppose**

$$f(0) = 0 \ , \ f'(0) = 1 \text{ et } |f'(z)| < \mathrm{M} \text{ pour } |z| < 1 \ .$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{R} \in]0, 1[$ tel que

$$|f'(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{\mathrm{R}} \text{ pour } |z| < 1 \ .$$

[On pourra appliquer le principe du maximum à la fonction $(f'(z) - 1)/z$ et choisir $\mathrm{R} = 1/(\mathrm{M} + 1)$.]

2. En déduire que f est injective sur le disque $|z| \leqslant \mathrm{R}$.

[On pourra comparer les valeurs de $f(z) - z$ en deux points.]

3. Montrer que

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2\mathrm{R}} \text{ pour } |z| < 1 \ .$$

4. En déduire que f est un difféomorphisme holomorphe du disque $|z| < \mathrm{R}$ sur un ouvert contenant le disque $|w| < \mathrm{R}/2$.

[On pourra appliquer, grâce à 3, le théorème de Rouché à la fonction $z \longmapsto f(z) - w$, avec le cercle $|z| = \mathrm{R}$.]

Commentaire. Sachant que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, le théorème d'inversion locale entraîne que f est un difféomorphisme holomorphe entre deux voisinages V et W de 0. L'exercice apporte des informations complémentaires sur la grosseur des ouverts V et W, en s'appuyant sur quelques connaissances de base sur les fonctions holomorphes (principe du maximum, théorème de Rouché) que l'on pourra revoir dans Candelpergher [6] p. 22 et 69, ou Rudin [35] théorème 10.43.

On peut en fait prendre $\mathrm{R} = 1/\mathrm{M}$ au lieu de $1/(\mathrm{M} + 1)$: voir compléments à la fin.

Solution. 1. On peut appliquer le *lemme de Schwarz* (Cartan [9] p. 84) à la fonction $f'(z) - 1$, ou raisonner directement comme suit.

Comme $f'(0) = 1$ on peut écrire

$$f'(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \ ,$$

série entière convergente pour $|z| < 1$. La fonction $\varphi(z) = (f'(z) - 1)/z$, *a priori* non définie en $z = 0$, se prolonge donc en une fonction holomorphe dans le disque $|z| < 1$. L'inégalité

$$|\varphi(z)| = \frac{|f'(z) - 1|}{|z|} < \frac{\mathrm{M} + 1}{r} \text{ pour } |z| = r < 1$$

reste valable, d'après le principe du maximum, pour $|z| \leqslant r$. Si on fixe z (avec $|z| < 1$) et si on fait tendre r vers 1 on en déduit $|\varphi(z)| \leqslant \mathrm{M}+1$, c'est-à-dire

$$|f'(z)-1| \leqslant \frac{|z|}{\mathrm{R}} \text{ si } |z|<1$$

en posant $\mathrm{R} = 1/(\mathrm{M}+1)$.

2. Soient z_0 et z_1 deux points du disque $|z| \leqslant \mathrm{R}$, et $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$, le segment qui les joint. On a $\gamma'(t) = z_1 - z_0$ et, en utilisant 1,

$$\begin{aligned} |(f(z_1)-z_1)-(f(z_0)-z_0)| &= \left|\int_0^1 (f'(\gamma(t))-1)\,\gamma'(t)\,dt\right| \\ &\leqslant |z_1-z_0| \int_0^1 \frac{|\gamma(t)|}{\mathrm{R}} dt\ . \end{aligned}$$

Comme $|\gamma(t)|/\mathrm{R} < 1$ pour $0 < t < 1$, la dernière intégrale est strictement inférieure à 1. Par suite l'égalité $f(z_1) = f(z_0)$ entraîne $z_1 = z_0$, d'où l'injectivité.

3. De même, avec $|z| < 1$ et $\gamma(t) = tz$,

$$|f(z)-z| = \left|\int_0^1 (f'(tz)-1)z\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|tz|}{\mathrm{R}}|z|\,dt = \frac{|z|^2}{2\mathrm{R}}\ .$$

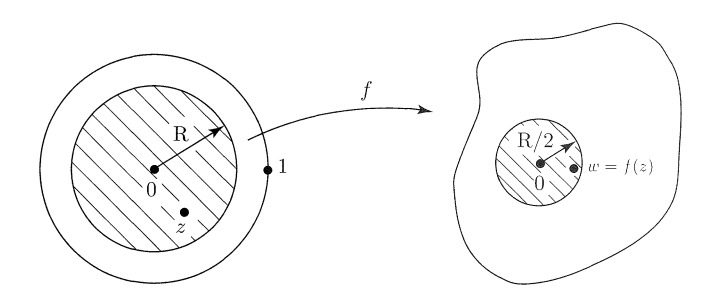


Fig. 104. L'image du disque $|z| < \mathrm{R} = 1/(\mathrm{M}+1)$ contient le disque $|w| < \mathrm{R}/2$.

4. Fixons w tel que $|w| < \mathrm{R}/2$. L'indication de l'énoncé incite à écrire

$$f(z)-w = (z-w)+(f(z)-z)\ .$$

Pour $|z| = \mathrm{R}$ on a d'après 3

$$|z-w| \geqslant |z|-|w| > \mathrm{R}/2 \text{ et } |f(z)-z| \leqslant \mathrm{R}^2/2\mathrm{R} = \mathrm{R}/2\ ,$$

d'où

$$|z-w| > |f(z)-z|\ .$$

D'après le théorème de Rouché la fonction $f(z) - w$ a autant de zéros dans le disque $|z| < \mathrm{R}$ que la fonction $z - w$, c'est-à-dire un seul.

Pour $|w| < \mathrm{R}/2$ il existe donc un unique z tel que $|z| < \mathrm{R}$ et $f(z) = w$, et l'image par f du disque $|z| < \mathrm{R}$ contient le disque $|w| < \mathrm{R}/2$.

De plus le théorème d'inversion 5.6 (version holomorphe) s'applique ici d'après 2, et entraîne que f est un difféomorphisme holomorphe du disque $|z| < \mathrm{R}$ sur un ouvert du plan complexe.

Remarque. D'après ce théorème, la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas pour $|z| < \mathrm{R}$, ce qu'on pouvait voir ici directement grâce à l'inégalité de 1.

Compléments. (*i*) En améliorant la démonstration, on pourrait prendre $\mathrm{R} = 1/\mathrm{M}$ au lieu de $1/(\mathrm{M}+1)$. Pour cela, on applique le lemme de Schwarz à

$$g(z) = \mathrm{M}\frac{f'(z) - 1}{\mathrm{M}^2 - f'(z)}$$

au lieu de $g(z) = f'(z) - 1$ comme en 1. Noter que $\mathrm{M} > |f'(0)| = 1$, d'où $|f'(z)| < \mathrm{M} < \mathrm{M}^2$. On a $g(0) = 0$ et on vérifie que $|g(z)| < 1$ pour $|z| < 1$ en s'aidant de l'identité

$$\left|\mathrm{M}^2 - \mathrm{Z}\right|^2 - \mathrm{M}^2 \left|\mathrm{Z} - 1\right|^2 = \left(\mathrm{M}^2 - 1\right)\left(\mathrm{M}^2 - |\mathrm{Z}|^2\right) ,$$

où on prendra $\mathrm{Z} = f'(z)$. Le lemme de Schwarz donne alors $|g(z)| \leqslant |z|$ pour $|z| < 1$. Par suite

$$|f'(z) - 1| = \left|\frac{(\mathrm{M}^2 - 1)g(z)}{\mathrm{M} + g(z)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M} - |z|}|z| ,$$

et pour $|z| \leqslant 1/\mathrm{M}$ on a $\mathrm{M} - |z| \geqslant (\mathrm{M}^2 - 1)/\mathrm{M}$, d'où

$$|f'(z) - 1| \leqslant \mathrm{M}\,|z| \text{ si } |z| \leqslant 1/\mathrm{M} .$$

On peut alors reprendre la méthode de 2, 3 et 4 avec $\mathrm{R} = 1/\mathrm{M}$.

(*ii*) On pourrait poursuivre l'exercice jusqu'au *théorème de Bloch* : il existe une constante universelle b telle que, pour toute fonction f holomorphe dans le disque unité ouvert D, avec $f'(0) = 1$, l'image $f(\mathrm{D})$ contient un disque ouvert de rayon b. On a pu établir que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0{,}433 < b < 0{,}472 ,$$

mais la valeur exacte de cette constante reste inconnue à ce jour... Voir Dieudonné [18] p. 287 (problème 5), Valiron [39] p. 73, et aussi Rudin [35] théorème 14.14 pour un autre résultat dans le même esprit.

6. Exercices sur les fonctions implicites

Exercice 76. ***Folium de Descartes.*** **Soit C l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que**

$$\boldsymbol{x^3 + y^3 - 3xy = 0} \ .$$

1. Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Calculer la dérivée de la fonction implicite (lorsqu'elle existe), et écrire l'équation de la tangente à C.

2. Dessiner C, et préciser l'asymptote.

[On pourra utiliser une représentation paramétrique obtenue en coupant par la droite $y = tx$.]

Commentaire. Application simple et typique du théorème des fonctions implicites ! La solution ci-dessous, très détaillée, invite à approfondir cet exercice avant d'aborder tout autre sur le même sujet.

La présence du point double à l'origine empêche C (appelé folium de Descartes) d'être *globalement* une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ (voir Exercice 88 questions 5 et 6 pour plus de détails), mais permet d'en donner une représentation paramétrique rationnelle.

Solution. 1. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe C^1 (et même C^∞) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème des fonctions implicites lui est applicable au voisinage d'un point (a, b) si

$$f(a, b) = a^3 + b^3 - 3ab = 0 \text{ et } f'_y(a, b) = 3(b^2 - a) \neq 0 \ .$$

Il existe alors un voisinage V de a, un voisinage W de b et une fonction $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, de classe C^∞, telle que

$$(x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{W} \text{ et } (x, y) \in \mathrm{C}) \iff (x \in \mathrm{V} \text{ et } y = \varphi(x)) \ .$$

Autrement dit : la portion de C contenue dans le voisinage $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ du point (a, b) est le *graphe de* φ.

La tangente à C au point (a, b) a pour équation :

$$y - b = \varphi'(a)(x - a) \ .$$

Pour calculer la dérivée de la fonction implicite, on dérive en x l'identité, valable pour tout $x \in \mathrm{V}$,

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \text{ avec } y = \varphi(x) \ ,$$

ce qui donne

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \ ,$$

d'où

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2} \ .$$

En particulier $\varphi'(a) = (a^2 - b)/(a - b^2)$, et la tangente est

$$(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0 \ .$$

Remarques. (i) On aurait pu l'obtenir directement en écrivant

$$f'_x(a,b)(x - a) + f'_y(a,b)(y - b) = 0 \, ;$$

la dérivée de la fonction implicite étant $\varphi'(a) = -f'_x(a,b)/f'_y(a,b)$, cela équivaut bien à $y - b = \varphi'(a)(x - a)$. *La condition* $f'_y(a,b) \neq 0$ *exprime que cette droite n'est pas verticale.* Elle est précisément ce qu'il faut pour pouvoir mener à bien le calcul de $\varphi'(a)$!
(ii) On pourrait s'amuser à expliciter la fonction implicite à grands coups de racines cubiques, en résolvant une équation du troisième degré ! Ces expressions peu maniables seraient de peu d'intérêt pratique ici, et cette méthode serait de toute manière inapplicable si on avait une équation algébrique de degré au moins 5...
(iii) Qu'advient-il si $f'_y(a,b) = 0$? Les équations

$$a^3 + b^3 - 3ab = 0 \text{ et } b^2 - a = 0$$

ont pour seules solutions $(a,b) = (0,0)$ ou $(a,b) = (2^{2/3}, 2^{1/3}) = \mathrm{A}$. Au point A on a $f'_x(a,b) = 3(a^2 - b) = 3 \cdot 2^{1/3} \neq 0$. On peut donc échanger les rôles de x et y, et obtenir $x = \psi(y)$ au voisinage de ce point. Comme $f'_y(a,b) = 0$, on trouvera $\psi'(b) = 0$ et une *tangente verticale.*

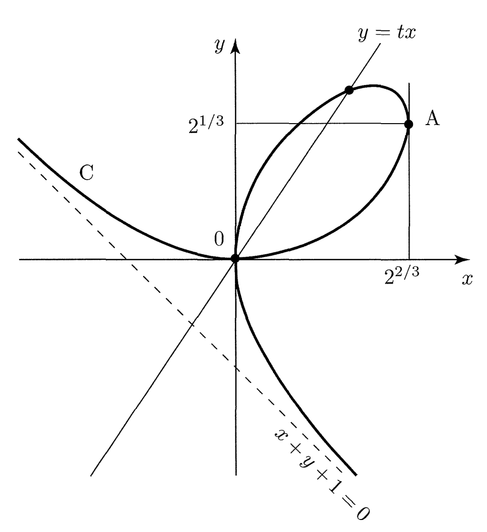


Fig. 105. Le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

À l'origine $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, et le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable directement. On va voir qu'il y a un point double, en attendant les Exercices 109 ou 110 pour une étude générale de ce cas.

2. Les points d'intersection de C avec la droite de pente t passant par l'origine s'obtiennent en résolvant le système d'équations

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \ , \ y = tx \ ,$$

aux inconnues x, y, c'est-à-dire

$$x^2 \left((1+t^3)x - 3t\right) = 0 \ , \ y = tx \ .$$

Les racines de cette équation du troisième degré en x donnent les trois points d'intersection :

$$(x,y) = (0,0) \ , \text{ compté deux fois et, si } t \neq -1, \ (x,y) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

On a ainsi une représentation paramétrique *rationnelle* de C, origine comprise (obtenue pour $t = 0$). L'absence de racines cubiques dans ce résultat s'explique aisément : la somme des racines de l'équation en x étant fonction rationnelle de ses coefficients, d'après les relations classiques entre coefficients et racines d'un polynôme, et 0 étant racine double évidente, la troisième racine s'exprime rationnellement.

L'étude des variations de x et y en fonction de t (à la portée de tout bachelier) conduit au tracé de C, où l'on tient compte de la symétrie par rapport à la première bissectrice (échange de x et y) et de quelques points particuliers :

t	$-\infty$			-1			0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$2^{1/3}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{1/3}$	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	0

Il y a donc deux passages par l'origine : l'un pour $t = 0$, avec tangente horizontale puisque $y/x = t$ tend vers 0, et l'autre déduit du premier par symétrie par rapport à la première bissectrice, avec tangente verticale (correspondant ici à $t \to \pm\infty$). C a un *point double en* 0.

La branche infinie peut s'étudier par un *développement asymptotique* pour $t \to -1$, arrêté au premier terme qui tend vers 0, ou plus directement en profitant de la signification géométrique du paramètre. D'abord $y/x = t$ tend vers -1, ce qui donne la *direction asymptotique* $y = -x$. Ensuite

$$x + y = \frac{3t^2 + 3t}{1+t^3} = \frac{3t}{1-t+t^2} \to -1 \ .$$

En se souvenant que la distance euclidienne du point (x,y) à la droite $ax+by+c=0$ est $|ax+by+c|/\sqrt{a^2+b^2}$, on en déduit que la droite $x+y+1=0$ est *asymptote à* C. On a enfin

$$x+y+1=\frac{(1+t)^3}{1+t^3}=\frac{(1+t)^2}{1-t+t^2}>0 \text{ pour } t\neq -1\ ,$$

donc C est *au-dessus de l'asymptote.*

Exercice 77. ***Résolution approchée d'une équation.*** **Donner une valeur approchée de la solution réelle de l'équation**

$$\boldsymbol{x^7+0{,}99\,x-2{,}03=0\ .}$$

[On pourra considérer la fonction x définie implicitement par $x^7+px+q=0$ au voisinage de $p=1$, $q=-2$.]

Solution. Pour chaque $p>0$ la fonction $x\mapsto x^7+px+q$, de dérivée $7x^6+p>0$, croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$ et a donc un unique zéro réel. L'équation proposée est proche de $x^7+x-2=0$, qui a la racine évidente $x_0=1$. On considérera cette valeur 1 comme une « approximation d'ordre zéro » de la solution cherchée.

Pour obtenir une « approximation d'ordre un », on va évaluer la variation Δx de cette solution due à la variation des coefficients p et q de l'équation, de 1 à 0,99 et de -2 à $-2{,}03$ respectivement. Les calculs suivants, qui tirent parti de la souplesse de la notation différentielle, seront justifiés ensuite.

Calculs. La relation $x^7+px+q=0$ entraîne par différentiation

$$7x^6dx+p\,dx+x\,dp+dq=0\ ,$$

d'où

$$dx=-\frac{x}{7x^6+p}dp-\frac{1}{7x^6+p}dq\ ,$$

et une valeur approchée de l'écart Δx cherché lorsqu'on change p_0 en $p_0+\Delta p$ et q_0 en $q_0+\Delta q$:

$$x-x_0=\Delta x\simeq-\frac{x_0}{7x_0^6+p_0}\Delta p-\frac{1}{7x_0^6+p_0}\Delta q\ .$$

Ici $\Delta p=-0,01$ et $\Delta q=-0{,}03$, ce qui donne

$$\Delta x\simeq\frac{0{,}01}{8}+\frac{0{,}03}{8}=0{,}005$$

et l'approximation d'ordre un : $x\simeq 1{,}005$.

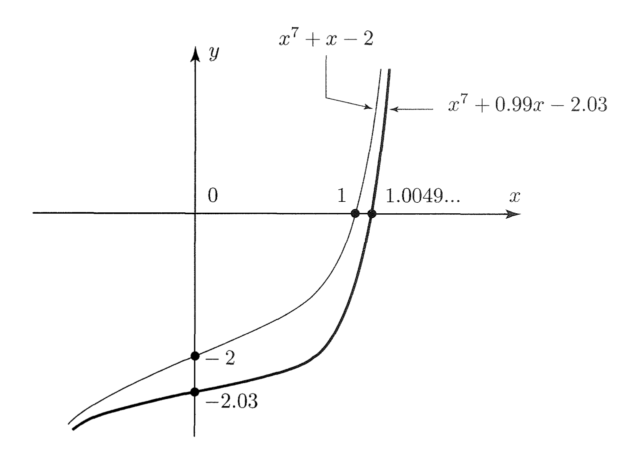


Fig. 106. L'équation $x^7 + px + q = 0$ (échelle non respectée).

Explications. La fonction $f(x, p, q) = x^7 + px + q$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, et on a $(\partial f/\partial x)(x_0, p_0, q_0) = 7x_0^6 + p_0 = 8$ au point de départ $x_0 = 1$, $p_0 = 1$, $q_0 = -2$. Le théorème des fonctions implicites donne un voisinage V de (p_0, q_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage W de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction φ, de classe C^1 sur V, unique, telle que

$$((p,q) \in \mathrm{V}, x \in \mathrm{W} \text{ et } f(x,p,q) = 0) \Longleftrightarrow ((p,q) \in \mathrm{V} \text{ et } x = \varphi(p,q)) \ .$$

La différentielle en (p_0, q_0) de cette fonction implicite permet d'écrire

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \varphi(p,q) - \varphi(p_0,q_0) \\ &= \varphi_p'(p_0,q_0)(p-p_0) + \varphi_q'(p_0,q_0)(q-q_0) + r(p,q) \end{aligned}$$

avec $r(p,q) = o\left(|p - p_0| + |q - q_0|\right)$ lorsque $p \to p_0$ et $q \to q_0$. Les calculs ci-dessus ont donné les dérivées partielles

$$\varphi_p'(p_0,q_0) = -\frac{x_0}{7x_0^6 + p_0} \ , \ \varphi_q'(p_0,q_0) = -\frac{1}{7x_0^6 + p_0} \ ,$$

et l'approximation d'ordre un de x est donc celle obtenue en négligeant le petit reste r.

On pourrait obtenir une majoration de l'erreur ainsi commise sur x en appliquant à φ la formule de Taylor à l'ordre deux et en majorant les dérivées partielles secondes. Un calcul plus précis donne

$$x \simeq 1{,}0049415\,;$$

l'erreur est donc ici inférieure à 6.10^{-5}.

Exercice 78. ***L'équation du troisième degré.*** **On note x, p, q trois variables réelles. L'équation**

$$x^3 + px + q = 0$$

définit-elle x fonction implicite de p et q ? On illustrera la discussion en esquissant la surface d'équation $x^3 + px + q = 0$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des coordonnées (q, p, x).

Commentaire. Nouvelle application simple du théorème des fonctions implicites, d'un point de vue qualitatif cette fois, l'exercice illustre le rôle de la *courbe discriminante* d'équation $4p^3 + 27q^2 = 0$ et son lien géométrique avec la surface d'équation $x^3 + px + q = 0$, dont elle est le *contour apparent* dans la direction de l'axe des x (cf. Demazure [14] p.123). On pourrait illustrer de même la discussion de l'équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$, avec la parabole $s^2 - 4p = 0$ pour courbe discriminante.

Solution. La fonction $f(q, p, x) = x^3 + px + q$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et l'équation $f(q, p, x) = 0$ définit implicitement une surface lisse S de $\mathbb{R}^3$: le Théorème 5.10 s'applique en effet puisque $f'_q = 1$ ne s'annule pas sur S. Plus simplement on peut voir S comme le graphe de la fonction $(p, x) \mapsto q = -x^3 - px$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Les sections $p =$ *constante* de S sont des courbes du troisième degré, qui se déforment quand p varie (voir figure).

D'après le théorème des fonctions implicites, cette surface pourra être vue aussi (localement) comme le graphe d'une fonction $x = \varphi(p, q)$ au voisinage de tout point (q_0, p_0, x_0) tel que

$$f(q_0, p_0, x_0) = 0 \text{ et } f'_x(q_0, p_0, x_0) = 3x_0^2 + p_0 \neq 0 \ .$$

Il existe alors un voisinage V de (q_0, p_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage W de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ de classe C^1, unique, telle que

$$\big((q, p) \in \mathrm{V}, x \in \mathrm{W} \text{ et } x^3 + px + q = 0\big) \iff ((q, p) \in \mathrm{V} \text{ et } x = \varphi(q, p)) \ .$$

Une telle fonction donne une formule de résolution de l'équation du troisième degré au voisinage de l'une de ses racines ; on pourrait l'expliciter à l'aide de racines cubiques.

Les points (q_0, p_0, x_0) de S où cela ne s'applique pas sont définis par le système d'équations

$$\begin{cases} f(q_0, p_0, x_0) = 0 \\ f'_x(q_0, p_0, x_0) = 0 \end{cases} , \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_0^3 + p_0 x_0 + q_0 = 0 \\ 3x_0^2 + p_0 = 0 \ . \end{cases} \qquad (*)$$

Interprétation algébrique : un tel x_0 est une *racine double* de l'équation $x^3 + p_0 x + q_0 = 0$ à l'inconnue x. En effet la formule de Taylor, appliquée

sur la seule variable x :

$$f(q_0, p_0, x) = f(q_0, p_0, x_0) + (x - x_0) f'_x(q_0, p_0, x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''_{x^2}(q_0, p_0, x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6} f'''_{x^3}(q_0, p_0, x_0)$$

(cette formule s'arrête à l'ordre trois), montre que $(x - x_0)^2$ est en facteur dans $f(q_0, p_0, x)$ si et seulement si les conditions $(*)$ sont réalisées.
Interprétation géométrique : les points (q_0, p_0, x_0) qui vérifient $(*)$ sont les points de S où le plan tangent, d'équation générale

$$f'_q(q_0, p_0, x_0)(q - q_0) + f'_p(q_0, p_0, x_0)(p - p_0) + f'_x(q_0, p_0, x_0)(x - x_0) = 0$$

(cf. Théorème 5.10), est *parallèle à l'axe des x*. Ces points (ou leurs projections dans le plan (q, p)) forment le *contour apparent* de S dans la direction de l'axe des x.

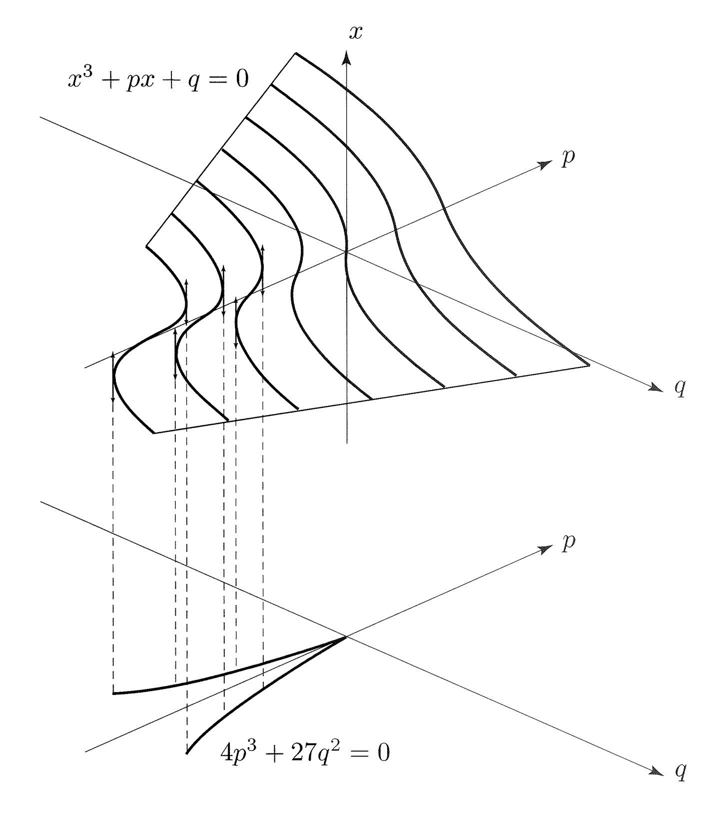


Fig. 107. L'équation $x^3 + px + q = 0$ et sa courbe discriminante $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Pour déterminer ces points, on peut résoudre $(*)$ (en omettant les indices $_0$) sous la forme

$$(*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = -3x^2 \\ q = 2x^3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4p^3 + 27q^2 = 0 \\ x = \sqrt[3]{q/2} \ . \end{array} \right.$$

Ces relations définissent une courbe tracée sur S, dont les projections sur les plans de coordonnées sont respectivement définies par

$$q = 2x^3 \text{ sur le plan des } (q, x)$$
$$p = -3x^2 \text{ sur le plan des } (p, x)$$
$$4p^3 + 27q^2 = 0 \text{ sur le plan des } (q, p) \ .$$

La plus importante est la dernière (courbe discriminante de l'équation) qui partage le plan des coefficients (q, p) en trois régions :

- si $4p^3 + 27q^2 > 0$ l'équation a une seule racine réelle
- si $4p^3 + 27q^2 = 0$ l'équation a trois racines réelles, dont une double
- si $4p^3 + 27q^2 < 0$ l'équation a trois racines réelles distinctes.

Nous ne détaillerons pas ici cette discussion des solutions réelles de l'équation. Elle peut s'effectuer à partir des formules explicites de résolution, ou par une étude détaillée des variations de f comme fonction de x ; la discussion du signe de f aux points critiques ($f'_x = 0$) est facilitée en observant que

$$4p^3 + 27q^2 = 27(2q - f)f \ , \text{ lorsque } f'_x = 0 \ .$$

Exercice 79. ***Asymptotique d'une équation du troisième degré.*** **Soit**

$$f(x, \varepsilon) = (x - a)(b - x) + \varepsilon x^3 \ ,$$

où a et b sont fixés avec $a < b$, et ε est un paramètre.

1. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x, \varepsilon) = 0$ a trois racines distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Donner un développement asymptotique de ces racines pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, arrêté en $O(\varepsilon^2)$.

[On pourra appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(x, \varepsilon) = (a, 0)$ ou $(b, 0)$.]

2.En déduire un développement asymptotique de l'intégrale elliptique

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{f(x, \varepsilon)}}$$

pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, arrêté en $O(\varepsilon^2)$.

[On pourra noter u, resp. v, la demi-somme, resp. la demi-différence, des deux premières racines et faire le changement de variable $x = u + v \sin t$.]

Commentaire. L'intégrale $\mathrm{I}(\varepsilon)$ a joué un rôle capital dans la Physique du XX[e] siècle ! Le terme en ε de son développement rend compte d'un déplacement du périhélie de Mercure de 43 secondes d'arc[6] par siècle, prévu par la théorie de la relativité générale. Ce phénomène, constaté depuis longtemps par l'observation, restait inexpliqué par la théorie classique de la gravitation de Newton (qui correspond à $\varepsilon = 0$). Il a constitué un test décisif en faveur de la relativité générale et « de loin la plus forte expérience émotionnelle de la vie scientifique d'Einstein, peut-être de toute sa vie », selon son biographe Abraham Pais[7].

Heuristique. Pour $\varepsilon = 0$ on a une banale équation du second degré, de racines a et b. On s'attend donc à avoir, pour ε petit, une racine x_1 proche de a et une autre x_2 proche de b. La troisième racine x_3 doit vérifier $x_1 + x_2 + x_3 = 1/\varepsilon$ (relations entre coefficients et racines d'un polynôme), d'où $x_3 \sim 1/\varepsilon$ pour $\varepsilon \to 0$; cette racine part donc à l'infini quand le degré tombe de 3 à 2.

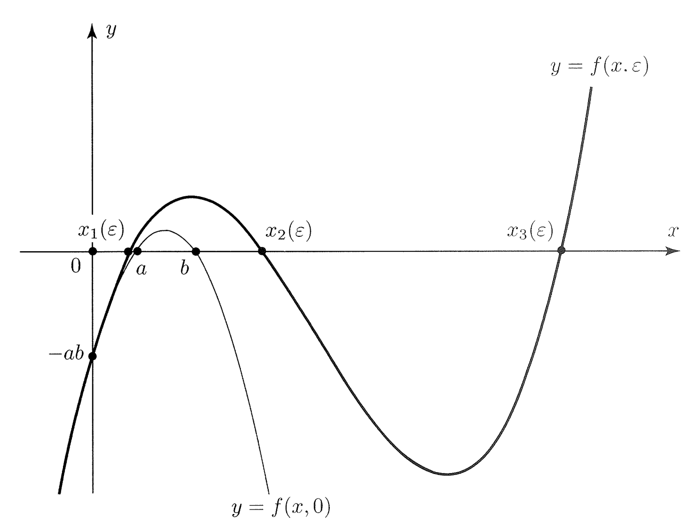


Fig. 108. Les polynômes $f(x,\varepsilon) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$.

Solution. 1. On a $f(a,0) = 0$ et

$$f'_x(x,\varepsilon) = a + b - 2x + 3\varepsilon x^2 \ ,$$

6. Un ballon de football vu à un kilomètre.

7. Abraham Pais, *'Subtle is the Lord...' the science and the life of Albert Einstein*, Oxford University Press 1982, p. 253.

d'où $f'_x(a,0) = b - a > 0$. Par le théorème des fonctions implicites avec point de départ $(a,0)$ il existe donc un voisinage V_1 de 0, un voisinage W_1 de a et une fonction $x_1 : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{W}_1$, de classe C^1, telle que

$$(\varepsilon \in \mathrm{V}_1, x \in \mathrm{W}_1 \text{ et } f(x,\varepsilon) = 0) \Longleftrightarrow (\varepsilon \in \mathrm{V}_1 \text{ et } x = x_1(\varepsilon)) \ .$$

On a ainsi isolé une racine proche de a. Par la version C^2 du théorème, x_1 est de classe C^2, ce qui permet d'écrire le développement limité pour $\varepsilon \to 0$

$$x_1(\varepsilon) = x_1(0) + x'_1(0)\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Or $x_1(0) = a$ et $x'_1(0)$ se calcule en dérivant en ε l'identité $f(x_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, ce qui donne

$$\left(a + b - 2x_1 + 3\varepsilon x_1^2\right) x'_1 + x_1^3 = 0$$

d'où, pour $\varepsilon = 0$, la dérivée $x'_1(0) = -a^3/(b-a)$. Il vient donc

$$x_1(\varepsilon) = a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ .$$

En permutant a et b on obtiendra de même, avec $(b,0)$ pour point de départ, des voisinages V_2 de 0 et W_2 de b et une fonction $x_2 : \mathrm{V}_2 \to \mathrm{W}_2$, donnant une racine proche de b, avec

$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Enfin on a $f(x,\varepsilon) = \varepsilon x^3 - x^2 + (a+b)x - ab$ et les relations entre coefficients et racines entraînent

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \ ,$$

d'où la troisième racine

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2 + ab + b^2)\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x,\varepsilon) = 0$ admet donc trois racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ admettant les développements asymptotiques ci-dessus.

2. Notons simplement x_1, x_2, x_3 les trois racines obtenues en 1. Il sera commode d'éliminer x_3 grâce à la somme des racines $1/\varepsilon$, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x,\varepsilon) &= \varepsilon(x - x_1)(x_2 - x)(x_3 - x) \\ &= (x - x_1)(x_2 - x)\left(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2)\right) \ , \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2)\right)^{-1/2}}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}} dx \ .$$

Pour ε assez petit on a $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$, ce qui assure la convergence de l'intégrale. Le changement de variable

$$x = u + v \sin t \text{ avec } u = \frac{x_1 + x_2}{2}, v = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

(inspiré du cas particulier $\varepsilon = 0$) conduit à

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \varepsilon(3u + v \sin t)\right)^{-1/2} dt \ .$$

Notons $y = 3u + v \sin t$ pour abréger. Les développements limités de 1, arrêtés au premier terme, donnent $x_1 = a + \mathrm{O}(\varepsilon)$, $x_2 = b + \mathrm{O}(\varepsilon)$ d'où

$$y = \frac{3}{2}(a + b) + \frac{b - a}{2} \sin t + r(t, \varepsilon) \ .$$

Comme $|\sin t| \leqslant 1$, le reste $r(t, \varepsilon)$ admet une majoration de la forme $|r(t, \varepsilon)| \leqslant \mathrm{C}\varepsilon$ pour ε petit et pour tout t, et y reste borné dans ces mêmes conditions. Pour développer l'intégrale on doit d'abord développer $(1 - \varepsilon y)^{-1/2}$ en contrôlant le reste. Or, par la formule de Taylor à l'ordre deux,

$$(1 - z)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} z + \alpha \frac{z^2}{2} \ ,$$

où l'on vérifie en majorant la dérivée seconde que (par exemple) $|\alpha| \leqslant 3\sqrt{2}$ si $|z| \leqslant 1/2$. Ainsi

$$(1 - \varepsilon y)^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} y + s(t, \varepsilon)$$

où le reste $s(t, \varepsilon)$ admet une majoration de la forme $|s(t, \varepsilon)| \leqslant \mathrm{C}\varepsilon^2$ pour ε petit et tout t. Ces majorations *uniformes en* t de $r(t, \varepsilon)$ et $s(t, \varepsilon)$ peuvent être intégrées, d'où

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{3}{4}(a + b)\varepsilon + \frac{b - a}{4} \varepsilon \sin t\right) dt + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ ,$$

et finalement

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \pi + \frac{3\pi}{4}(a + b)\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Exercice 80. ***Dérivées partielles et thermodynamique.*** **En thermodynamique des gaz les trois variables pression, volume et température sont liées**

par une « équation d'état » $f(p,v,t)=0$. Tout paramètre u du système physique (énergie interne, entropie, etc.) peut alors être considéré comme fonction de deux de ces trois variables, au choix. *Par abus de notation*, on note $u(p,v)$, $u(p,t)$ et $u(v,t)$ les trois fonctions obtenues. Mais pour éviter l'irrémédiable salade[8], les Physiciens notent $(\partial u/\partial p)_t$ la dérivée partielle de $u(p,t)$ par rapport à p, avec t fixé, et de même avec v ou p fixés.

On supposera toutes les fonctions de classe C^1 et les dérivées partielles de f non nulles.

1. En considérant d'abord l'exemple du « gaz parfait » : $f(p,v,t)=pv-t$, puis le cas général, établir la relation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_t-\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v=\frac{(\partial f/\partial p)}{(\partial f/\partial t)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p=-\frac{(\partial f/\partial p)}{(\partial f/\partial v)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p .$$

2. Vérifier que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_v=-1 .$$

Solution. 1. On suppose d'abord p,v,t strictement positifs, liés par la relation $pv=t$. Nous autres Mathématiciens sommes gens prudents : notons $u=u(p,v,t)$ et α,β,γ les trois fonctions qui s'en déduisent en remplaçant l'une des trois variables en fonction des deux autres, à savoir

$$\alpha(p,v)=u(p,v,pv)\ ,\ \beta(p,t)=u(p,t/p,t)\ ,\ \gamma(v,t)=u(t/v,v,t)\ .$$

En notant $\partial_1 u,\partial_2 u,\partial_3 u$ les dérivées partielles de u calculées au point (p,v,t) on a donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_t&=\frac{\partial\beta}{\partial p}=\partial_1 u-\frac{t}{p^2}\partial_2 u=\partial_1 u-\frac{v}{p}\partial_2 u\\
\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v&=\frac{\partial\alpha}{\partial p}=\partial_1 u+v\partial_3 u\\
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p&=\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{1}{p}\partial_2 u+\partial_3 u\\
\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p&=\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\partial_2 u+p\partial_3 u\ ,
\end{aligned}$$

8. Voir l'appendice C du livre de J.-M. Bony, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Éditions de l'École Polytechnique, 2000, où d'innocentes (?) manipulations de la loi d'Ohm permettent de démontrer que $1=2$ et même $5/3=4/3$...

d'où les relations

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_t - \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = -v\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p = -\frac{v}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p .$$

Les dérivées de u par rapport à la pression diffèrent en général, selon qu'on opère à température constante ou à volume constant ; un autre exemple de ce phénomène apparaît à l'Exercice 20 question 2.

Généralisation. Les dérivées partielles de f étant supposées non nulles, le théorème des fonctions implicites permet de résoudre l'équation $f(p, v, t) = 0$ sous l'une des trois formes

$$p = \pi(v, t) \text{ ou } v = \upsilon(p, t) \text{ ou } t = \tau(p, v) \ ,$$

où π, υ, τ sont les trois fonctions implicites, au voisinage d'un point (p_0, v_0, t_0) tel que $f(p_0, v_0, t_0) = 0$. En effectuant les calculs sur ce voisinage on a

$$\begin{aligned} \alpha(p, v) &= u(p, v, \tau(p, v)) \\ \beta(p, t) &= u(p, \upsilon(p, t), t) \\ \gamma(v, t) &= u(\pi(v, t), v, t) \end{aligned}$$

d'où, par dérivation de fonctions composées,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_t &= \frac{\partial \beta}{\partial p} = \partial_1 u + \partial_2 u \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v &= \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \partial_1 u + \partial_3 u \cdot \frac{\partial \tau}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p &= \frac{\partial \beta}{\partial t} = \partial_2 u \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \partial_3 u \\ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p &= \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \partial_2 u + \partial_3 u \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v} \ . \end{aligned}$$

Les dérivées partielles des trois fonctions implicites s'obtiennent à partir de

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \ ,$$

d'où

$$dt = -\frac{(\partial f/\partial p)}{(\partial f/\partial t)} dp - \frac{(\partial f/\partial v)}{(\partial f/\partial t)} dv$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = -\frac{(\partial f/\partial p)}{(\partial f/\partial t)} \ , \ \frac{\partial \tau}{\partial v} = -\frac{(\partial f/\partial v)}{(\partial f/\partial t)} \ ,$$

et de même pour les autres. Les égalités demandées s'en déduisent immédiatement.

2. On a de même

$$\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_v = \frac{\partial \tau}{\partial p} = -\frac{(\partial f/\partial p)}{(\partial f/\partial t)}$$

et, par permutation circulaire des variables,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t = -\frac{(\partial f/\partial v)}{(\partial f/\partial p)}\ ,\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p = -\frac{(\partial f/\partial t)}{(\partial f/\partial v)}\ .$$

Le produit de ces trois dérivées est -1.

Exercice 81. ***Variation du point fixe (bis).*** **On considère le système d'équations**

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1\ ,\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

aux inconnues x et y. On a vu à l'Exercice 57, par le théorème du point fixe, qu'elles admettent une unique solution $x = x(t)$, $y = y(t)$, fonctions continues de t sur $\mathbb{R}$.

1 Montrer par le théorème des fonctions implicites que ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

[On pourra vérifier que le déterminant jacobien utile est toujours supérieur à $1/2$.]

2. Donner un développement limité à l'ordre deux de $x(t)$ et $y(t)$ au point $x = y = 0$.

3. *Généralisation.* Soit $f : (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe k tel que, pour tous x, λ

$$\|D_x f(x,\lambda)\| \leqslant k < 1$$

(norme d'application linéaire associée à une norme sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que l'équation $f(x, \lambda) = x$ admet pour chaque λ une unique solution $x = x(\lambda)$, et que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$. Calculer $Dx(\lambda)$.

[On pourra appliquer le théorème du point fixe *et* celui des fonctions implicites.]

Solution. 1. Notons

$$F(x,y,t) = \left(x - \frac{1}{2}\sin(x+y) - t + 1, y - \frac{1}{2}\cos(x-y) + t - \frac{1}{2}\right)\ ,$$

application de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour résoudre en (x, y) l'équation $F(x, y, t) = 0$ par le théorème des fonctions implicites, prenons pour point

de départ $(x_0, y_0, t_0) = (x(t_0), y(t_0), t_0)$ donné, pour chaque t_0, par le théorème du point fixe, et calculons

$$\det \mathrm{D}_{x,y}\mathrm{F}(x,y,t) = \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\cos(x+y) & -\frac{1}{2}\cos(x+y) \\ \frac{1}{2}\sin(x-y) & 1 - \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \cos(x+y))(1 - \sin(x-y)) \; .$$

Ce déterminant est toujours supérieur ou égal à 1/2, et la version C^∞ du théorème des fonctions implicites s'applique au voisinage de (x_0, y_0, t_0). La fonction implicite $t \mapsto (x(t), y(t))$ coïncide (par unicité) avec la restriction à un voisinage de t_0 du $(x(t), y(t))$ précédemment obtenu. Celui-ci est donc fonction C^∞ de t au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

2. On voit immédiatement que $x(t) = y(t) = 0$ si et seulement si $t = 1$. Les fonctions x et y admettent des développements limités à l'ordre deux en $t = 1$, que l'on peut obtenir en calculant $x'(1)$, $y'(1)$ puis $x''(1)$, $y''(1)$ par dérivation de l'identité $\mathrm{F}(x(t), y(t), t) = 0$.

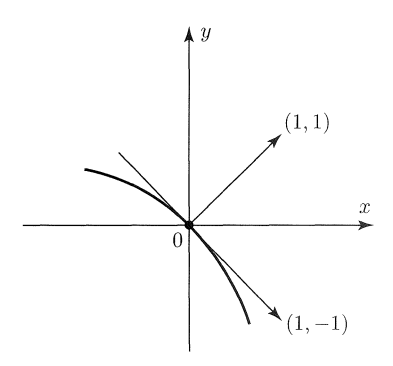


Fig. 109. Aspect local de $(x(t), y(t))$ pour t voisin de 1.

On peut procéder aussi par identification, ou directement comme suit. Soit $h = t - 1$. Comme $x(1) = y(1) = 0$ on a $x = \mathrm{O}(h)$ et $y = \mathrm{O}(h)$ pour $h \to 0$, d'où

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + h = \frac{x+y}{2} + h + \mathrm{O}(h^3)$$
$$y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2} - h = -h - \frac{(x-y)^2}{4} + \mathrm{O}(h^4) \; .$$

La première équation donne $x - y = 2h + \mathrm{O}(h^3)$ d'où, en reportant dans la seconde,

$$y = -h - h^2 + \mathrm{O}(h^4)$$

et enfin

$$x = h - h^2 + \mathrm{O}(h^3) \ .$$

Ainsi $(x,y) = h(1,-1) - h^2(1,1) + \mathrm{O}(h^3)$, d'où l'aspect local de l'arc paramétré $(x(t),y(t))$ (cf. Exercice 104)

3. Par l'inégalité de la moyenne on a

$$\|f(x,\lambda) - f(y,\lambda)\| \leqslant k\,\|x-y\| \ ,$$

et le *théorème du point fixe* montre que l'équation $f(x,\lambda) = x$ a, pour chaque λ, une solution unique $x = x(\lambda)$. L'application f étant uniformément contractante en x, ce point fixe est fonction continue de λ (Exercice 57) ; mais on a mieux ici.

Le *théorème des fonctions implicites* s'applique à l'équation $x - f(x,\lambda) = 0$ au voisinage d'un point de départ $(x(\lambda_0),\lambda_0)$, car

$$\mathrm{D}_x(x - f(x,\lambda)) = \mathrm{I} - \mathrm{D}_x f(x,\lambda)$$

est une matrice $n \times n$ inversible, d'après l'hypothèse sur f et l'Exercice 16 question 1. La fonction implicite ainsi obtenue est de classe C^1 et coïncide (par unicité) avec la restriction à un voisinage de λ_0 du $x(\lambda)$ précédent. Ce dernier est donc de classe C^1 partout, et $\mathrm{D}x(\lambda)$ s'obtient en différentiant en λ l'identité $x(\lambda) = f(x(\lambda),\lambda)$, d'où

$$\mathrm{D}x(\lambda) = \mathrm{D}_x f(x(\lambda),\lambda) \circ \mathrm{D}x(\lambda) + \mathrm{D}_\lambda f(x(\lambda),\lambda) \ ,$$

ou encore

$$\mathrm{D}x(\lambda) = (\mathrm{I} - \mathrm{D}_x f(x(\lambda),\lambda))^{-1} \circ \mathrm{D}_\lambda f(x(\lambda),\lambda) \ .$$

Exercice 82. ***Deux équations, deux inconnues (bis).*** **Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 : $\varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. On considère le système d'équations**

$$f(x,y) = u \ , \ g(x,y) = v \qquad \text{(S)}$$

aux inconnues x, y, pour u, v donnés. On suppose la différentielle $\mathrm{D}\varphi(x,y)$ de rang un en tout point $(x,y) \in \mathrm{U}$.

Montrer qu'on peut (par exemple) résoudre localement la première équation sous la forme $x = h(y,u)$, et que $g(h(y,u),y)$ ne dépend pas de y.

Qu'en déduit-on pour le système (S) ?

Commentaire. On reprend ici l'Exercice 67 dans le cas (instructif) du rang un, en utilisant une vieille recette de résolution d'un système d'équations : tirer une inconnue de la première et la reporter dans la seconde.

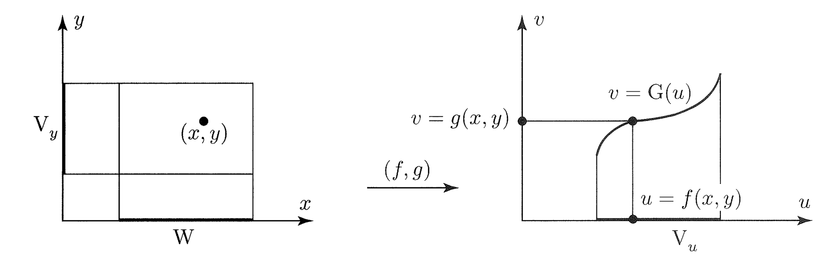


Fig. 110. Quand sa jacobienne est de rang un partout, l'application (f, g) transforme un rectangle en un arc de courbe.

Solution. La matrice

$$\mathrm{D}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

étant de rang un en tout point, l'un au moins de ses quatre éléments n'est pas identiquement nul. Supposons par exemple, quitte à restreindre l'ouvert U, que f'_x ne s'annule pas sur U.

Soient alors $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ et $u_0 = f(x_0, y_0)$. Le théorème des fonctions implicites avec point de départ (x_0, y_0, u_0) donne un voisinage V de (y_0, u_0) et un voisinage W de x_0 tels que

$$((y,u) \in \mathrm{V}, x \in \mathrm{W} \text{ et } f(x,y) - u = 0) \Longleftrightarrow ((y,u) \in \mathrm{V} \text{ et } x = h(y,u)) \ ,$$

où la fonction implicite $h : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est de classe C^1.

Pour la fonction composée $(y,u) \mapsto g(h(y,u), y)$ on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(g(h(y,u),y)) = g'_x h'_y + g'_y \ ,$$

où la dérivée de la fonction implicite est donnée par

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\,(f(h(y,u),y) - u) = f'_x h'_y + f'_y \ .$$

Par suite $h'_y = -f'_y / f'_x$ et

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(g(h(y,u),y)) = \frac{1}{f'_x}\left(f'_x g'_y - f'_y g'_x\right) = \frac{1}{f'_x} \det \mathrm{D}\varphi \,;$$

toutes ces dérivées sont prises en $x = h(y,u)$ et y. Sous l'hypothèse de rang un on a $\det \mathrm{D}\varphi = 0$, donc $g(h(y,u),y)$ ne dépend pas de la variable y ; notons $\mathrm{G}(u)$ cette fonction.

On peut supposer le voisinage V rectangulaire, de la forme $\mathrm{V} = \mathrm{V}_y \times \mathrm{V}_u$, produit de deux voisinages de y_0 et u_0 respectivement. Alors G est de classe C^1 sur V_u et on a

$$\left(\begin{array}{c} y \in \mathrm{V}_y, u \in \mathrm{V}_u, x \in \mathrm{W} \\ f(x,y) = u, g(x,y) = v \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} y \in \mathrm{V}_y, u \in \mathrm{V}_u \\ x = h(y,u), \mathrm{G}(u) = v \end{array}\right) .$$

Le système (S) admet donc des solutions (sur ces ouverts) si et seulement si u et v sont liés par la relation $\mathrm{G}(u) = v$. Il y a alors une infinité de solutions, y étant arbitraire. On retrouve le résultat de l'Exercice 67 question 3.

Exercice 83. ***Fonctions implicites, approche élémentaire.*** **Soient U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application** ***continue*** **de U dans $\mathbb{R}$, admettant sur U une** ***dérivée partielle f'_y continue en*** **$(0,0)$. On suppose $f(0,0) = 0$ (pour simplifier les notations) et $f'_y(0,0) \neq 0$.**

1. Montrer qu'il existe un voisinage rectangulaire $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ de $(0,0)$, contenu dans U, et une unique fonction $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ tels que

$$(x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{W} \text{ et } f(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x \in \mathrm{V} \text{ et } y = \varphi(x)) .$$

[On pourra étudier les variations de la fonction $y \mapsto f(x,y)$ pour x voisin de 0.]

2. Montrer que φ est continue sur V.

[On pourra montrer d'abord la continuité en $x = 0$.]

Commentaire. L'existence de la fonction implicite s'obtient ici simplement par le théorème de la valeur intermédiaire (basé sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$), au lieu du théorème du point fixe utilisé en dimension plus grande (Exercice 86). Noter que l'hypothèse sur f est ici plus faible que celle du Théorème 5.7 – mais ne permet d'établir que la continuité de la fonction implicite.

Solution. 1. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f'_y(0,0) > 0$. La continuité de f'_y à l'origine donne un premier voisinage rectangulaire $\mathrm{V}_0 \times \mathrm{W}$ contenu dans U, avec $\mathrm{V}_0 = [-\alpha_0, \alpha_0]$, $\mathrm{W} = [-\beta, \beta]$, sur lequel f'_y reste strictement positif. Pour x fixé dans V_0, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ croît donc strictement sur chaque verticale lorsque y varie de $-\beta$ à β.

En particulier $f(0,-\beta) < f(0,0) = 0 < f(0,\beta)$, et la continuité de f en sa première variable entraîne l'existence d'un voisinage $\mathrm{V} = [-\alpha, \alpha]$ de 0 (contenu dans V) tel que

$$f(x,-\beta) < 0 < f(x,\beta)$$

pour tout $x \in \mathrm{V}$. La continuité de f en sa deuxième variable permet alors d'appliquer le théorème de la valeur intermédiaire d'où, pour chaque $x \in \mathrm{V}$, un unique $y \in \mathrm{W}$, noté $y = \varphi(x)$, tel que $f(x,y) = 0$.

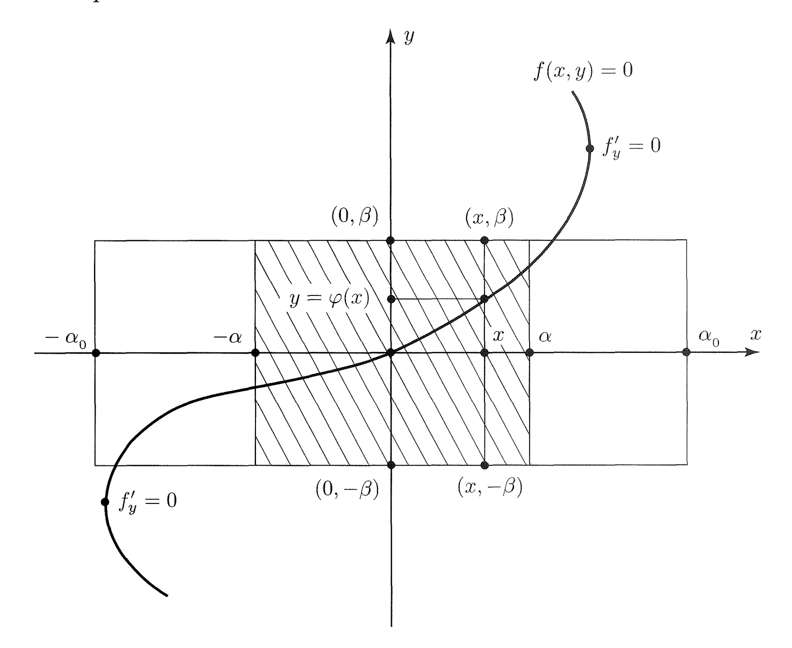


Fig. 111. Preuve élémentaire du théorème des fonctions implicites.

2. Comme $f(0,0) = 0$ on a $\varphi(0) = 0$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon \leqslant \beta$. On peut remplacer β par ε dans le raisonnement de 1, α sera remplacé par η tel que $0 < \eta \leqslant \alpha$, et la résolution du problème dans le rectangle $|x| \leqslant \eta$, $|y| \leqslant \varepsilon$ donne une fonction implicite, qui n'est autre (par unicité) que la restriction de φ à $[-\eta, \eta]$. On a ainsi

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour } |x| \leqslant \eta \ ,$$

et φ est continue en $x = 0$.

On peut reprendre cet argument en remplaçant le point $(0,0)$ par tout point (x_0, y_0) intérieur à $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ et tel que $f(x_0, y_0) = 0$, puisque $f'_y(x_0, y_0) > 0$. À nouveau la fonction implicite ainsi obtenue coïncidera avec φ au voisinage de x_0, d'où la continuité de φ en x_0.

Remarque. Pour montrer que φ est de classe C^1 il faudrait ensuite procéder comme à l'Exercice 86, en supposant f'_x et f'_y continues sur U.

Exercice 84. ***Fonctions implicites et Cauchy-Lipschitz.*** **Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, et (a, b) un point tel que $f(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) \neq 0$.**

Expliquer le lien entre la recherche d'une fonction implicite $y = \varphi(x)$ telle que $f(x, y) = 0$ et la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \ , \ y(a) = b \ .$$

Commentaire. Ce raisonnement, dû à Cauchy (Augustin-Louis), a fourni la première preuve du théorème des fonctions implicites (1839), basée sur le théorème de Cauchy-Lipschitz (Exercice 60). On pourrait objecter que Lipschitz (Rudolf Otto Sigismond) étant né en 1832, il y a peut-être là quelque anachronisme... De fait, le théorème dit « de Cauchy-Lipschitz » est dû à Cauchy (vers 1820) dans le cas de classe C^1 et fut retrouvé par Lipschitz, qui l'étendit au cas « localement lipschitzien », en 1868. Voir Dieudonné [53] p. 317 et 323.

Solution. Notons V et W des voisinages ouverts de a et b respectivement, tels que $f'_y(x,y) \neq 0$ pour $x \in \mathrm{V}$ et $y \in \mathrm{W}$.

Si une fonction $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est dérivable et vérifie $\varphi(a) = b$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{V}$, alors nécessairement

$$f'_x(x,\varphi(x)) + f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

et $y = \varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle proposée.

Réciproquement, la fonction $(x,y) \mapsto -(f'_x/f'_y)(x,y)$ étant de classe C^1 sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne une solution maximale unique $y = \varphi(x)$ de l'équation différentielle (avec $\varphi(a) = b$), définie sur un intervalle ouvert V' contenant a, contenu dans V, et à valeurs dans W. Comme

$$\frac{d}{dx}(f(x,\varphi(x)) = f'_x(x,\varphi(x)) + f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0\ ,$$

on a $f(x,\varphi(x)) = f(a,b) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{V}'$; autrement dit f est une *intégrale première* de l'équation (Exercice 23).

Il y a donc une unique fonction implicite dérivable au voisinage du point (a,b).

Remarque. Le cas particulier $f(x,y) = x - g(y)$ conduirait de même à une preuve du théorème d'inversion locale (de g) en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)}\ ,$$

d'où l'existence de la solution $y = g^{-1}(x)$.

Exercice 85. *Équation de Burgers.* Étant données deux fonctions $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, on veut résoudre l'équation aux dérivées partielles de Burgers en la fonction inconnue $u(x,y)$:

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ,\ \text{avec } u(x,0) = f(x)\ .$$

1. Résoudre le *système différentiel caractéristique* :

$$\frac{dx}{dt} = a(z)\ ,\ \frac{dy}{dt} = 1\ ,\ \frac{dz}{dt} = 0\ ,$$

avec les données initiales

$$\boldsymbol{x(0) = s \ , \ y(0) = 0 \ , \ z(0) = f(s) \ ,}$$

où s est un paramètre.

2. Déduire de 1 une relation entre x, y et z indépendante de s et t. Montrer que cette relation définit (localement) z fonction implicite de (x, y), soit $z = u(x, y)$, et que cette fonction est solution de l'équation de Burgers.

3. *Exemple.* Calculer u lorsque $a(u) = u$ et $f(x) = 1 - x$.

Commentaire. Cette *méthode du système différentiel caractéristique*, qui peut sembler bien mystérieuse, se comprendra mieux dans le cadre général des *équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du premier ordre* :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u) \ ,$$

où les a_i et b sont données et u est une fonction inconnue de $x = (x_1, \dots, x_n)$. Une telle équation exprime que le vecteur $(a_1, \dots, a_n, b)$ est tangent au graphe de la fonction u, d'équation $z = u(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Plus généralement, supposons cette hypersurface définie implicitement par une équation de la forme $\mathrm{F}(x_1, \dots, x_n, z) = 0$. Comme $\partial u/\partial x_i = -(\partial \mathrm{F}/\partial x_i)/(\partial \mathrm{F}/\partial z)$ (calcul des dérivées d'une fonction implicite), l'équation précédente s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, z) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x, z) + b(x, z) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x, z) = 0 \ .$$

C'est maintenant une équation aux dérivées partielles *linéaire* en F, à $(n + 1)$ variables. On reconnaît l'équation aux intégrales premières (Exercice 23) du système différentiel caractéristique :

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x, z) \ , \ \frac{dz}{dt} = b(x, z)$$

dans $\mathbb{R}^{n+1}$, associé à l'équation quasi-linéaire.

Ces remarques suggèrent la méthode suivante :

– résoudre le système différentiel caractéristique sous la forme $x_1 = x_1(t)$,..., $x_n = x_n(t)$, $z = z(t)$;

– éliminer t entre ces relations pour obtenir une intégrale première $\mathrm{F}(x_1, \dots, x_n, z)$;

– si l'équation $\mathrm{F}(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ définit implicitement $z = u(x_1, \dots, x_n)$, alors u est solution de l'équation quasi-linéaire donnée.

Pour approfondir cette méthode, voir Cartan [8] p. 166, Courant et Hilbert [12] chapitre II. On l'applique ici avec $n = 2$, $a_1 = a(u)$, $a_2 = 1$ et $b = 0$; la donnée initiale choisie pour le système différentiel tient compte de celle de l'équation aux dérivées partielles, à savoir $u(s, 0) = f(s)$.

L'équation de Burgers proprement dite, qui correspond à $a(u) = u$, se rencontre en mécanique des fluides avec x pour variable d'espace et y pour variable de temps[9].

Solution. 1. Les variables y et z s'obtiennent immédiatement, d'où x :

$$x = ta(f(s)) + s \ , \ y = t \ , \ z = f(s) \ .$$

Pour chaque s fixé la courbe intégrale $t \mapsto (x, y, z)$ est une droite horizontale.

2. Il s'agit d'*éliminer* les variables s et t entre les trois relations précédentes, ce qui n'offre aucune difficulté : ces relations entraînent $s = x - ta(f(s)) = x - ya(z)$, d'où $z = f(s) = f(x - ya(z))$. La fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z) = z - f(x - ya(z))$$

est une *intégrale première* du système différentiel caractéristique.

Pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$ on a évidemment $\mathrm{F}(x_0, 0, f(x_0)) = 0$; de plus

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = 1 + f'(x - ya(z))\, ya'(z) \ , \text{ d'où } \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x_0, 0, f(x_0)) = 1 \ .$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc à l'équation $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ au voisinage du point $(x_0, 0, f(x_0))$, et donne une fonction implicite $z = u(x, y)$, de classe C^1 au voisinage de $(x_0, 0)$. Les dérivées partielles de u s'obtiennent, comme toujours, en dérivant en x et y la relation $\mathrm{F}(x, y, u(x, y)) = 0$. Comme

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = -f'(x - ya(z)) \ , \ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = f'(x - ya(z))\, a(z)$$

on a

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{(\partial \mathrm{F}/\partial z)(x, y, u)} \left(a(u)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, y, u) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x, y, u) \right) = 0 \ .$$

Enfin par construction u vérifie l'égalité $\mathrm{F}(x, 0, u(x, 0)) = 0$, qui s'écrit $u(x, 0) = f(x)$, et la fonction u est bien une solution du problème posé sur le voisinage considéré de $(x_0, 0)$.

3. On a ici

$$\mathrm{F}(x, y, z) = z - (1 - (x - yz)) = (1 - y)z - (1 - x) \ ,$$

9. L'équation étudiée ici intervient aussi dans la modélisation du trafic routier : voir A. Lichnewsky, *Modélisation mathématique : un autre regard*, Springer 2002, p.59 sq.

d'où la solution

$$u(x,y) = \frac{1-x}{1-y} ,$$

sur l'ouvert $x \in \mathbb{R}$, $y < 1$.

Exercice 86. ***Point fixe et fonctions implicites.*** **Soient U un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose $f(0,0) = 0$ (pour simplifier les notations) et $D_y f(0,0)$ *inversible.* On veut montrer le théorème des fonctions implicites : il existe $r > 0$, $s > 0$ et une unique application $\varphi : \overline{B}_r \to \overline{B}_s$ (boules fermées de centre 0, de rayons r et s dans les espaces normés $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement), tels que**

$$\left(x \in \overline{B}_r, y \in \overline{B}_s \text{ et } f(x,y) = 0\right) \iff \left(x \in \overline{B}_r \text{ et } y = \varphi(x)\right) .$$

De plus φ est de classe C^1 sur la boule ouverte B_r.

Pour $(x,y) \in U$ on note

$$F(y) = y - D_y f(0,0)^{-1} f(x,y) .$$

Dans les questions 1 à 3, x sera *fixé.* Soit ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que

$$\|DF(y)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour } \|x\| \leqslant r \text{ et } \|y\| \leqslant s .$$

2. En diminuant r si nécessaire, montrer que $F(\overline{B}_s) \subset \overline{B}_s$ pour $x \in \overline{B}_r$.

[On pourra écrire $F(y) = F(0) + (F(y) - F(0))$.]

3. Conclure par le théorème du point fixe.

4. Montrer que la fonction implicite φ est continue, et même lipschitzienne, sur $\overline{B}_r$.

[On pourra reprendre la méthode du point fixe avec paramètre de l'Exercice 57.]

5. Montrer que φ est différentiable, puis de classe C^1, sur la boule ouverte B_r.

[On pourra montrer d'abord que $D_y f(x,y)$ est inversible (cf. 1), puis utiliser la différentiabilité de f et 4.]

Commentaire. Cette preuve du théorème des fonctions implicites, ramené à un problème de point fixe $F(y) = y$, répète à peu de chose près celle du théorème d'inversion locale donnée à l'Exercice 71 (à l'échange près des notations x et y : on résout en x l'équation $f(x) = y$ d'un côté, et en y l'équation $f(x,y) = 0$ de l'autre !). Ici encore le choix de F dans l'énoncé donne $DF(0) = 0$ si $x = 0$, la norme $\|DF(y)\|$ reste donc petite pour x et y voisins de 0 et la convergence des itérés $y_{n+1} = F(y_n)$ vers la solution $y = \varphi(x)$ est rapide.

On pourra revoir à l'Exercice 49 l'heuristique de la méthode de Newton, qui aurait consisté ici à itérer l'application $F(y) = y - D_y f(x,y)^{-1} f(x,y)$, un peu plus compliquée. La figure (en dimension un) montre la différence entre les deux méthodes : pour construire y_{n+1}, on trace ici par le point $(y_n, f(x,y_n))$ du graphe de $f(x,y)$ (à x fixé) la parallèle à la tangente à l'origine au graphe de $f(0,y)$, qui coupe l'axe des y en $y_{n+1} = F(y_n)$; dans la méthode de Newton, on aurait utilisé la tangente au graphe de $f(x,y)$.

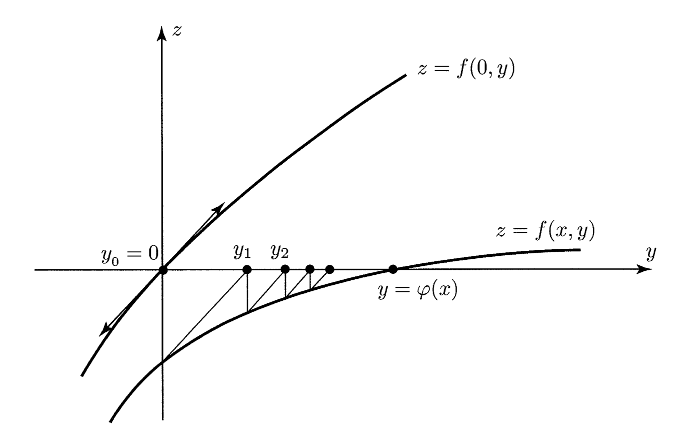


Fig. 112. Preuve du théorème des fonctions implicites : $y = \varphi(x)$ est limite de la suite $y_{n+1} = F(y_n)$.

Solution. 1. Pour x fixé et $(x,y) \in U$ on a

$$DF(y) = I - D_y f(0,0)^{-1} \circ D_y f(x,y)$$

où $\circ$ désigne la composition des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même et I est l'identité. Le second membre est fonction continue de (x,y) sur U, nulle en $(x,y) = (0,0)$. Par suite il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que

$$\|DF(y)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour } \|x\| \leqslant r \text{ et } \|y\| \leqslant s\,;$$

on choisit r et s assez petits pour que ces (x,y) soient dans U.

2. Pour $\|x\| \leqslant r$ et $\|y\| \leqslant s$ on a

$$\begin{aligned}\|F(y)\| &\leqslant \|F(0)\| + \|F(y) - F(0)\| \\ &\leqslant \left\|D_y f(0,0)^{-1} f(x,0)\right\| + \varepsilon\,\|y\|\end{aligned}$$

par 1 et l'inégalité de la moyenne. Comme $f(0,0) = 0$ on peut supposer, quitte à diminuer r, que le premier terme du second membre est inférieur à $(1-\varepsilon)s$ pour $\|x\| \leqslant r$, d'où

$$\|F(y)\| \leqslant (1-\varepsilon)s + \varepsilon s = s\ .$$

Ainsi $x \in \overline{\mathrm{B}}_r$ entraîne $\mathrm{F}(\overline{\mathrm{B}}_s) \subset \overline{\mathrm{B}}_s$.

3. D'après 1 et 2, F est contractante de $\overline{\mathrm{B}}_s$ dans elle-même si $\|x\| \leqslant r$. Comme $\overline{\mathrm{B}}_s$ est complète, le théorème du point fixe montre que F admet dans $\overline{\mathrm{B}}_s$ un point fixe unique, noté $y = \varphi(x)$, limite de la suite récurrente $y_{n+1} = \mathrm{F}(y_n)$ avec (par exemple) $y_0 = 0$. Comme $\mathrm{F}(y) = y$ équivaut à $f(x, y) = 0$, on a établi que

$$\left(x \in \overline{\mathrm{B}}_r, y \in \overline{\mathrm{B}}_s \text{ et } f(x,y) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(x \in \overline{\mathrm{B}}_r \text{ et } y = \varphi(x)\right) .$$

4. Il est utile ici de faire figurer le paramètre x (ce qu'on avait évité jusqu'à présent), en notant

$$\mathrm{F}(x, y) = y - \mathrm{D}_y f(0,0)^{-1} f(x, y) .$$

Pour $x, x_0 \in \overline{\mathrm{B}}_r$ et $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$ on a

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \mathrm{F}(x, y) - \mathrm{F}(x_0, y_0) \\ &= (\mathrm{F}(x, y) - \mathrm{F}(x, y_0)) + (\mathrm{F}(x, y_0) - \mathrm{F}(x_0, y_0)) \\ &= (\mathrm{F}(x, y) - \mathrm{F}(x, y_0)) - \mathrm{D}_y f(0,0)^{-1} \left(f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\right) . \end{aligned}$$

Or $\|\mathrm{F}(x, y) - \mathrm{F}(x, y_0)\| \leqslant \varepsilon \|y - y_0\|$ d'après 1 et l'inégalité de la moyenne, et

$$\|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leqslant \mathrm{M} \|x - x_0\| ,$$

où $\mathrm{M} = \max_{\|x\| \leqslant r} \|\mathrm{D}_x f(x, y_0)\|$. Il vient donc

$$\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon \|y - y_0\| + \mathrm{C} \|x - x_0\| ,$$

avec $\mathrm{C} = \mathrm{M} \left\|\mathrm{D}_y f(0,0)^{-1}\right\|$, c'est-à-dire

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1 - \varepsilon} \|x - x_0\| ,$$

et φ est lipschitzienne sur $\overline{\mathrm{B}}_r$.

5. Pour $\|x\| \leqslant r$ et $\|y\| \leqslant s$ on a d'après 1

$$\left\|\mathrm{I} - \mathrm{D}_y f(0,0)^{-1} \circ \mathrm{D}_y f(x, y)\right\| \leqslant \varepsilon < 1 .$$

Comme à l'Exercice 71 question 6 on en déduit que $\mathrm{D}_y f(x, y)$ est inversible.

Soient $x, x_0 \in \mathrm{B}_r$ et $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. La différentiabilité de f en (x_0, y_0) permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \mathrm{D}_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + \mathrm{R} , \end{aligned}$$

où pour tout $\eta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \alpha$ et $\|y - y_0\| \leqslant \alpha$ entraînent

$$\|\mathrm{R}\| \leqslant \eta\,(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|)\ .$$

D'après 4 on a $\|y - y_0\| \leqslant \mathrm{C}'\,\|x - x_0\|$, où C' est une constante, d'où

$$\|\mathrm{R}\| \leqslant \eta(1 + \mathrm{C}')\,\|x - x_0\| \text{ si } \|x - x_0\| \leqslant \min(\alpha, \alpha/\mathrm{C}')\ .$$

Par suite

$$\mathrm{D}_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = -\mathrm{D}_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)\ ,$$

et

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \varphi(x) - \varphi(x_0) \\ &= -\mathrm{D}_y f(x_0, y_0)^{-1} \circ \mathrm{D}_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)\ , \end{aligned}$$

ce qui établit la différentiabilité de φ en x_0.

Enfin la différentielle

$$\mathrm{D}\varphi(x) = -\mathrm{D}_y f(x, \varphi(x))^{-1} \circ \mathrm{D}_x f(x, \varphi(x))$$

est continue sur B_r, comme composition d'applications continues (voir l'Exercice 16 pour le passage à l'inverse d'une matrice).

Exercice 87. ***Développements de l'anomalie excentrique.* En Mécanique Céleste les *lois de Kepler* enseignent que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un foyer S, et sont décrites selon la *loi des aires* $r^2 d\theta/dt = \mathrm{C}$ (constante), où r et θ sont des coordonnées polaires d'origine S, et t est le temps.**

On note $x = a\cos v$, $y = b\sin v$ (avec $a \geqslant b > 0$) une représentation paramétrique de l'ellipse (avec origine en son centre 0), $c = \mathrm{OS} = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $\varepsilon = c/a$ l'*excentricité* de l'ellipse ; on a $\varepsilon = 0$ pour un cercle. Le paramètre v est baptisé *anomalie excentrique* par les Célestes Mécaniciens.

1. Montrer que, par un choix convenable de l'origine et de l'unité de temps, la loi des aires équivaut à la relation

$$v - \varepsilon \sin v = t\ ,$$

appelée *équation de Kepler*.

2. Montrer que l'équation de Kepler définit implicitement v fonction C^∞ de (t, ε) sur $\mathbb{R}\times]-1, 1[$, et que $v - t$ est 2π-périodique par rapport à la variable t.

3. Montrer par récurrence que, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\sin^n v\,\frac{\partial v}{\partial t}\right)\ .$$

4. En déduire le développement en série

$$v = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (\sin^n t) \ ,$$

convergent pour $t \in \mathbb{R}$ et $|\varepsilon| < e^{-1}$.

[On pourra utiliser la version holomorphe du théorème des fonctions implicites, et linéariser $\sin^n t$ pour majorer les termes de la série par $n^{n-1}|\varepsilon|^n/n!$]

5. On note J_n la n-ième *fonction de Bessel*, définie par l'égalité

$$e^{ix \sin v} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{inv} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ v \in \mathbb{R} \ .$$

Montrer que l'équation de Kepler peut être résolue sous forme de série de Fourier

$$v = t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin nt \ ,$$

convergente pour $t \in \mathbb{R}$ et $|\varepsilon| < 1$.

[Pour calculer les coefficients de Fourier de $v - t$, on pourra intégrer par parties, et prendre v pour variable ; noter que $v - t$ est fonction impaire de t.]

Commentaires. L'équation de Kepler, relation simple (mais non triviale) entre v et t, fait de l'anomalie excentrique un paramètre commode pour définir la position d'une planète sur sa trajectoire.

La première méthode de résolution, par développement selon les puissances de l'excentricité ε, est motivée par la petitesse des valeurs de ε en pratique : $\varepsilon = 0,0167$ pour la Terre, $\varepsilon = 0,0068$ pour Vénus, dont les orbites autour du Soleil sont presque circulaires.

Le mouvement des planètes étant périodique, il est par ailleurs naturel d'utiliser des séries de Fourier en la variable t, d'où la deuxième méthode de résolution, due à Bessel (qui introduisit dans ce but les fonctions qui portent son nom).

Les calculs des questions 3 et 4 s'étendent aux équations de la forme

$$v = t + u\, f(v) \ ,$$

où t, u sont des paramètres et v l'inconnue, et conduisent, si la fonction donnée f est holomorphe au voisinage de l'origine, à la *formule d'inversion de Lagrange*

$$v = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (f(t))^n$$

(Valiron [39] p. 97, et aussi Candelpergher [6] p. 74, Dieudonné [17] p. 250).

Solution. 1. En plaçant l'origine en S, les coordonnées cartésiennes d'un point de l'ellipse sont

$$(x-c, y) = (a\cos v - c, b\sin v)$$

d'où, en notant C la constante des aires,

$$\begin{aligned} \mathrm{C} = r^2\frac{d\theta}{dt} &= (x-c)\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \\ &= (a\cos v - c)b\cos v\frac{dv}{dt} + ab\sin^2 v\frac{dv}{dt} \\ &= ab(1-\varepsilon\cos v)\frac{dv}{dt} \ . \end{aligned}$$

En intégrant, cela équivaut à

$$v - \varepsilon\sin v = \frac{\mathrm{C}}{ab}(t-t_0) \ ,$$

où t_0 est une constante, que l'on peut supposer nulle en choisissant convenablement l'origine des temps : $t = t_0$ donne $v = 0$, passage de la planète au *périhélie*[10]. On peut enfin choisir l'unité de temps, i.e. multiplier t par une constante, pour obtenir simplement

$$v - \varepsilon\sin v = t \ .$$

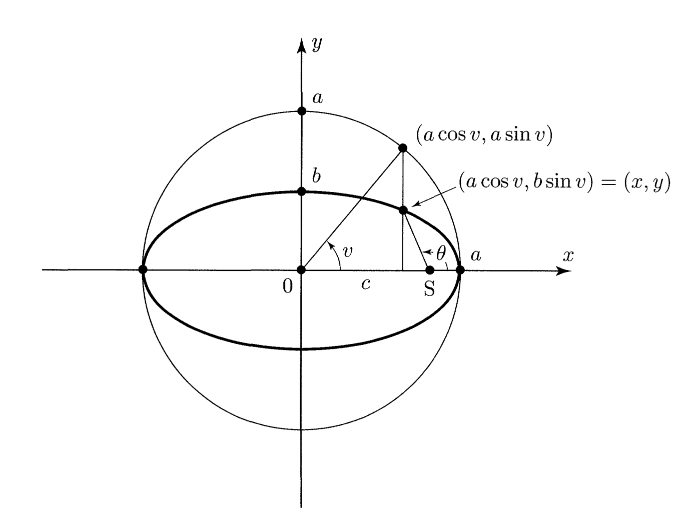


Fig. 113. Ellipse de Kepler et anomalie excentrique v.

10. Point le plus proche du Soleil, comme son nom l'indique ; le passage au périhélie a lieu début janvier pour notre bonne vieille Terre.

2. Pour $|\varepsilon| < 1$ la fonction $v \mapsto v - \varepsilon \sin v$, de dérivée $1 - \varepsilon \cos v > 0$, est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation de Kepler possède donc une solution unique $v = v(t, \varepsilon)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]-1, 1[$.

L'unicité de cette solution entraîne

$$v(t + 2\pi, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + 2\pi \,;$$

la fonction $t \mapsto v(t, \varepsilon) - t$ est donc 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, ainsi que le mouvement de la planète $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Enfin le théorème des fonctions implicites (version C^∞) est applicable au voisinage de chaque point $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 \in]-1, 1[$, $v_0 = v(t_0, \varepsilon_0)$, puisque

$$\frac{\partial}{\partial v}(v - \varepsilon \sin v - t) = 1 - \varepsilon \cos v > 0 \,.$$

Il donne une fonction implicite $v = \varphi(t, \varepsilon)$, de classe C^∞ au voisinage de (t_0, ε_0), qui coïncide (par unicité) avec la restriction de $v(t, \varepsilon)$ à ce voisinage. La fonction $(t, \varepsilon) \mapsto v(t, \varepsilon)$ est donc C^∞ sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ tout entier.

3. En différentiant l'équation $v - \varepsilon \sin v = t$ on obtient

$$dv - \varepsilon \cos v \, dv - \sin v \, d\varepsilon = dt$$

d'où les dérivées de la fonction implicite

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{\sin v}{1 - \varepsilon \cos v} \,, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos v} \,.$$

Par suite

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \sin v \, \frac{\partial v}{\partial t} \,,$$

ce qui est la relation demandée pour $n = 1$.

Supposons maintenant que, pour une valeur $n \geqslant 1$,

$$\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\sin^n v \, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \,.$$

Les fonctions considérées sont de classe C^∞, on peut donc permuter librement les dérivations par rapport à t et ε (théorème de Schwarz 6.1). Il vient

$$\frac{\partial^{n+1} v}{\partial \varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sin^n v \, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \,.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sin^n v \, \frac{\partial v}{\partial t} \right) &= \sin^n v \, \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon \partial t} + n \sin^{n-1} v \, \cos v \, \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^n v \, \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \,, \end{aligned}$$

puisque les variables t et ε jouent des rôles symétriques dans l'expression obtenue. En y reportant la relation $(\partial v/\partial\varepsilon) = \sin v(\partial v/\partial t)$ du cas $n = 1$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sin^n v\,\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin^{n+1} v\,\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

d'où finalement

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial\varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\sin^{n+1} v\,\frac{\partial v}{\partial t}\right) ,$$

ce qui est la relation demandée au rang $n+1$. Le résultat est donc établi par récurrence.

4. *Fixons t réel.* D'après la version holomorphe du théorème des fonctions implicites, avec le point de départ $\varepsilon = 0$ et $v = t$, l'équation de Kepler définit $v = v(\varepsilon)$, fonction holomorphe de la variable complexe ε dans un certain disque $|\varepsilon| < \mathrm{R}$; en effet

$$\frac{\partial}{\partial v}(v - \varepsilon\sin v - t) = 1 \text{ pour } \varepsilon = 0 .$$

On a donc le développement en série de Taylor

$$v(\varepsilon) = v(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n}(0) ,$$

convergent pour $|\varepsilon| < \mathrm{R}$, avec $v(0) = t$.

Si on se restreint maintenant à ε réel, $v(\varepsilon)$ coïncide avec la fonction $v(t,\varepsilon)$ précédemment obtenue et, d'après 3,

$$\frac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n}(t,0) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\sin^n v(t,0)\,\frac{\partial v}{\partial t}(t,0)\right) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)$$

puisque $v(t,0) = t$. On a donc

$$v(t,\varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(\sin^n t) \text{ pour } t \in \mathbb{R} \text{ , } |\varepsilon| < \mathrm{R} .$$

Montrons enfin que le rayon de convergence de cette série est au moins $1/e$, en majorant directement les termes de cette série. Pour $n \geqslant 1$ on a, par la formule du binôme,

$$\sin^n t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^n = (2i)^{-n}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p e^{i(n-2p)t} ,$$

d'où

$$\left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\right| = 2^{-n}\left|\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p i^{n-1}(n-2p)^{n-1}e^{i(n-2p)t}\right|$$
$$\leqslant 2^{-n}\sum_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p n^{n-1} = n^{n-1} \ ,$$

en observant que $|n-2p| \leqslant n$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Le coefficient de ε^n dans la série entière est donc majoré en valeur absolue par $n^{n-1}/n!$, et la règle de d'Alembert montre que son rayon de convergence est au moins $1/e$, comme annoncé.

Par prolongement analytique, la somme de cette série est solution de l'équation de Kepler pour $t \in \mathbb{R}$ et $|\varepsilon| < 1/e$; par unicité, elle coïncide avec la fonction $v(t, \varepsilon)$ précédente.

5. On calcule ici à ε *fixé* dans $]-1, 1[$. La fonction $t \mapsto v - t$ est, d'après 1, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc développable en série de Fourier normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (ses coefficients de Fourier sont même à décroissance rapide pour $n \to \pm\infty$). Pour calculer

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(v-t)e^{-int}dt \ , \ n \in \mathbb{Z} \ ,$$

on intègre par parties :

$$inc_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}d(v-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dv \text{ si } n \neq 0 \ ,$$

car e^{-int} est de moyenne nulle sur une période pour $n \neq 0$. On peut utiliser v au lieu de t comme variable d'intégration, sans changer les bornes $-\pi$ et π : la fonction $v \mapsto t = v - \varepsilon \sin v$ est en effet un difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est $1 - \varepsilon\cos v > 0$), et $v = \pm\pi$ donne $t = \pm\pi$. Il vient alors, compte tenu dé l'équation de Kepler,

$$inc_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(v-\varepsilon\sin v)}dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varepsilon\sin v}e^{-inv}dv \ ,$$

où l'on reconnaît le n-ième coefficient de Fourier de la fonction C^∞ et 2π-périodique $v \mapsto e^{in\varepsilon\sin v}$. Par suite

$$inc_n = \mathrm{J}_n(n\varepsilon) \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \ , n \neq 0 \ .$$

Comme v et $v - t$ sont fonctions impaires de t (par unicité de la solution de l'équation de Kepler), on a nécessairement $c_{-n} = -c_n$ pour tout n, d'où $c_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} v - t &= \sum_{n\neq 0} c_n e^{int} = 2i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_n(n\varepsilon)}{n} \sin nt \ . \end{aligned}$$

Pour chaque $\varepsilon \in]-1,1[$ cette série converge normalement pour $t \in \mathbb{R}$.

7. Exercices sur les sous-variétés

Exercice 88. ***Contre-exemples pas lisses.*** **Montrer que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ définis par les équations suivantes ne sont pas lisses à l'origine, donc ne sont pas des sous-variétés :**

1. $y = |x|$;
2. $x^2 - y^2 = 0$;
3. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
4. $x^2 - y^3 = 0$;
5. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;
6. $x = 3t/(1+t^3)$, $y = 3t^2/(1+t^3)$, **avec** $t > -1$.

Commentaire. Ce petit catalogue tératologique n'a d'autre but que de mieux cerner le sens du label « sous-variété ». À part le premier, visiblement pas différentiable, de tels exemples apparaissent fréquemment dans l'étude de fonctions bien régulières (voir notamment les courbes de niveau au chapitre 7).

Solution. On note V chacun des sous-ensembles étudiés successivement.

1. L'obstacle est ici la non-dérivabilité de la valeur absolue.

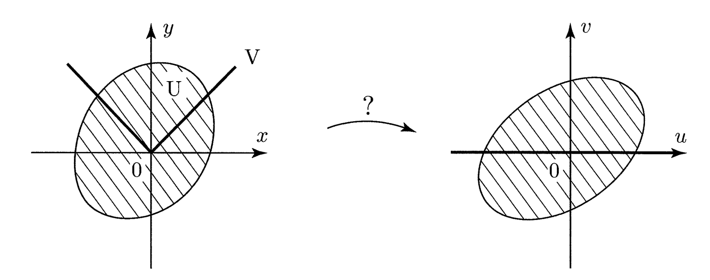


Fig. 114. $y = |x|$ n'est pas lisse.

Si V était lisse en 0, ce ne pourrait être que de dimension $d = 1$: le complémentaire de l'origine dans une boule de $\mathbb{R}^d$, pour $d \geqslant 2$, est en effet connexe, alors que le complémentaire de l'origine dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ (où U est un voisinage de 0) a au moins deux composantes connexes, obtenues pour $x > 0$ et $x < 0$.

Si un difféomorphisme local $\mathrm{F} : (x, y) \mapsto (u, v) = \mathrm{F}(x, y)$ transformait V en la droite $v = 0$, son inverse

$$\mathrm{F}^{-1}(u, v) = (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

vérifierait

$$(x, |x|) = (\varphi(u, 0), \psi(u, 0))$$

pour u voisin de 0, c'est-à-dire

$$\psi(u, 0) = |\varphi(u, 0)| \text{ , avec } \varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0 \text{ .}$$

En divisant par u et faisant tendre u vers 0 par valeurs positives, puis négatives, on obtiendrait

$$\psi'_u(0, 0) = |\varphi'_u(0, 0)| = -|\varphi'_u(0, 0)| \text{ ,}$$

d'où $\varphi'_u(0, 0) = \psi'_u(0, 0) = 0$. C'est impossible, la matrice jacobienne de F^{-1} à l'origine devant être de rang deux.

Remarque. Bien entendu l'application $(x, y) \mapsto (x, y - |x|)$ est un homéomorphisme (non C^1) de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même qui transforme V en une droite.

2. L'obstacle est ici la présence d'un point double à l'origine, et se détecte au niveau topologique (sans même parler de différentiabilité).

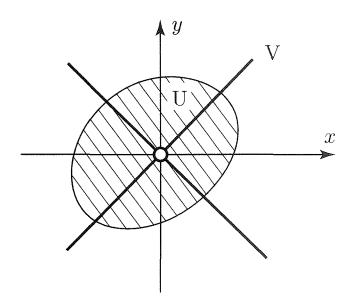


Fig. 115. $x^2 - y^2 = 0$.

En effet le complémentaire de l'origine dans une boule de $\mathbb{R}^d$ a deux composantes connexes si $d = 1$, et une seule si $d \geqslant 2$. Or le complémentaire de l'origine dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ (où U est un voisinage de 0) a au moins quatre composantes connexes, correspondant aux quatre quadrants $x > 0$, $y > 0$ etc. Il ne peut donc pas y avoir homéomorphisme local entre V et un espace $\mathbb{R}^d$.

3. Même type d'argument qu'en 2 : le complémentaire de l'origine dans le cône V (au voisinage de 0) a au moins deux composantes connexes, obtenues pour $z > 0$ et $z < 0$. Le cône n'est donc pas lisse à l'origine de dimension $d \geqslant 2$.

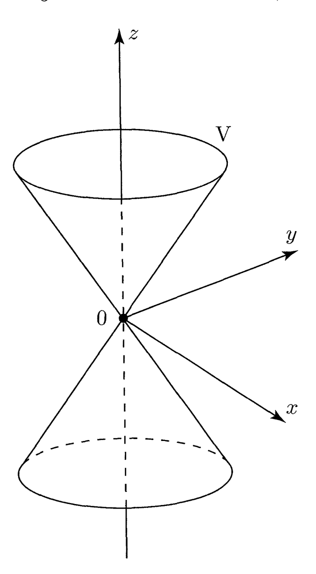


Fig. 116. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Il ne l'est pas non plus de dimension $d = 1$! Si U est une boule ouverte de centre 0, on obtient seulement deux composantes connexes en enlevant à $V \cap U$ l'origine et un autre point ; or la même opération sur une droite en donnerait au moins trois.

4. On reprend ici l'argument de 1.

Si V était lisse en 0, ce ne pourrait être que de dimension $d = 1$. Si un difféomorphisme local $F : (x, y) \mapsto (u, v) = F(x, y)$ transformait V en la droite $v = 0$, son inverse

$$F^{-1}(u, v) = (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

vérifierait, pour u voisin de 0,

$$\varphi(u, 0)^2 = \psi(u, 0)^3 \text{ , avec } \varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0 \text{ .}$$

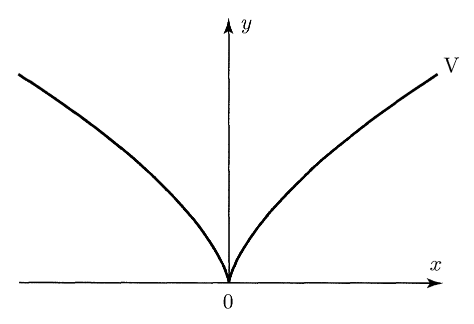


Fig. 117. $x^2 - y^3 = 0$.

La fonction $u \mapsto \psi(u,0)$ serait donc positive, minimum en $u = 0$, d'où $\psi'_u(0,0) = 0$. Alors l'égalité

$$\left|\frac{\varphi(u,0)}{u}\right| = \left|\frac{\psi(u,0)}{u}\right| \cdot |\psi(u,0)|^{1/2}$$

donnerait $\varphi'_u(0,0) = 0$ en faisant tendre u vers 0, et la matrice jacobienne de F^{-1} à l'origine ne pourrait pas être de rang deux.

Remarque. En posant $t = x^{1/3}$ on voit que V est aussi l'arc paramétré $x = t^3$, $y = t^2$, avec $t \in \mathbb{R}$. Un argument similaire au précédent montre que 0 est le seul vecteur tangent en 0 à V *au sens de la définition* 5.2. Mais on verra à l'Exercice 104 que V admet une tangente (au sens plus général de direction limite) en ce « point de rebroussement ».

5. L'obstacle est à nouveau le point double à l'origine

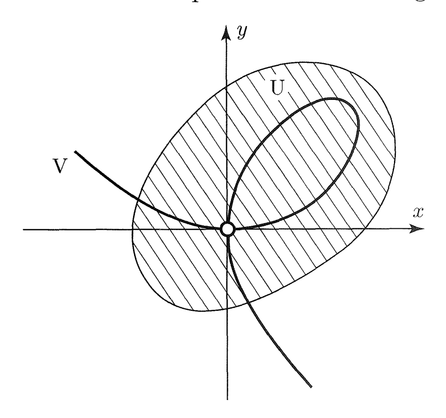


Fig. 118. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

On raisonne comme en 2 : pour tout voisinage U de 0, le complémentaire de 0 dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ a au moins trois composantes connexes, situées dans les premier, deuxième et troisième quadrants (ouverts) du plan. Il n'y a donc pas homéomorphisme local du folium de Descartes avec une droite.

6. L'arc

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \quad , t > -1 \ ,$$

est d'après l'Exercice 76 la partie $y \geqslant 0$ du folium de Descartes de la question 5.

Son intersection avec la droite $y = x$ est formée des points $(0,0)$ et $(3/2, 3/2)$. Par suite, pour tout voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$ contenu dans le carré $|x| < 3/2$, $|y| < 3/2$, l'ensemble $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ privé de 0 a au moins trois composantes connexes, que l'on peut distinguer par le signe de x et celui de $y - x$. Comme précédemment, on en déduit que V n'est pas lisse en 0.

On peut d'ailleurs voir directement que le paramétrage γ ne vérifie pas les conditions du Théorème 5.11 (*iv*). Certes $\gamma'(0) = (3,0)$ n'est pas

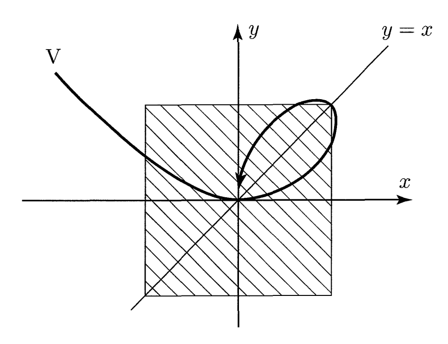


Fig. 119. $x = 3t/1 + t^3, y = 3t^2/1 + t^3, t > -1$.

nul, certes γ est une bijection continue de $]-1, \infty[$ sur son image V, mais *l'application réciproque* γ^{-1} *n'est pas continue en* $\gamma(0) = 0$. Sinon pour tout $\varepsilon > 0$ il existerait un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y) \in \mathrm{V} \cap \mathrm{U} \text{ entraîne } t = \gamma^{-1}(x, y) \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[,$$

ce qui est faux : on a $|x(t)| \leqslant 3/t^2$, $|y(t)| \leqslant 3/t$ pour $t > 0$, donc tout point de paramètre suffisamment grand appartient à $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$.

Remarque. Il serait facile de voir que, dans chacun de ces six exemples, l'ensemble $\mathrm{V}\backslash\{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercice 89. ***Rencontre d'un cylindre et d'une sphère.***

1. Montrer que les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 - 2x = 0 \ ,$$

où $\mathrm{R} > 0$ est une constante, définissent une courbe lisse C lorsque $\mathrm{R} \neq 2$. Déterminer la tangente à C au point (a, b, c). Que se passe-t-il pour $\mathrm{R} = 2$ au point $(2, 0, 0)$?

2. Déterminer les projections de C sur les trois plans de coordonnées.

Solution. 1. Les deux équations données sont respectivement celles de la *sphère* de centre 0 et de rayon R, et du *cylindre* vertical qui a pour base le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 du plan xOy. Pour étudier leur intersection, on cherche à appliquer le Théorème 5.10 : la matrice jacobienne est

$$2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y & 0 \end{pmatrix} ,$$

ses trois mineurs 2×2 sont (à un facteur près) yz, $(x-1)z$, y, et ne s'annulent donc simultanément qu'aux points $(1, 0, z)$ et $(x, 0, 0)$. Les premiers n'appartiennent pas à C, les seconds y appartiennent si et seulement si $\mathrm{R} = 2$ et $x = 2$.

Pour $R \neq 2$, C est donc une *sous-variété* de dimension un de $\mathbb{R}^3$ (courbe lisse). Les équations de la tangente à C au point (a, b, c) s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a-1 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-a \\ Y-b \\ Z-c \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire, compte tenu des équations de C,

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = R^2 \\ (a-1)X + bY = a \ . \end{cases}$$

C'est l'intersection des plans tangents en (a, b, c) à la sphère et au cylindre.

Pour $R = 2$, le rang de la matrice jacobienne est deux sauf au point $(2, 0, 0)$; en ce point les deux plans tangents sont confondus, d'équation $X = 2$. L'ensemble $C \setminus \{(2, 0, 0)\}$ est une sous-variété.

2. L'équation de la projection C_{xz} de C sur xOz s'obtient en *éliminant y entre les deux équations de* C : on a $(x, z) \in C_{xz}$ si et seulement s'il existe y tel que $(x, y, z) \in C$, c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \text{ et } 2x + z^2 = R^2 \ ,$$

soit encore

$$2x = R^2 - z^2 \text{ et } x(2-x) = y^2 \ .$$

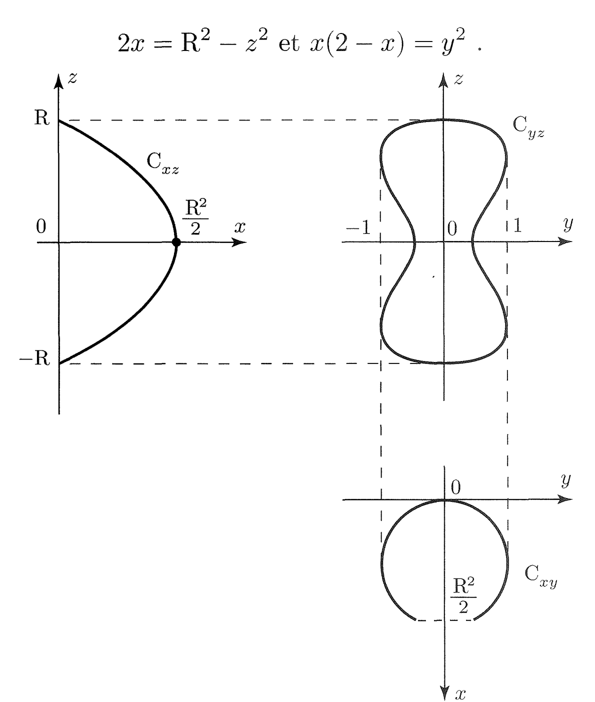


Fig. 120. Les trois projections de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère.

La projection C_{xz} est donc l'*arc de parabole*

$$2x = \mathrm{R}^2 - z^2 \ , \ 0 \leqslant x \leqslant 2 \ .$$

On trouve de même que C_{xy} est l'*arc de cercle*

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \ , \ x \leqslant \mathrm{R}^2/2 \ .$$

Enfin $(x, y) \in \mathrm{C}_{yz}$ si et seulement s'il existe x tel que

$$x^2 = \mathrm{R}^2 - y^2 - z^2 \text{ et } 2x = \mathrm{R}^2 - z^2 \ ,$$

c'est-à-dire

$$4\left(\mathrm{R}^2 - y^2 - z^2\right) = \left(\mathrm{R}^2 - z^2\right)^2 \text{ et } 2x = \mathrm{R}^2 - z^2 \ .$$

Ainsi C_{yz} est définie par l'équation du quatrième degré

$$\left(z^2 - \mathrm{R}^2 + 4\right)\left(z^2 - \mathrm{R}^2\right) + 4y^2 = 0 \ .$$

On verra à l'Exercice 109 que C_{yz} admet, pour $\mathrm{R} = 2$, un *point double en* $y = z = 0$.

La figure est faite pour $\sqrt{2} < \mathrm{R} < 2$. On recommande d'esquisser aussi les cas $\mathrm{R} = 2$ et $\mathrm{R} > 2$; dans ce dernier cas la courbe C a deux composantes connexes, comme on verra facilement sur C_{xz}.

Complément. Effectuée ici manuellement en isolant une variable, l'*élimination* de cette variable entre deux équations algébriques conduit à une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution commune, d'où l'équation d'une projection de l'intersection des deux surfaces définies par ces équations. Pour une approche générale de l'élimination au moyen du résultant, voir Dieudonné [17] p. 61.

Nos équations étant ici de degré 2, on doit s'attendre à un polynôme résultant de degré 2×2 (au plus). Le degré est 4 pour C_{yz}, mais s'abaisse à 2 pour C_{xz}, ce qui s'explique aisément. À la différence de x, la variable y ne figure que par son carré, et chaque point de C_{xz} est la projection des deux points (x, y, z) et $(x, -y, z)$ de la courbe d'intersection ; de même pour C_{xy} en considérant la variable z.

L'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents (cas $\mathrm{R} = 2$) est connue sous le nom de *fenêtre de Viviani.*

Exercice 90. ***Surfaces de*** $\mathbb{R}^3$**. Soient** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ **une fonction de classe** C^1**, et** (a, b, c) **un point de l'ensemble S d'équation** $f(x, y, z) = 0$**. On suppose** $f'_x(a, b, c) \neq 0$**.**

1. Montrer que l'application

$$\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z)) = (u, v, w)$$

est un difféomorphisme local qui transforme S en le plan $w = 0$.

2. Montrer que S peut être définie (localement) comme un graphe, ou paramétriquement.

3. Écrire l'équation du plan vectoriel tangent en (a, b, c) à S par chacune de ces méthodes.

Commentaire. Tout cela résulterait du Théorème 5.11. Le but de l'exercice est d'apprivoiser ce théorème en l'établissant directement sur un cas particulier ; l'application est immédiate au cas des courbes de $\mathbb{R}^2$, par simple suppression d'une variable.

Solution. 1. L'application F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{pmatrix} .$$

Donc $\mathrm{DF}(a, b, c)$ est inversible, et le théorème d'inversion locale montre que F donne un difféomorphisme d'un voisinage V de (a, b, c) sur un voisinage W de $\mathrm{F}(a, b, c) = (a, b, 0)$. Par suite, en notant $(u, v, w) = \mathrm{F}(x, y, z)$,

$$((x, y, z) \in \mathrm{S} \cap \mathrm{V}) \iff ((u, v, w) \in \mathrm{W} \text{ et } w = 0) \ .$$

Le changement de coordonnées F transforme S (au voisinage du point considéré) en le plan $w = 0$. Donc S est lisse en tout point de $\mathrm{S} \cap \mathrm{V}$.

2. En explicitant l'application réciproque F^{-1} on a

$$\begin{cases} (x, y, z) \in \mathrm{V} \\ u = x \\ v = y \\ w = f(x, y, z) \end{cases} \iff \begin{cases} (u, v, w) \in \mathrm{W} \\ x = u \\ y = v \\ z = \varphi(u, v, w) \end{cases}$$

où φ est une fonction de classe C^1 sur W. En particulier

$$\begin{aligned} ((x, y, z) \in \mathrm{S} \cap \mathrm{V}) &\iff ((u, v, w) \in \mathrm{W} \text{ et } w = 0) \\ &\iff ((x, y, 0) \in \mathrm{W} \text{ et } z = \varphi(x, y, 0)) \ . \end{aligned}$$

Donc S est, au voisinage de (a, b, c), le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y, 0)$.

Remarque. Ce résultat s'obtiendrait bien sûr par le théorème des fonctions implicites, applicable au point de départ (a, b, c) puisque $f'_z(a, b, c) \neq 0$. Le raisonnement précédent revient à déduire ce théorème du théorème d'inversion locale (voir l'heuristique du théorème des fonctions implicites en début de chapitre).

On passe immédiatement de là au point de vue paramétrique, avec paramètres u et v :

$$((x, y, z) \in \mathrm{S} \cap \mathrm{V}) \iff ((u, v, 0) \in \mathrm{W} \text{ et } x = u \ , \ y = v \ , \ z = \varphi(u, v, 0)) \ .$$

Noter que cette paramétrisation $(u,v) \mapsto (x,y,z)$ est bien un homéomorphisme de l'ensemble des (u,v) tels que $(u,v,0) \in \mathrm{W}$ sur $\mathrm{S} \cap \mathrm{V}$, puisqu'elle est inversée par l'application continue $(x,y,z) \mapsto (u,v) = (x,y)$.

3. La notion de vecteur tangent au point (a,b,c), comme vitesse à l'instant $t = 0$ d'un arc dérivable γ tracé sur la surface et passant par ce point en $t = 0$, est invariante par tout difféomorphisme F : le vecteur $\gamma'(0)$ est tangent à S en (a,b,c) si et seulement si le vecteur

$$(\mathrm{F} \circ \gamma)'(0) = \mathrm{DF}(a,b,c)\gamma'(0)$$

est tangent en $\mathrm{F}(a,b,c)$ à $\mathrm{F}(\mathrm{S})$.

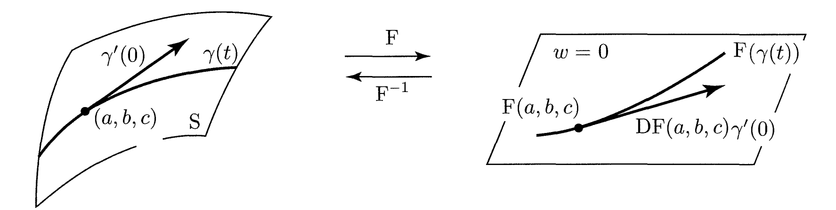


Fig. 121. Vecteur tangent en (a,b,c) à la surface S.

Dans l'espace des coordonnées (u,v,w) les vecteurs tangents en $(a,b,0)$ au plan $w = 0$ constituent évidemment ce plan lui-même. Il résulte de 1 qu'un vecteur $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ est tangent en (a,b,c) à S si et seulement son image

$$\mathrm{DF}(a,b,c)\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$$

a sa dernière composante nulle, i.e.

$$f'_x(a,b,c)\,\mathrm{X} + f'_y(a,b,c)\,\mathrm{Y} + f'_z(a,b,c)\,\mathrm{Z} = 0 \ .$$

C'est l'équation du *plan vectoriel tangent* à S en (a,b,c), noyau de l'application linéaire $\mathrm{D}f(a,b,c)$. l'hypothèse $f'_z(a,b,c) \neq 0$ signifie que ce plan n'est pas vertical.

De là on passe facilement au *point de vue du graphe* $z = \varphi(x,y)$. De l'identité $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ on déduit

$$f'_x + f'_z\varphi'_x = 0 \ , \ f'_y + f'_z\varphi'_y = 0 \ ,$$

et l'équation du plan vectoriel tangent devient

$$-f'_z\varphi'_x\mathrm{X} - f'_z\varphi'_y\mathrm{Y} + f'_z\mathrm{Z} = 0 \ ,$$

les dérivées de f étant prises en (a, b, c) et celles de φ en (a, b). En simplifiant par $f'_z \neq 0$ il vient

$$Z = \varphi'_x(a, b)X + \varphi'_y(a, b)Y \ .$$

C'est le graphe de l'application linéaire $D\varphi(a, b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Le *point de vue paramétrique* est ici essentiellement identique au précédent : la différentielle en (a, b) de l'application

$$(u, v) \mapsto (x, y, z) = (u, v, \varphi(u, v))$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix} ,$$

les dérivées étant calculées en (a, b), et l'image de $\mathbb{R}^2$ par cette application linéaire est bien le plan ci-dessus.

Exercice 91. ***Courbes de*** $\mathbb{R}^3$**. Soient** $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **deux fonctions de classe** C^1**, et** (a, b, c) **un point de l'ensemble C défini par les équations**

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ g(x, y, z) = 0 \ .$$

On suppose

$$(f'_y g'_z - f'_z g'_y)(a, b, c) \neq 0 \ .$$

1. Montrer que l'application

$$F : (x, y, z) \mapsto (x, f(x, y, z), g(x, y, z)) = (u, v, w)$$

est un difféomorphisme local qui transforme C en la droite $v = w = 0$**.**

2. Montrer que C peut être définie (localement) comme un graphe, ou paramétriquement.

3. Écrire l'équation de la droite vectorielle tangente en (a, b, c) **à C, par chacune des méthodes. Interpréter géométriquement l'hypothèse de départ.**

Solution. Même commentaire qu'à l'exercice précédent, très analogue !

1. L'application F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{pmatrix} .$$

Donc $DF(a, b, c)$ est inversible d'après l'hypothèse d'où, par inversion locale, un difféomorphisme induit par F entre un voisinage V de (a, b, c)

et un voisinage W de $F(a,b,c) = (a,0,0)$. Par suite, en notant $(u,v,w) = F(x,y,z)$,

$$((x,y,z) \in C \cap V) \Longleftrightarrow ((u,v,w) \in W \text{ et } v = w = 0) \ .$$

Au voisinage du point considéré le changement de coordonnées F transforme simultanément les surfaces d'équation $f = 0$, resp. $g = 0$, en les plans $v = 0$, resp. $w = 0$. Donc C est *lisse en tout point de* $C \cap V$.

2. En explicitant l'application réciproque F^{-1} on a

$$\begin{cases} (x,y,z) \in V \\ u = x \\ v = f(x,y,z) \\ w = g(x,y,z) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (u,v,w) \in W \\ x = u \\ y = \varphi(u,v,w) \\ z = \psi(u,v,w) \end{cases}$$

où φ et ψ sont de classe C^1 sur W. En particulier

$$\begin{aligned} ((x,y,z) \in C \cap V) &\Longleftrightarrow ((u,v,w) \in W \text{ et } v = w = 0) \\ &\Longleftrightarrow \left((x,0,0) \in W \text{ et } \begin{cases} y = \varphi(x,0,0) \\ z = \psi(x,0,0) \end{cases}\right) . \end{aligned}$$

Donc C est, au voisinage de (a,b,c), le *graphe* de cette application $x \mapsto (y,z)$, c'est-à-dire l'*arc paramétré*

$$x = u \ , \ y = \varphi(u,0,0) \ , \ z = \psi(u,0,0) \ .$$

Cette paramétrisation $u \mapsto (x,y,z)$ est bien un homéomorphisme de l'ensemble des u tels que $(u,0,0) \in W$ sur $C \cap V$, puisqu'elle est inversée par l'application continue $(x,y,z) \mapsto u = x$.

Remarque. Ces résultats auraient pu s'obtenir aussi par le théorème des fonctions implicites, applicable avec point de départ (a,b,c) : l'hypothèse du problème permet de résoudre en (y,z) le système d'équations qui définit C.

3. Comme à l'Exercice 90 un vecteur (X,Y,Z) est tangent en (a,b,c) à C si et seulement si le vecteur image

$$DF(a,b,c) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ f'_x X + f'_y Y + f'_z Z \\ g'_x X + g'_y Y + g'_z Z \end{pmatrix}$$

est tangent en $(a,0,0)$ à la droite $v = w = 0$, i.e. appartient à cette droite, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f'_x(a,b,c)\,X + f'_y(a,b,c)\,Y + f'_z(a,b,c)\,Z = 0 \\ g'_x(a,b,c)\,X + g'_y(a,b,c)\,Y + g'_z(a,b,c)\,Z = 0 \end{cases}$$

C'est l'équation de la *droite vectorielle tangente* en (a,b,c) à C, intersection des plans vectoriels tangents aux deux surfaces $f = 0$, $g = 0$. L'hypothèse $f'_y g'_z - f'_z g'_y \neq 0$ signifie que ces deux plans se coupent, selon une droite non parallèle au plan $y\mathrm{O}z$.

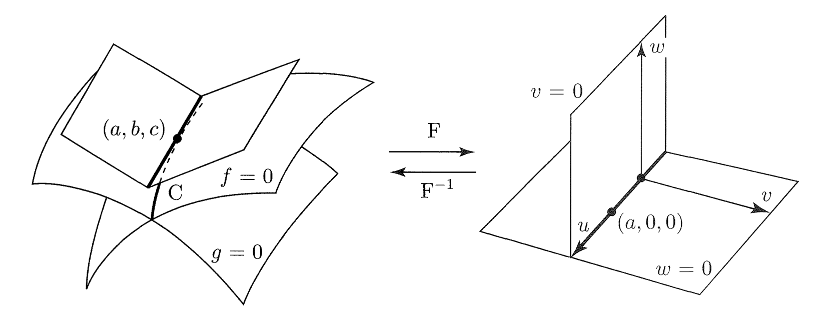


Fig. 122. Tangente en (a,b,c) à la courbe C.

De là on passe au *point de vue du graphe* $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Comme

$$f(x,\varphi(x),\psi(x)) = g(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0\ ,$$

on a en dérivant

$$f'_x + f'_y\varphi' + f'_z\psi' = g'_x + g'_y\varphi' + g'_z\psi' = 0$$

et les équations de la tangente à C deviennent

$$\begin{cases} f'_y\,(\mathrm{Y} - \varphi'\mathrm{X}) + f'_z\,(\mathrm{Z} - \psi'\mathrm{X}) = 0 \\ g'_y\,(\mathrm{Y} - \varphi'\mathrm{X}) + g'_z\,(\mathrm{Z} - \psi'\mathrm{X}) = 0 \end{cases},$$

les dérivées de f, g étant calculées en (a,b,c) et celles de φ, ψ en a. Comme $f'_y g'_z - f'_z g'_y \neq 0$ cela équivaut à

$$\mathrm{Y} = \varphi'(a)\,\mathrm{X}\ ,\ \mathrm{Z} = \psi'(a)\,\mathrm{Y}$$

et la tangente vectorielle est le graphe de l'application linéaire $\mathrm{X} \mapsto (\varphi'(a)\mathrm{X}, \psi'(a)\mathrm{X})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Le *point de vue paramétrique* est ici immédiat : la différentielle en a de l'application

$$u \mapsto (x,y,z) = (u,\varphi(u),\psi(u))$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix},$$

et l'image de $\mathbb{R}$ par cette application linéaire est bien la droite ci-dessus.

Exercice 92. ***Tangente à l'ellipse.*** **On note $\mathrm{MM}' = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right\|$ la distance de deux points M et M′ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.**

1. Expliquer le raisonnement suivant : « Soit S la sphère $\mathrm{OM} = a > 0$. L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OM}}^2 = a^2$ entraîne $2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}} = 0$. Par suite S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, et son plan tangent en M est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. »

2. On donne deux points distincts F et F′ de $\mathbb{R}^2$, et une constante $2a > \mathrm{FF}'$. En utilisant (comme en 1) des notations vectorielles, montrer que l'ellipse définie par $\mathrm{FM} + \mathrm{F'M} = 2a$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, et donner une construction géométrique de sa tangente en M. On notera $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{FM}}/\mathrm{FM}$, $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{\mathrm{F'M}}/\mathrm{F'M}$.

3. Montrer de même que toute hyperbole de mêmes foyers F et F′ coupe l'ellipse précédente à angle droit.

Commentaire. L'écriture vectorielle, jointe à la notation différentielle, conduit à une écriture très économique des calculs, souvent agréable dans des questions géométriques.

Pour une autre preuve de l'orthogonalité des ellipses et des hyperboles homofocales, par les fonctions holomorphes, voir l'Exercice 18. Voir aussi le lien entre tangente à l'ellipse et un problème d'extremum lié dans la partie panorama du chapitre 7, ou encore, à l'Exercice 132, un problème de billard elliptique.

Solution. 1. Le premier élément de la solution proposée est le calcul de la différentielle de la fonction $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{OM}^2 - a^2$: comme $\mathrm{OM}^2 = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ on a

$$d\left(\mathrm{OM}^2 - a^2\right) = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}}$$

(*notation différentielle vectorielle*), écriture abrégée de

$$d\left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2\right) = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

(*notation différentielle*), qui signifie que la différentielle cherchée est la forme linéaire

$$\overrightarrow{h} \mapsto 2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{h}\ ,$$

ou encore que $\operatorname{grad}\left(\mathrm{OM}^2 - a^2\right) = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

On voit ensuite que ce gradient ne s'annule pas sur S, qui est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ par le Théorème 5.10. De plus le plan vectoriel tangent en M est le noyau de la différentielle (comme forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$), c'est-à-dire l'orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, c'est-à-dire ce qu'on obtient en écrivant $2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}} = 0$ et en interprétant $\overrightarrow{d\mathrm{M}}$ comme un vecteur tangent en M à S.

Remarque. La notation $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pourrait sembler plus naturelle que $\overrightarrow{d\mathrm{M}}$. L'intérêt de cette dernière est cependant de ne pas mentionner l'origine O, dont le choix dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ est sans importance : si on remplace O par O′ on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}$, d'où $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = d\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \overrightarrow{d\mathrm{M}}$. Ceci suppose

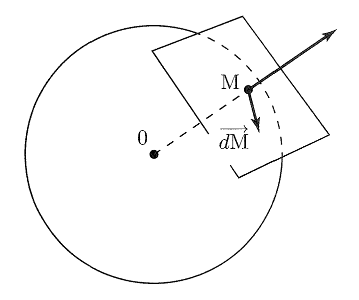


Fig. 123. Plan tangent à la sphère.

bien sûr que O et O′ sont fixes ; si (par exemple) M et M′ sont deux points variables, on devrait écrire

$$d(\mathrm{MM}'^2) = 2\overrightarrow{\mathrm{MM}'} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{MM}'} \cdot (\overrightarrow{d\mathrm{M}'} - \overrightarrow{d\mathrm{M}}) \ ,$$

comme on le vérifie immédiatement en passant aux écritures en coordonnées.

2. La fonction $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{FM} = \left(\overrightarrow{\mathrm{FM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FM}}\right)^{1/2}$ est de classe C^1 sur le plan sauf au point F, qui n'appartient pas à l'ellipse car $\mathrm{FF}' < 2a$; de même pour F′M. Pour M distinct de F et F′ on a, en calculant comme en 1,

$$2\mathrm{FM}\, d(\mathrm{FM}) = 2\overrightarrow{\mathrm{FM}} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}} \ ,$$

i.e. $d(\mathrm{FM}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}}$, d'où

$$d(\mathrm{FM} + \mathrm{F}'\mathrm{M} - 2a) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}}$$

ou, si on préfère,

$$\operatorname{grad}(\mathrm{FM} + \mathrm{F}'\mathrm{M} - 2a) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' \ .$$

Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ ne peut s'annuler que si F, F′ et M sont alignés, avec M entre F et F′ ; dans ce cas $\mathrm{FM} + \mathrm{F}'\mathrm{M} = \mathrm{FF}' < 2a$, et M ne peut alors appartenir à l'ellipse. Par suite l'équation $\mathrm{FM} + \mathrm{F}'\mathrm{M} - 2a = 0$ définit implicitement une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ (Théorème 5.10), et la tangente en M est perpendiculaire à $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont unitaires, le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ donne la direction de la bissectrice intérieure des demi-droites FM et F′M ; la tangente est donc la *bissectrice extérieure* de ces demi-droites.

3. Une hyperbole de foyers F et F′ est de même définie par

$$|\mathrm{FM} - \mathrm{F}'\mathrm{M}| = 2b \ ,$$

où b est une constante, avec $0 < 2b < \mathrm{FF}'$. On voit comme en 2 que la branche d'hyperbole $\mathrm{FM} - \mathrm{F}'\mathrm{M} = 2b$ est une sous-variété, avec pour tangente en M la *bissectrice intérieure* des demi-droites FM et

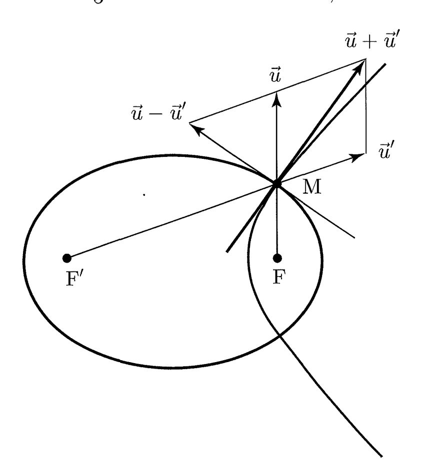


Fig. 124. Orthogonalité d'une ellipse et d'une hyperbole de mêmes foyers F,F'.

F′M, perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}'$; de même pour la branche $\mathrm{F'M}-\mathrm{FM}=2b$.

Par tout point M du plan (hors de la droite FF′ et de la médiatrice de F et F′) passent une seule ellipse et une seule hyperbole de foyers F et F′, obtenues en choisissant $2a=\mathrm{FM}+\mathrm{F'M}$ et $2b=|\mathrm{FM}-\mathrm{F'M}|$. Ce qui précède montre que leurs tangentes sont perpendiculaires en M, d'après l'orthogonalité des bissectrices ; on vérifie d'ailleurs directement que

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}')\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}')=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}'^2=0\ .$$

Exercice 93. ***Contour apparent d'un ellipsoïde.*** **Soient Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, S l'ellipsoïde d'équation $\mathrm{Q}(x)=1$, et a un point tel que $\mathrm{Q}(a)>1$. Soit C l'ensemble des points de S où l'hyperplan affine tangent passe par a (*contour apparent de* S *vue de* a).**

Montrer que C n'est pas vide, et que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, intersection de S et d'un hyperplan.

Commentaire. On a ici un exemple particulièrement simple de contour apparent : si dans $\mathbb{R}^3$ on éclaire un ellipsoïde S par une source lumineuse placée en a, la partie éclairée est séparée de la partie dans l'ombre par une courbe C qui est l'intersection de S et d'un plan, donc une ellipse (ou un cercle). La situation est moins simple en général : pour s'en convaincre, remplacer l'ellipsoïde par une chambre à air (tore), ou voir l'Exercice 78, ou Demazure [14] p.122 sq.

Solution. Soit $\mathrm{B}(.,.)$ la forme bilinéaire symétrique associée à Q, de sorte que $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{B}(x,x)$. On a $\mathrm{DQ}(x)h=2\mathrm{B}(x,h)$ pour $x,h\in\mathbb{R}^n$ (Exercice 15), donc $\mathrm{DQ}(x)\neq 0$ pour tout $x\neq 0$, en particulier sur S. D'après le Théorème 5.10 S est une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^n$, et l'hyperplan affine tangent en $x\in\mathrm{S}$ est l'ensemble des $\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{B}(x,\mathrm{X}-x)=0$.

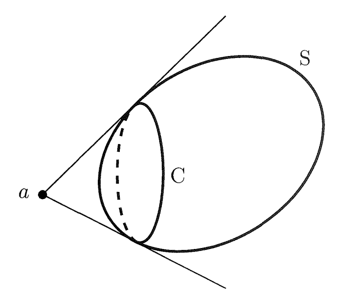


Fig. 125. Contour apparent de S vue de a.

L'ensemble C cherché est donc défini par les équations $\mathrm{Q}(x) = 1$ et $\mathrm{B}(x, a-x) = 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Q}(x) = 1 \text{ et } \mathrm{B}(x,a) = 1 \ .$$

C'est l'intersection de S et d'un hyperplan H.

Montrons que cette intersection n'est pas vide. Puisque a est extérieur à l'ellipsoïde, i.e. $\mathrm{Q}(a) > 1$, le point $a' = \frac{1}{\mathrm{Q}(a)}a$ lui est intérieur et appartient à H, car

$$\mathrm{Q}(a') = \frac{1}{\mathrm{Q}(a)^2}\mathrm{Q}(a) = \frac{1}{\mathrm{Q}(a)} < 1 \text{ et } \mathrm{B}(a',a) = \frac{1}{\mathrm{Q}(a)}\mathrm{B}(a,a) = 1 \ .$$

Sur chaque demi-droite issue de a' et contenue dans H, la fonction $\mathrm{Q}(x)$ croît de la valeur $\mathrm{Q}(a') < 1$ à $+\infty$ (rappelons que Q est définie positive). Elle prend donc la valeur intermédiaire 1, par suite H rencontre S.

Montrons enfin que les différentielles des deux fonctions $\mathrm{B}(x,a) - 1$ et $\mathrm{Q}(x) - 1$ sont indépendantes en tout point de C. Sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{B}(h,a) = \lambda \mathrm{B}(x,h) \ .$$

En remplaçant h par $x \in \mathrm{C}$ on aurait en particulier $\mathrm{B}(x,a) = \lambda \mathrm{B}(x,x)$, i.e. $\lambda = 1$, d'où $\mathrm{B}(a,h) = \mathrm{B}(x,h)$ pour tout h et finalement $x = a$. C'est impossible car a n'appartient pas à S.

Par suite C est bien une sous-variété de dimension $n-2$ de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 94. ***Groupes de matrices.***

1. On note $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles de déterminant 1. Montrer que G est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$, de dimension $n^2 - 1$, et déterminer son espace vectoriel tangent en un point.

[On pourra utiliser l'Exercice 26.]

2. Mêmes questions avec $\mathbf{G} = \mathbf{O}(n)$, ensemble des matrices orthogonales $n \times n$; la dimension est alors $n(n-1)/2$.

[On pourra considérer l'application $X \mapsto {}^t XX - I$, à valeurs dans l'espace des matrices symétriques, ou appliquer le théorème du rang constant (Exercice 74).]

Commentaire. Après le groupe spécial linéaire (question 1) et le groupe orthogonal (question, 2), on pourrait considérer de même tous les *groupes classiques* de matrices (groupe de Lorentz, groupes unitaires, groupes symplectiques...). Ce sont à la fois des sous-variétés et des groupes, et le mélange des deux structures leur donne des propriétés très riches. On verra notamment ici le lien entre les espaces tangents aux différents points (remarques ci-dessous) ; on pourrait montrer aussi que l'application exponentielle, restreinte à l'espace tangent en I, donne une paramétrisation de G au voisinage de I. Ce n'est là que le b. a.-ba de l'importante théorie des *groupes de Lie*, qui intervient dans de nombreux domaines des Mathématiques et de la Physique. Pour en savoir plus, voir l'Exercice 117, Lafontaine [28] chapitre IV et p. 38 et surtout Mneimné et Testard [32].

Solution. Soit $E = \mathbb{R}^{n^2}$ l'espace de toutes les matrices $n \times n$.

1. Le groupe G est l'ensemble des $X \in E$ tels que $f(X) = 0$, en notant $f(X) = \det X - 1$. C'est une fonction de classe C^1 (et même C^∞) sur E et, pour tout $H \in E$,

$$Df(X)H = \det X \cdot \mathrm{tr}(X^{-1}H)$$

d'après l'Exercice 26 question 2. On a donc $Df(X)X = n \det X$ (ce qui résulte aussi de l'identité d'Euler pour la fonction det, homogène de degré n, cf. Exercice 21). Par suite la forme linéaire $Df(X)$ est non nulle pour tout $X \in G$.

D'après le Théorème 5.10 G est donc une hypersurface lisse de E définie implicitement, et son espace vectoriel tangent en X est l'ensemble des H tels que

$$\mathrm{tr}(X^{-1}H) = 0 \ .$$

Pour $X = I$, c'est le sous-espace de E formé des *matrices de trace nulle.*

Remarque. Plus généralement, cette équation montre que les vecteurs tangents en X sont les $H' = XH$, avec H vecteur tangent en I. L'espace tangent en X se déduit donc de l'espace tangent en I par multiplication à gauche par X.

2. Ici G est l'ensemble des $X \in E$ tels que $g(X) = 0$, où $g(X) = {}^t XX - I$, application C^1 (et même C^∞) de E dans l'espace S des matrices symétriques $n \times n$. Pour appliquer le Théorème 5.10 on doit vérifier que $Dg(X)$ est, pour chaque $X \in G$, une application linéaire de rang $\dim S$, c'est-à-dire une surjection. Or, pour $X \in G$ et $H \in E$,

$$Dg(X)H = {}^t XH + {}^t HX = X^{-1}H + {}^t\left(X^{-1}H\right) \ .$$

Si Y est donné dans F, l'équation $Dg(X)H = Y$ admet notamment la solution $H = \frac{1}{2}XY$, ce qui établit la surjectivité.

Par suite G est une sous-variété de E, de dimension

$$\dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{S} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} ,$$

et son espace vectoriel tangent en X est l'ensemble des H tels que

$${}^t\left(\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}\right) = -\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H} .$$

Pour X = I, c'est le sous-espace de E formé des *matrices antisymétriques.*

Remarque. Même remarque qu'en 1.

Variante. Au lieu d'introduire artificiellement l'espace des matrices symétriques, considérons directement l'application précédente comme une application $g : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$, où U est l'ouvert de E formé des matrices inversibles. D'après le théorème du rang constant (Exercice 74, commentaire), l'ensemble des $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$ tels que $g(\mathrm{X}) = 0$, qui est notre ensemble G, est une sous-variété de E si $\mathrm{D}g(\mathrm{X})$ a même rang r en tout point $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$.

Or le calcul précédent montre que le noyau de $\mathrm{D}g(\mathrm{X})$ est l'ensemble des $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{X}^{-1}\mathrm{H}$ soit antisymétrique. Cet espace est de dimension $n(n-1)/2$, donc g est de rang constant

$$r = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 ,$$

et G est bien une sous-variété de E de dimension $n^2 - r = n(n-1)/2$.

Exercice 95. ***Matrices de rang donné.* On note $\mathbf{E}_{p,q}$ l'espace des matrices réelles à p lignes et q colonnes, et $\mathbf{GL}(p) \subset \mathbf{E}_{p,p}$ le groupe des matrices inversibles. Pour $0 < r < n$, on considère le sous-ensemble V de $\mathbf{E}_{n,n}$ formé des matrices de rang donné r, et le sous-ensemble U de $\mathbf{E}_{n,n}$ formé des matrices dont le premier mineur $r \times r$ (en haut à gauche) est non nul.**

On écrit une matrice $\mathbf{X} \in \mathbf{E}_{n,n}$ sous la forme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} ,$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbf{E}_{r,r}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{E}_{r,n-r}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{E}_{n-r,r}$ et $\mathbf{D} \in \mathbf{E}_{n-r,n-r}$.

1. Montrer que X appartient à $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}$ si et seulement si $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(r)$ et $\mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

2. En déduire que $\mathbf{V} \cap \mathbf{U}$, puis V, sont des sous-variétés de $\mathbf{E}_{n,n}$, de dimension $n^2 - (n-r)^2$.

Commentaire. Une écriture plus naturelle (mais non unique) des matrices de rang r est sous la forme $\mathrm{P}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{Q}$, avec $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}(n)$, ce qui fait apparaître V comme une orbite du groupe $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$, et permettrait

aussi de le considérer comme sous-variété de $E_{n,n}$. Sur ce point de vue, intéressant mais plus difficile, voir Mneimné et Testard [32] §4.10 (d'où est tirée aussi la méthode proposée ici).

Solution. 1. Par définition de U et V, la matrice X appartient à $V \cap U$ si et seulement si A et X sont de rang r exactement. Cela revient à dire que A appartient à $GL(r)$ et que le rang de X est r, rang de ses r premières colonnes. Cette dernière condition signifie encore que les $n - r$ dernières colonnes de X sont combinaison linéaire des r premières, ce qui se traduit par une égalité matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} M ,$$

avec $M \in E_{r,n-r}$. Comme A est inversible, cela équivaut enfin à

$$M = A^{-1}B \ , \ D = CA^{-1}B \ .$$

L'ensemble $V \cap U$ est donc caractérisé par les conditions $A \in GL(r)$ et $D = CA^{-1}B$.

2. Le résultat de 1 exprime que $V \cap U$ est, dans $E_{n,n}$, le *graphe* de l'application

$$g : (A, B, C) \mapsto D = CA^{-1}B = g(A, B, C) \ ,$$

de $\Omega = GL(r) \times E_{r,n-r} \times E_{n-r,r}$ dans $E_{n-r,n-r}$. Or le groupe linéaire $GL(r)$ est l'ouvert de $\mathbb{R}^{r^2}$ défini par la non-nullité du déterminant. L'ensemble Ω est donc un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^d$ avec

$$d = r^2 + r(n - r) + (n - r)r = n^2 - (n - r)^2 \ .$$

Comme g est de classe C^1 (et même C^∞), le Théorème 5.11 (*iii*) montre que le sous-ensemble V de $E_{n,n} = \mathbb{R}^{n^2}$ est lisse en tout point de $V \cap U$, et de dimension d.

Enfin, si X_0 est une matrice quelconque de rang r, il existe des matrices de permutation $P, Q \in GL(n)$ telles que PX_0Q ait son premier mineur (en haut à gauche en sortant de l'ascenseur) non nul, i.e. $PX_0Q \in V \cap U$. L'application $X \mapsto PXQ$ étant un difféomorphisme de $E_{n,n}$ sur lui-même, il en résulte que V est lisse en X_0, de dimension d. Par suite V est une sous-variété de dimension d de $E_{n,n}$.

Exercice 96. ***Équation iconale.* Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ soit S une hypersurface définie paramétriquement par une application**

$$\varphi : t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto y = \varphi(t) \in S \ ,$$

de classe C^2 sur un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$; on note $a = \varphi(0)$. Soit $N(t)$ un vecteur unitaire normal[11] à S au point $\varphi(t)$, fonction C^1 de t.

1. Montrer que l'application

$$\mathbf{F} : (t, u) \mapsto x = \varphi(t) + u\,\mathrm{N}(t)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sur un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$.

2. Interpréter géométriquement les applications $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto y(x) = \varphi(t(x)) \in$ S définies (au voisinage de a) par l'application réciproque F^{-1}. Montrer que cette fonction u est une solution de l'*équation iconale*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = 1 \ .$$

[On pourra montrer que $\operatorname{grad} u(x) = \mathrm{N}(t(x))$.]

Commentaire. L'équation iconale[12] doit son nom (et son importance) à la recherche de solutions particulières de l'*équation des ondes*

$$\Delta_x v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

(où Δ_x est le laplacien de $\mathbb{R}^n$, agissant sur la variable x), sous la forme à variables séparées

$$v(x,t) = a(x)\, e^{ik(u(x)-t)} \ ,$$

avec une amplitude $a(x)$, une phase $u(x)$ et un nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde. Cela se réduit aussitôt à l'*équation de Helmholtz*

$$\Delta \left(a(x)\, e^{iku(x)} \right) + k^2 a(x)\, e^{iku(x)} = 0 \ .$$

Comme k est grand en optique, où λ est inférieure à un micromètre, il est naturel de rechercher pour a et u des développements asymptotiques valables pour $k \to \infty$. Les termes de plus haut degré (termes en k^2) de l'équation de Helmholtz conduisent, par un calcul élémentaire, à l'équation iconale

$$\|\operatorname{grad} u(x)\|^2 = 1 \ .$$

Les surfaces $u(x) =$ *constante* s'interprètent comme les surfaces d'onde, et leurs normales donnent la direction des rayons lumineux. Voir Courant

11. Un tel vecteur peut être défini à l'aide du produit vectoriel généralisé des $n-1$ vecteurs $\partial\varphi/\partial t_i$, divisé par sa norme (cf. Exercice 32, compléments)

12. Du grec *eikôn*, image, qui a donné naissance aux icônes, iconolâtres et autres iconoclastes.

et Hilbert [12] chapitre 2, où l'on trouvera aussi, plus généralement, une étude des *équations de Hamilton-Jacobi* $p(x, \operatorname{grad} u(x)) = 0$.

Le difféomorphisme de 1 permet de construire des voisinages tubulaires d'une sous-variété (Lafontaine [28] p. 123, Berger et Gostiaux [4] § 2.7).

La paramétrisation $y = \varphi(t)$ utilisée ici alourdit un peu les notations. On pourrait s'en dispenser à condition d'être familier avec la notion d'application différentiable entre sous-variétés, et considérer alors directement

$$\mathrm{F} : (y, u) \mapsto x = y + u\,\mathrm{N}(y) ,$$

application de $\mathrm{S} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Solution. 1. L'application F est de classe C^1 d'après les hypothèses. Pour calculer $\mathrm{DF}(0,0)$ écrivons, pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) dt_j + \mathrm{N}_i(t) du + u\, d\mathrm{N}_i(t) ;$$

en $t = 0$, $u = 0$ il reste

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(0) dt_j + \mathrm{N}_i(0) du .$$

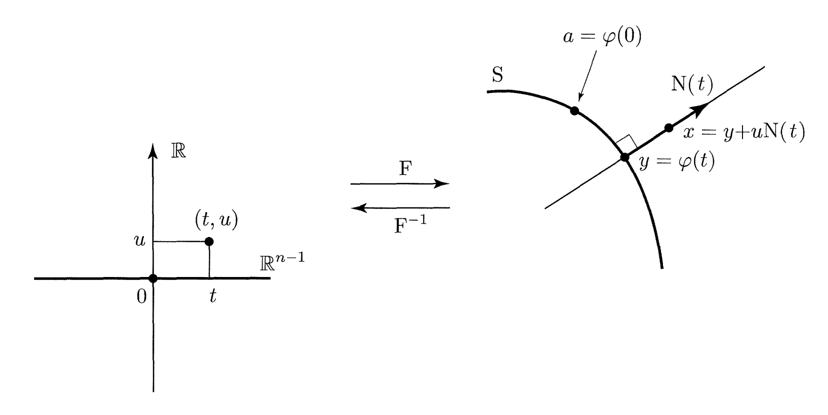


Fig. 126. L'application F.

La matrice jacobienne $\mathrm{DF}(0,0)$ a donc pour vecteurs colonnes $\partial\varphi/\partial t_1$, ..., $\partial\varphi/\partial t_{n-1}$, $\mathrm{N}(0)$. Ces vecteurs sont indépendants, puisque les $n-1$ premiers engendrent l'hyperplan tangent en a à S, et le dernier son orthogonal. Par suite $\mathrm{DF}(0,0)$ est inversible et, d'après le théorème d'inversion locale, F induit un difféomorphisme entre un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et un voisinage V de $\mathrm{F}(0,0) = a$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Notons $F^{-1}(x) = (t(x), u(x))$ l'application réciproque définie sur V. Le point $y(x) = \varphi(t(x))$ est donc (au voisinage de a) l'unique point de S tel que $x - y(x)$ soit normal à S. L'application $x \mapsto y(x)$ s'interprète comme une *projection orthogonale* (locale) sur S. D'après l'égalité $x - y(x) = u(x)N(t(x))$ le nombre $u(x)$ s'interprète comme la *distance algébrique* de x à S. En particulier $u(x) = 0$ est une équation locale de S.

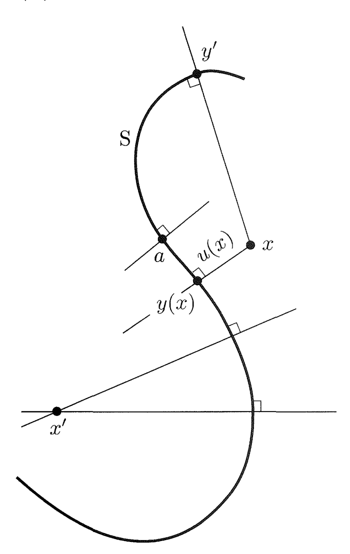


Fig. 127. Projection orthogonale locale sur l'hypersurface S.

Tout ceci est, encore une fois, purement local : par un point tel que x' (insuffisamment proche de a) peuvent passer plusieurs normales à S en des points proches de a ; d'autre part un point x, même voisin de a, peut avoir d'autres projections orthogonales sur S (telles que y'), non voisines de a. Voir à l'Exercice 126 une discussion détaillée du cas $n = 2$.

Reprenons le calcul de 1 en un point quelconque $(t, u) \in U$, avec $y = \varphi(t)$. Des égalités

$$dx_i = dy_i + N_i(t)du + u\,dN_i(t)$$

on déduit

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(t)dx_i = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)dy_i + \left(\sum_{i=1}^{n} N_i(t)^2\right) du + u\sum_{i=1}^{n} N_i(t)dN_i(t) \ .$$

Au second membre le premier $\sum$ est nul, car $N(t)$ est normal à S ; de plus $\sum N_i^2 = 1$ car N est unitaire, d'où résulte aussi par différentiation la nullité du dernier $\sum$. Il reste

$$du = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)dx_i \ ,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{grad} u(x) = \mathrm{N}(t(x)) \ .$$

C'est donc un vecteur unitaire ; autrement dit, u est solution de l'équation iconale. Cette égalité montre de plus que, pour toute constante c assez petite, la normale en x à la « surface d'onde » d'équation $u(x) = c$ coïncide avec la normale en $y(x)$ à la surface d'onde initiale S. On dit que ce sont des *hypersurfaces parallèles.*

Complément. Réciproquement, on peut montrer que toute solution de l'équation iconale est (localement) de la forme $u(x)$, où u est la distance algébrique à une hypersurface.

Chapitre 6
Différentielles secondes

1. Objectifs

On cherche maintenant à affiner l'étude locale d'une fonction « quelconque » en examinant le petit terme correctif, resté dans l'ombre jusqu'ici, pour aboutir à une égalité de la forme

$$\begin{pmatrix}\text{accroissement}\\ \text{de la fonction}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{termes}\\ \text{linéaires}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{termes}\\ \text{quadratiques}\end{pmatrix} + \cdots ,$$

somme de termes d'ordre un, deux (et d'ordre supérieur éventuellement) par rapport à l'accroissement de la variable.

Géométriquement, si la fonction définit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (implicitement, ou paramétriquement, sous des hypothèses convenables), on a vu que les termes linéaires donnent l'espace tangent ; les termes quadratiques donneront ensuite la position de la sous-variété par rapport à son espace tangent, la convexité, la courbure ...

2. Panorama du cours

Les deux principaux résultats à connaître sont des outils de calcul, qui s'obtiennent assez facilement : la symétrie des dérivées partielles secondes et la formule de Taylor (sous diverses formes, qu'il faut savoir distinguer et utiliser à bon escient). Comme au chapitre 2, la seule vraie difficulté est de bien maîtriser les notations.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de U, sa différentielle $\mathrm{D}f$ définit une application de U dans $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathrm{D}f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) .$$

Si cette application est différentiable au point a de U, on dit que f est *deux fois différentiable en* a, et on note $\mathrm{D}^2 f(a) = \mathrm{D}(\mathrm{D}f)(a)$ la *différentielle seconde* ainsi obtenue. Explicitement, les composantes $(\partial f/\partial x_j)(x)$ de $\mathrm{D}f(x)$ admettent alors des dérivées partielles en a, notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \partial_i \partial_j f(a) \ , \ 1 \leqslant i, j \leqslant n \ ,$$

et $\mathrm{D}^2 f(a)$ est donnée par la matrice $n \times n$

$$\mathrm{D}^2 f(a) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n \partial x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n^2 \end{pmatrix} ,$$

appelée *matrice hessienne de* f en a (où sont calculées toutes les dérivées).

À la différentielle première $\mathrm{D}f(a)$ est associée la *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$

$$h \mapsto \mathrm{D}f(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \text{ , avec } h \in \mathbb{R}^n \text{ ;}$$

de même on notera

$$(h,k) \mapsto \mathrm{D}^2 f(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \text{ , avec } h,k \in \mathbb{R}^n \text{ ,}$$

la *forme bilinéaire sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associée à la différentielle seconde.

Remarque. Pour simplifier l'exposé, on s'est limité jusqu'ici à une fonction sur $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Mais cela s'étend sans difficulté à une application de $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

$$f : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \text{ ,}$$

qui sera dite deux fois différentiable en a s'il en est ainsi de chacune de ses composantes f_1,..., f_p. *La différentielle seconde* $\mathrm{D}^2 f(a)$ *définit alors une application bilinéaire sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$.

On pourrait même remplacer $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ par des espaces normés quelconques E et F. Alors $\mathrm{D}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{D}^2 f(a)$ à l'espace affreux $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))$ qui s'identifie heureusement, par un lemme algébrique trivial mais un peu indigeste, à l'espace des applications bilinéaires (continues) de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans F. On renvoie à Cartan [8] p. 26 et 64 sq. pour cette généralisation, qui ne sera pas utile ici.

Théorème 6.1. (Théorème de Schwarz[1]) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une application de* U *dans* $\mathbb{R}^p$*, supposée deux fois différentiable en* $a \in \mathrm{U}$*. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \text{ , } 1 \leqslant i,j \leqslant n \text{ .}$$

Autrement dit $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est une application bilinéaire symétrique :*

$$\mathrm{D}^2 f(a)(h,k) = \mathrm{D}^2 f(a)(k,h) \textit{ pour tous } h,k \in \mathbb{R}^n \text{ .}$$

1. Ne pas confondre *Schwarz* (Hermann Amandus, 1843-1921), allemand, connu notamment pour ce théorème, pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le lemme de Schwarz sur les fonctions holomorphes, la dérivée schwarzienne... et le français *Schwartz* (Laurent, 1915-2002), connu notamment pour sa théorie des distributions.

Heuristique. Soient h et k deux petits accroissements de la variable. La différentiabilité de f en a et en $a+h$ permet d'écrire

$$f(a+k) - f(a) = \mathrm{D}f(a)k + \cdots$$
$$f((a+h)+k) - f(a+h) = \mathrm{D}f(a+h)k + \cdots$$

d'où par différence

$$\begin{aligned} f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) \\ &= (\mathrm{D}f(a+h) - \mathrm{D}f(a))k + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right) k_j + \cdots \end{aligned}$$

La différentiabilité en a des $\partial f / \partial x_j$ donne ensuite

$$f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)\ h_i k_j + \cdots$$

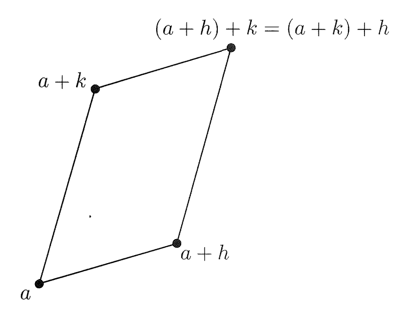


Fig. 128. Heuristique du théorème de Schwarz.

Le premier membre étant symétrique en h et k (par la commutativité de l'addition $h+k$!), il en est de même du second, d'où le résultat. Voir Cartan [8] p.65 ou Dieudonné [18] p.182 pour une preuve sérieuse, et Rudin [36] théorème 9.41 pour un énoncé plus fin.

En pratique, le théorème de Schwarz s'applique notamment si f est *de classe* C^2 *sur* U, i.e. admet des dérivées partielles premières et secondes continues sur U : cette hypothèse entraîne, par le Théorème 2.1 (ou l'Exercice 38), l'existence de la différentielle seconde $\mathrm{D}^2 f$ en tout point de U.

Attention. L'existence des $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ ne suffirait pas ! On avait cité la fonction

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \ , \ f(0,0) = 0 \ ,$$

qui a des dérivées partielles $\partial f/\partial x_i$ en tout point, sans être différentiable (ni même continue) à l'origine. De même la fonction

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \ , \ g(0,0) = 0$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées $\partial^2 g/\partial x_1 \partial x_2$ et $\partial^2 g/\partial x_2 \partial x_1$ en tout point, mais distinctes à l'origine.

On peut récidiver : si f est trois fois différentiable en a sa *différentielle troisième* $\mathrm{D}^3 f(a)$ sera une application trilinéaire symétrique, forcément symétrique, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui s'explicite selon

$$\mathrm{D}^3 f(a)(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \ u_i v_j w_k$$

pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Les dérivées partielles de f d'ordre deux ou trois ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations.

Et cetera. Pour $k \geqslant 1$ l'application f est dite *de classe* C^k *sur l'ouvert* U de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles premières sont de classe[2] C^{k-1}sur U ; cela revient à dire qu'elle admet des dérivées partielles de tout ordre $\leqslant k$, continues sur U. Enfin f est dite *de classe* C^∞ *sur* U si elle est de classe C^k pour tout k.

Formules de Taylor

Dans ces formules interviennent les termes successifs

$$\mathrm{D}f(a)h \ , \ \mathrm{D}^2 f(a)(h,h) \ , \ \mathrm{D}^3 f(a)(h,h,h) \ ,...$$

pour lesquels il est commode (mais non sans danger) d'introduire une *notation abrégée* : pour $h \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\mathrm{D}^k f(a)(h)^k = \mathrm{D}^k f(a)(h, h, \ldots, h) \ .$$

Les formules de Taylor à n variables garderont ainsi l'aspect du cas $n = 1$, familier mais d'une simplicité trompeuse ! Il importe de savoir expliciter

2. Par convention, « de classe C^0 » signifie continue. Cette définition de la classe C^k à partir des dérivées partielles est la plus utile en pratique. Mais elle est liée à la base canonique de $\mathbb{R}^n$; voir Avez [3] p. 35 pour une définition intrinsèque, généralisant la définition 2.2.

ces expressions, ce qui peut se faire de trois façons :

$$\frac{1}{k!}\mathrm{D}^k f(a)(h)^k = \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1}\cdots h_{i_k} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(a) \tag{2}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)\, h^\alpha\ . \tag{3}$$

L'écriture (1), utilisée plus haut pour $k = 2$ ou 3, est la plus naturelle mais oblige à regrouper ensuite les termes égaux dans le $\sum$, par exemple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} h_2 h_1\ .$$

L'écriture (2), *la plus commode* sans doute, n'a pas ce défaut. Elle utilise un développement formel du binôme généralisé (puissance k d'une somme de n termes), qui se comprend tout seul sur l'exemple suivant : on écrit

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 = h_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\ ,$$

que l'on applique à f au point a, d'où les termes voulus.

L'écriture (3) se rencontre souvent dans les ouvrages consacrés aux équations aux dérivées partielles. Elle fait appel à la *notation multi-indice*, avec des $\alpha_i \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\ ,\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\ ,\ \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!\ ,$$

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\ ,\quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\ ;$$

on rappelle la convention $0! = 1$. Dans (3) la sommation porte sur tous les multi-indices α de longueur $|\alpha| = k$. Voir d'urgence l'Exercice 97 pour apprendre à maîtriser ces notations !

Les formules de Taylor à l'ordre $k \geqslant 1$, ci-dessous, s'appliquent à une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 6.2. (Formule de Taylor-Young) *Si f est k fois différentiable en $a \in \mathrm{U}$, on a*

$$f(a+h) - f(a) - \mathrm{D}f(a)h - \cdots - \frac{1}{k!}\mathrm{D}^k f(a)(h)^k = o\left(\|h\|^k\right)$$

lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 6.3. (Formule de Taylor avec reste intégral) *Si f est de classe C^{k+1} sur U et si le segment $[a, a+h]$ est tout entier contenu dans* U*, on a*

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \cdots - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt \ .$$

En particulier, pour tout compact convexe K *contenu dans* U *il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour* $a \in K$ *et* $a + h \in K$*,*

$$\left\| f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \cdots - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k \right\| \leqslant C \left\| h \right\|^{k+1}$$

*(*formule de Taylor-Lagrange*).*

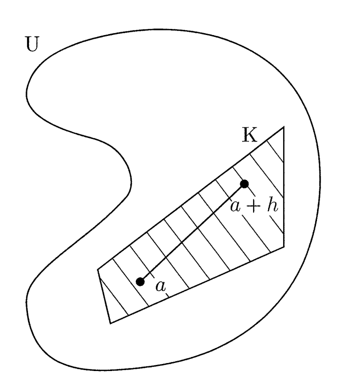


Fig. 129. Géométrie de la formule de Taylor-Lagrange.

Usage des formules de Taylor. Celle de Taylor-Young précise seulement le comportement d'une expression lorsque h tend vers 0 ; elle est donc purement *locale au voisinage de a*. Pour $k = 1$ elle se réduit à la définition de la différentielle. Pour $k = 2$ elle montre que le $o(\|h\|)$ de la définition d'une différentielle (ou celui de Taylor-Young) est en fait un $O(\|h\|^2)$ dès que la fonction est deux fois différentiable en a.

La formule avec reste intégral est la plus longue à écrire, mais *la plus précise* ; on la préférera chaque fois qu'on a besoin d'informations détaillées sur le reste, notamment sur sa dépendance par rapport aux variables ou à d'éventuels paramètres (voir par exemple les Exercices 106, 109, 110, 114).

Présentée ici (par commodité) comme conséquence du reste intégral, la majoration de Taylor-Lagrange vaut en fait sous des hypothèses un peu plus faibles. On l'utilisera pour évaluer un accroissement entre deux points, non nécessairement proches l'un de l'autre.

Remarque. Si on note $z = x+iy$ et $(x,y) \mapsto \mathrm{F}(x,y) = f(x+iy)$ la fonction de deux variables associée à une fonction f, holomorphe sur un ouvert du plan complexe, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F}(x,y) = f'(z) \ , \ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{F}(x,y) = i\, f'(z)$$

(Exercice 18, complément à la question 2). Par récurrence sur n on en déduit, pour h, k réels et $w = h + ik$,

$$\frac{1}{n!}\mathrm{D}^n\mathrm{F}(x,y)(h,k)^n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \mathrm{F}(x,y) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z)w^n \ ,$$

ce qui montre l'accord entre la formule de Taylor pour F, en les deux variables réelles (x,y), et celle pour f, en la variable complexe z.

Références. Cartan [8] p. 77-78, Avez [3] p. 41-42.

3. Exercices

Après avoir passé le pont (passage obligatoire), on trouvera quatre exercices d'application du théorème de Schwarz (98 à 101), puis l'étude de deux équations aux dérivées partielles non-linéaires (102 et 103). Les exercices suivants (104 à 117) utilisent l'une ou l'autre des formules de Taylor, à l'ordre deux le plus souvent (ainsi d'ailleurs que la plupart des exercices du chapitre 7).

Les Exercices 104 et 105, resp. 111 et 112, où l'on fait les premiers pas en théorie des courbes, resp. surfaces, doivent être considérés comme des « questions de cours ».

Exercice 97. ***Pont aux ânes.*** **Écrire la formule de Taylor-Young**

1. À l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;

2. À l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;

3. À l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3y - x^2 + y$.

Solution. 1. En supposant f deux fois différentiable au point (a,b,c) on a

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, c+l) &- f(a,b,c) \\ &= f'_x h + f'_y k + f'_z l \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}h^2 + f''_{y^2}k^2 + f''_{z^2}l^2 + 2f''_{xy}hk + 2f''_{yz}kl + 2f''_{xz}hl\right) \\ &\quad + o\left(h^2 + k^2 + l^2\right) \ , \end{aligned}$$

où toutes les dérivées de f sont bien sûr prises en (a, b, c). Les termes d'ordre deux s'obtiennent en développant

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 ,$$

ou encore en notation multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $|\alpha| = 2$, ce qui donne

$$\alpha = (2,0,0) , (0,2,0) , (0,0,2) , (1,1,0) , (0,1,1) , (1,0,1)$$

d'où, en calculant les $\alpha!$ correspondantes, les six termes précédents.

2. En supposant f trois fois différentiable au point (a, b) on a

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a,b) &= \left(f'_x h + f'_y k\right) + \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{y^2}k^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(f'''_{x^3}h^3 + 3f'''_{x^2y}h^2k + 3f'''_{xy^2}hk^2 + f'''_{y^3}k^3\right) \\ &\quad + o\left((|h| + |k|)^3\right) , \end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont calculées au point (a, b). Les termes d'ordre trois s'obtiennent en développant

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3$$

par la formule du binôme, ou bien en notation multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ avec $|\alpha| = 3$, ce qui donne

$$\alpha = (3,0) , (2,1) , (1,2) , (0,3)$$

d'où, en calculant les $\alpha!$, les quatre termes précédents.

3. Comme f est un polynôme de degré cinq ses dérivées partielles d'ordre au moins six sont identiquement nulles. Le second membre de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre treize (sic) se réduit donc à un polynôme de degré cinq qui, par identification, ne peut être que

$$f(x, y) = y - x^2 + x^3y + y^5 .$$

C'est aussi la formule de Taylor-Young à l'ordre treize. En bref, la réponse était contenue dans l'énoncé.

En comparant avec d'autres écritures de la formule de Taylor, on peut lire sur cette égalité les valeurs des dérivées de f à l'origine ; par exemple le coefficient de x^3y est

$$\frac{1}{4!}4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 1 .$$

Exercice 98. ***Isométries.*** **Soit $f = (f_1 \dots, f_n)$ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (muni de la norme euclidienne usuelle).**
On dit que f est une *isométrie* si
(i) pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.
On dit que f est une *isométrie infinitésimale* si
(ii) pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{D}f(x)h\| = \|h\|$.
1. On suppose (ii), et on note

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k} \; , 1 \leqslant i, j, k \leqslant n \; .$$

Montrer que $a_{ijk} = a_{ikj}$ et $a_{ijk} = -a_{kji}$. En déduire $a_{ijk} = 0$ pour tous i, j et k.
2. Déduire de 1 que (i) et (ii) sont équivalents.
3. *Application.* Soit $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ le laplacien de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f$$

pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 si et seulement si f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Commentaire. L'*invariance du laplacien par toute isométrie* (que l'on retrouvera à l'Exercice 107) est une propriété fondamentale de cet opérateur, qui traduit son lien profond avec la structure euclidienne de l'espace.

Pour une autre preuve de l'implication (ii) entraîne (i), sans utiliser les dérivées secondes, voir Gonnord et Tosel [45] p. 32.

Solution. 1. Le théorème de Schwarz donne $a_{ijk} = a_{ikj}$. La propriété (ii) exprime que $\mathrm{D}f(x)$ est, pour tout x, une matrice orthogonale. Ses vecteurs colonnes forment un système orthonormal, i.e.

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x) = \delta_{ik}$$

(symbole de Kronecker : $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ sinon) d'où, en dérivant par rapport à x_j,

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \right) = 0 \; ,$$

c'est-à-dire $a_{ijk} = -a_{kji}$.

La fin est purement combinatoire : a est invariant par la transposition σ des deux derniers indices, et changé en son opposé par la transposition τ du premier et du dernier. Alors $\tau \circ \sigma$ est la permutation circulaire $(i, j, k) \mapsto (j, k, i)$, donc $(\tau \circ \sigma)^3$ est l'identité, et devrait à la fois conserver a et le changer en son opposé. Donc $a_{ijk} = 0$ pour tous i, j, k.

2. Supposons (ii). Comme $\mathrm{D}f = (\partial f_m/\partial x_i)$ est une matrice inversible, les égalités $a_{ijk} = 0$ entraînent

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}(x) = 0 \ , \ 1 \leqslant j,k,m \leqslant n \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Par suite $(\partial f_m/\partial x_k)(x)$ est une matrice orthogonale constante sur $\mathbb{R}^n$, et

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{km} x_k + \beta_m$$

où les α_{km} et les β_m sont des constantes, c'est-à-dire

$$f(x) = \mathrm{A}x + b$$

où A est une matrice orthogonale et $b \in \mathbb{R}^n$. Donc f est une application affine, et une isométrie :

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|\mathrm{A}h\| = \|h\| \ ,$$

et (ii) entraîne (i).

Réciproquement, il résulte de (i) et de la définition de la différentielle que

$$\|f(x+th) - f(x)\| = \|t\mathrm{D}f(x)h + \|th\| \, \varepsilon(th)\| = \|th\|$$

pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, lorsque le scalaire positif t tend vers 0. En simplifiant par t et faisant tendre t vers 0, on voit ainsi que (i) entraîne (ii). Les isométries C^2 sont donc affines, d'après ce qui précède. Voir aussi Lelong-Ferrand et Arnaudiès [30] p. 423 pour une preuve géométrique de ce fait, sans hypothèse de différentiabilité.

3. Notons $v = u \circ f$, i.e. $v(y) = u(x)$ avec $x = f(y)$. Par dérivation de fonctions composées on a

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(f(y)) \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y) \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_i^2}(y) \ ,$$

d'où, en sommant de $i = 1$ à n,

$$\Delta v(y) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) \mathrm{F}_{jk}(y) + \sum_{j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \Delta f_j(y) \ ,$$

en notant

$$\mathrm{F}_{jk} = \sum_{i} \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \ .$$

L'égalité d'invariance du laplacien $\Delta v(y) = \Delta u(x)$ (pour toute fonction u) est alors équivalente à

$$F_{jk}(y) = \delta_{jk} \text{ et } \Delta f_j(y) = 0 \qquad (*)$$

pour tous j, k de 1 à n et tout $y \in \mathbb{R}^n$. En effet, le choix de $u(x) = x_j$ donne d'abord

$$\Delta v(y) = \Delta f_j(y) = \Delta u(x) = 0\,;$$

le choix $u(x) = x_l x_m$ donne ensuite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}\ ,\ \Delta u = 2\delta_{lm}\ ,$$

et pour cette fonction l'égalité $\Delta v(y) = \Delta u(x)$ s'écrit $2F_{lm} = 2\delta_{lm}$. Réciproquement les conditions $(*)$ entraînent l'invariance du laplacien par f, d'après les calculs précédents.

La première des conditions $(*)$ exprime que $Df(y)$ est, pour tout y, une matrice orthogonale. D'après 2 elle équivaut à dire que f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, donc une application affine, d'où $\Delta f_j = 0$. Les conditions $(*)$ se réduisent donc à $F_{jk} = 0$ pour tous j, k. En résumé on a

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f$$

pour toute u si et seulement si f est une isométrie.

Exercice 99. ***Matrice jacobienne, symétrie et antisymétrie.*** **On considère une application $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.**

1. On suppose f de classe C^2. Montrer que la matrice jacobienne

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est *antisymétrique en tout point* x de $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe A, matrice antisymétrique constante et b, vecteur constant de $\mathbb{R}^n$, tels que

$$f(x) = Ax + b\ .$$

[On pourra noter $f_{ijk} = \partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k$ et s'inspirer des questions 1 et 2 de l'Exercice 98.]

2. On suppose f de classe C^1. Montrer que la matrice jacobienne $Df(x)$ est *symétrique en tout point* x de $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe φ, fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, telle que

$$f_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ .$$

[On pourra prendre $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\, dt$.]

Commentaire. On poursuit l'étude, entreprise à l'Exercice 98, des applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même dont la matrice jacobienne en tout point possède une propriété particulière (orthogonale à l'exercice précédent, symétrique ou antisymétrique ici).

La question 2 est le cas le plus simple de l'important *lemme de Poincaré.* Il affirme, dans le langage des formes différentielles, qu'une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^n$ est exacte : si la forme différentielle

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

vérifie $d\omega = 0$, alors il existe une fonction φ telle que $\omega = d\varphi$. La preuve, qui fait appel aux points tx, s'étend aussitôt à tout *ouvert étoilé* de $\mathbb{R}^n$, en particulier à tout ouvert convexe. Pour en savoir plus, voir Lafontaine [28] p. 176 ou Cartan [8] p. 207.

Enfin si l'on interprète, dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, les f_i comme les composantes d'un champ de vecteurs, le résultat de la question 2 est que *son rotationnel est nul si et seulement si c'est un champ de gradients sur* $\mathbb{R}^3$ (cf. Exercice 31).

Solution. On note ∂_j pour $\partial/\partial x_j$ et $f_{ijk} = \partial_j \partial_k f_i$.

1. D'après le théorème de Schwarz on a toujours $f_{ijk} = f_{ikj}$. Si de plus $\mathrm{D}f$ est antisymétrique en tout point, on a $\partial_k f_i = -\partial_i f_k$, d'où $f_{ijk} = -f_{kji}$ en dérivant par rapport à x_j. On en déduit, comme à l'Exercice 98 (questions 1 et 2) que $f_{ijk} = 0$ pour tous indices, et finalement $f(x) = \mathrm{A}x + b$, où A est une matrice constante et b un vecteur constant. Comme $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{A}$ cette matrice est antisymétrique.

La réciproque est immédiate.

2. Si φ est de classe C^2 et $f_i = \partial_i \varphi$ on a

$$\partial_j f_i = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_i f_j$$

d'après le théorème de Schwarz, et $\mathrm{D}f$ est une matrice symétrique.

Réciproquement, on suppose $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ en tout point et on cherche φ telle que $f_i = \partial_i \varphi$. *Nécessairement* on doit avoir, pout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(tx)) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \varphi)(tx) x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(tx) \ ,$$

d'où en intégrant

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(tx)\, dt \ .$$

Inversement, si f est de classe C^1 cette égalité définit bien φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et on a, par dérivation sous le signe somme,

$$\partial_j \varphi(x) = \int_0^1 \left(f_j(tx) + \sum_{i=1}^n x_i (\partial_j f_i)(tx)\, t \right) dt \ .$$

Compte tenu de l'hypothèse $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ l'intégrand est

$$f_j(tx) + \sum_{i=1}^n t x_i (\partial_i f_j)(tx) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t f_j(tx) \right) \ ,$$

d'où

$$\partial_j \varphi(x) = \left[t f_j(tx) \right]_{t=0}^{t=1} = f_j(x) \ .$$

Par suite φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et répond à la question.

Exercice 100. ***Relèvement ; mesure d'un angle.***

1. Soit $u : I \longrightarrow S^1$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$, de l'intervalle I dans le cercle unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan complexe). Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k telle que, pour tout $t \in I$,

$$u(t) = e^{i\alpha(t)} = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \ .$$

[On pourra dériver cette égalité pour obtenir une équation différentielle vérifiée par α.]

2. Même question en remplaçant I par $\mathbb{R}^n$, avec $k \geqslant 2$.

[On pourra reprendre la méthode de 1, et utiliser l'Exercice 99 question 2.]

Commentaire. Le *théorème de relèvement*, tristement méconnu, est pourtant aussi simple que largement utilisé. Si on dit, comme il est fréquent dans une étude de courbe « soit α l'angle de tel vecteur avec tel autre ; calculons la dérivée de α... », c'est donc que l'on admet l'existence d'une *détermination dérivable* de la mesure de cet angle. Cette dernière n'étant définie qu'à l'addition près d'un multiple de 2π, cela nécessite une justification ; c'est l'objet de la question 1. Voir à l'Exercice 105 un exemple d'application géométrique.

Dans la question 2 (d'usage moins fréquent que la première), on pourrait remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert étoilé.

Le théorème de relèvement admet aussi une version de classe C^0 (continue), de démonstration un peu plus délicate. Voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] p. 337 pour le cas 1, Chambert-Loir *et al.* [41] p. 61-63 pour les cas 1 et 2.

Solution. 1. Si $u(t) = e^{i\alpha(t)}$ avec α dérivable et réelle, alors *nécessairement* $u' = ie^{i\alpha}\alpha' = iu\alpha'$, d'où $\alpha'(t) = -iu'(t)/u(t)$ et α doit être de la forme

$$\alpha(t) = \alpha_0 - i \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)} ds \ ,$$

où α_0 est une constante réelle.

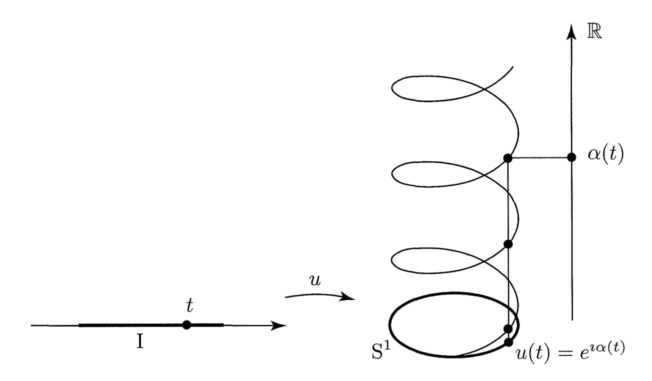


Fig. 130. Relèvement d'une application $u : \mathrm{I} \to \mathrm{S}^1$.

Inversement cette égalité définit une fonction α de classe C^k sur I, *réelle* car $u\overline{u} = 1$ donne

$$u\overline{u}' + u'\overline{u} = 0 \ ,$$

et u'/u est imaginaire pur. De plus

$$\left(ue^{-i\alpha}\right)' = (u' - iu\alpha')e^{-i\alpha} = 0$$

par construction de α, d'où

$$u(t)e^{-i\alpha(t)} = u(t_0)e^{-i\alpha_0}$$

pour tout $t \in \mathrm{I}$. Il suffit donc de choisir la constante α_0 telle que $e^{i\alpha_0} = u(t_0)$ pour avoir $u(t) = e^{i\alpha(t)}$ pour tout t, ce qu'il fallait.

2. On note x la variable dans $\mathbb{R}^n$ et $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Comme en 1 l'égalité $u(x) = e^{i\alpha(x)}$ entraîne par dérivation

$$\partial_j \alpha = -\frac{i}{u} \partial_j u \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n \ . \qquad (*)$$

À nouveau les seconds membres sont réels (dériver $u\overline{u} = 1$). Il suffit alors de vérifier que

$$\partial_k \left(-\frac{i}{u} \partial_j u \right) = \partial_j \left(-\frac{i}{u} \partial_k u \right) \ ,$$

ce qui est immédiat par le théorème de Schwarz appliqué à u, pour en déduire, grâce à l'Exercice 99, l'existence d'une fonction réelle α de classe C^2 qui satisfait à (*). Comme u est de classe C^k, il en sera de même de α.

Alors

$$\partial_j(ue^{-i\alpha}) = (\partial_j u - iu\partial_j\alpha)\, e^{-i\alpha} = 0$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$, d'où

$$u(x)e^{-i\alpha(x)} = u(0)e^{-i\alpha(0)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On peut ajouter à α une constante convenable pour avoir $u(0) = e^{i\alpha(0)}$, d'où $u(x) = e^{i\alpha(x)}$ pour tout x.

Exercice 101. ***Différentielle de l'exponentielle (version dure).***

1. Soient E un espace normé de dimension finie, $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. Résoudre les équations différentielles

$$f'(t) = \mathrm{A}f(t)\ ,\ f(0) = \mathrm{H}\ ,$$
$$g'(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\ ,\ g(0) = 0\ ,$$

où les inconnues f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans E.

2. Désormais E sera l'espace des matrices $n \times n$ réelles. Pour $\mathrm{X}, \mathrm{H} \in \mathrm{E}$ on définit $\operatorname{ad}\mathrm{X} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ par

$$\operatorname{ad}\mathrm{X}(\mathrm{H}) = \mathrm{XH} - \mathrm{HX}$$

(souvent noté aussi $[\mathrm{X}, \mathrm{H}]$). Montrer que, pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{H} \in \mathrm{E}$,

$$e^{\mathrm{X}}\mathrm{H}e^{-\mathrm{X}} = e^{\operatorname{ad}\mathrm{X}}\mathrm{H}\ .$$

[On pourra appliquer 1 à la fonction $f(t) = e^{t\mathrm{X}}\mathrm{H}e^{-t\mathrm{X}}$.]

3. On admet que l'application exponentielle exp : E $\longrightarrow$ E est de classe C^2 (elle est en fait C^∞)[3]. Soient t et u deux variables réelles et

$$g(t) = \partial_{u=0}\left(e^{-t\mathrm{X}}e^{t(\mathrm{X}+u\mathrm{H})}\right)$$

(dérivée partielle par rapport à u, calculée en $u = 0$). Vérifier que

$$g'(t) = e^{-t\operatorname{ad}\mathrm{X}}\mathrm{H}\ ,\ g(0) = 0\ .$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\mathrm{D}\exp(\mathrm{X})\mathrm{H} = e^{\mathrm{X}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\operatorname{ad}\mathrm{X})^k}{(k+1)!}\mathrm{H}\ .$$

5. A-t-on $\left(e^{\mathrm{X}(t)}\right)' = e^{\mathrm{X}(t)}\mathrm{X}'(t)$ pour toute fonction dérivable $t \longmapsto \mathrm{X}(t)$ à valeurs dans E ?

3. Voir Avez [3] p. 77 ou Lafontaine [28] p. 36.

Commentaire. S'il est facile d'obtenir la différentielle à l'origine de l'application exponentielle (Exercice 16), il est plus délicat de l'expliciter en un point quelconque. Une première tentative (Exercice 39) a établi l'existence de cette différentielle en tout point, mais débouchait sur une expression peu maniable.

Le présent exercice, qui suppose une certaine familiarité préalable avec l'application exponentielle, aboutit à une expression simple de $\mathrm{D}\exp(\mathrm{X})$, par une astuce de calcul basée sur la permutation de deux dérivations – d'où sa place dans ce chapitre. Pour une application de ce résultat, voir les compléments à l'Exercice 65.

Solution. 1. On rappelle qu'une série entière convergente en la variable t, à coefficients dans un espace normé de dimension finie, peut être dérivée terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. En particulier

$$\left(e^{t\mathrm{A}}\right)' = \mathrm{A}e^{t\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}\ .$$

La première équation de l'énoncé entraîne

$$\left(e^{-t\mathrm{A}} f(t)\right)' = e^{-t\mathrm{A}} f'(t) - e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{A} f(t) = 0\ ,$$

d'où $e^{-t\mathrm{A}} f(t) = e^0 f(0) = \mathrm{H}$ et

$$f(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\,;$$

la réciproque est immédiate.

Pour obtenir g, on doit intégrer terme à terme la série de l'exponentielle, d'où

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}\mathrm{A}^k}{(k+1)!}\right)\mathrm{H}$$

(on pourrait abréger en $(e^{t\mathrm{A}} - \mathrm{I})/\mathrm{A}$ l'endomorphisme entre parenthèses). En effet les fonctions des deux membres ont même dérivée $e^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}$ et s'annulent toutes deux en $t = 0$.

2. En dérivant $f(t) = e^{t\mathrm{X}}\mathrm{H}e^{-t\mathrm{X}}$ on trouve

$$f'(t) = \mathrm{X}e^{t\mathrm{X}}\mathrm{H}e^{-t\mathrm{X}} - e^{t\mathrm{X}}\mathrm{H}e^{-t\mathrm{X}}\mathrm{X} = \mathrm{ad}\,\mathrm{X}(f(t))\ .$$

D'après 1, avec $\mathrm{A} = \mathrm{ad}\,\mathrm{X} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ et $f(0) = \mathrm{H}$, on en déduit $f(t) = e^{t\,\mathrm{ad}\,\mathrm{X}}\mathrm{H}$, d'où le résultat en prenant $t = 1$. [Noter que e^{X} désigne l'exponentielle d'une matrice $n \times n$, élément de E, et $e^{\mathrm{ad}\,\mathrm{X}}$ celle d'un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$.]

3. D'abord $g(0) = \partial_{u=0}(e^0 e^0) = 0$. Comme exp est de classe C^2, il en est de même de l'application

$$(t,u) \mapsto e^{-t\mathrm{X}}e^{t(\mathrm{X}+u\mathrm{H})}$$

de $\mathbb{R}^2$ dans E. On peut donc permuter les dérivées secondes par le théorème de Schwarz, d'où

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0} \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\right) = \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0} \left(-e^{-tX} X e^{t(X+uH)} + e^{-tX} (X + uH)^{t(X+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0} \left(u e^{-tX} H e^{t(X+uH)}\right) = e^{-tX} H e^{tX} , \end{aligned}$$

puisque la dérivée en $u = 0$ d'une expression de la forme $u\mathrm{F}(u)$ est simplement $\mathrm{F}(0)$. Le résultat demandé se déduit alors de 2, où on remplace X par $-t$X.

4. D'après 3 et 1, avec $\mathrm{A} = -\operatorname{ad} \mathrm{X}$ et $t = 1$, on a

$$g(1) = \partial_{u=0} \left(e^{-X} e^{X+uH}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\operatorname{ad} X)^k}{(k+1)!} H .$$

Comme exp est différentiable en X, on a par ailleurs

$$\partial_{u=0} \left(e^{-X} e^{X+uH}\right) = e^{-X} \mathrm{D}\exp(X) H ,$$

d'où le résultat en rapprochant ces deux expressions.

5. Par dérivation de fonction composée on a donc

$$\begin{aligned} \left(e^{X(t)}\right)' &= \mathrm{D}\exp(X) X' \\ &= e^X \left(X' - \frac{1}{2!} [X, X'] + \frac{1}{3!} [X, [X, X']] - \cdots\right) , \end{aligned}$$

avec $X = X(t)$, $X' = X'(t)$. Cela se réduit à $e^X X'$ si $X(t)$ commute à $X'(t)$, par exemple si $X(t) = t\mathrm{A}$ avec A constant, mais non en général. Par exemple

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donne $X(t)^n = X(t)$ si $n \geqslant 1$, d'où

$$e^{X(t)} = \begin{pmatrix} e & (e-1)t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et

$$\left(e^{X(t)}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq e^{X(t)} X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 102. ***Applications de jacobien donné.*** **Soit j une fonction numérique donnée, de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, partout non nulle. Le but de l'exercice est de déterminer (localement) toutes les applications**

$$\mathbf{F} : (x, y) \mapsto (u, v) = \mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

de classe C^1, telles que

$$\det DF = j \text{ et } f'_x \neq 0 . \tag{1}$$

Dans les questions 1 à 3 on suppose (1) vérifiée.

1. Montrer que l'équation $f(x,y) = u$ peut être (localement) résolue sous la forme $x = \xi(u,y)$. Calculer les dérivées ξ'_u et ξ'_y.

2. Choisir une fonction $\varphi(x,y)$ telle que $\varphi'_x = j$. Soit $\alpha(u,y)$, resp. $\beta(u,y)$, la fonction obtenue en reportant $x = \xi(u,y)$ dans $g(x,y)$, resp. $\varphi(x,y)$. Comparer α'_y et β'_u.

3. En déduire qu'il existe (localement) une fonction $\omega(u,y)$, de classe C^2, telle que

$$\varphi(x,y) = \omega'_y(u,y) \ , \ v = \omega'_u(u,y) \tag{2}$$

lorsque $x = \xi(u,y)$ et $v = g(x,y)$, et qu'on a $\omega''_{uy} \neq 0$.

[On pourra utiliser le lemme de Poincaré (Exercice 99 question 2).]

4. *Inversement*, soit ω une fonction numérique donnée de deux variables notées (u,y), de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que ω''_{uy} ne s'annule pas. En choisissant $\varphi(x,y)$ telle que $\varphi'_x = j$, montrer qu'on peut résoudre (localement) les relations (2) sous la forme

$$(u,v) = F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) \ , \text{ avec } \det DF = j \text{ et } f'_x \neq 0 .$$

Commentaire. L'exercice donne un procédé systématique de construction (locale) de toutes les applications F : $(x,y) \mapsto (u,v)$ de jacobien donné $j(x,y)$: choisir une primitive φ de j sur la variable x, se donner une « fonction génératrice » ω (presque) quelconque, résoudre enfin en u et v les équations (2). Si on souhaite obtenir seulement une application F particulière de jacobien j, on pourra se contenter plus simplement de $F(x,y) = (\varphi(x,y), y)$ (vérification immédiate), donnée par la fonction génératrice $\omega(u,y) = uy$.

La construction proposée, qui peut sembler artificielle, s'explique aisément dans le langage des formes différentielles. Il s'agit de trouver u et v, fonctions de x et y, telles que $du \wedge dv = j\, dx \wedge dy$; en choisissant φ telle que $\varphi'_x = j$ cela s'écrit aussi $du \wedge dv = d\varphi \wedge dy$, ou encore $d\,(\varphi dy + v du) = 0$. Par le lemme de Poincaré on en déduit l'existence d'une fonction ω telle que $\varphi dy + v du = d\omega$, c'est-à-dire $\varphi = \omega'_y$ et $v = \omega'_u$.

Lorsque $j = 1$ on peut prendre $\varphi(x,y) = x$; on obtient alors une forme générale des difféomorphismes qui conservent la mesure de Lebesgue du plan.

Solution. 1. Soient (x_0, y_0) un point du domaine de définition de F, et $u_0 = f(x_0, y_0)$. Comme $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites

donne un voisinage ouvert V de (u_0, y_0), un voisinage ouvert W de x_0 et une application $\xi : V \to W$, de classe C^1, telle que

$$((u,y) \in V \ , \ x \in W \text{ et } f(x,y) = u) \Longleftrightarrow ((u,y) \in V \text{ et } x = \xi(u,y)) \ .$$

En dérivant en u ou y l'identité $f(\xi(u,y),y) = u$, valable sur V, on obtient comme d'habitude

$$\xi'_u = \frac{1}{f'_x} \ , \ \xi'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} \ .$$

2. Quitte à diminuer l'ouvert de définition de j, on peut le supposer convexe. La fonction

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} j(t,y)\,dt$$

est de classe C^1 sur cet ouvert et vérifie $\varphi'_x(x,y) = j(x,y)$. Soient

$$\alpha(u,y) = g(\xi(u,y),y) \ , \ \beta(u,y) = \varphi(\xi(u,y),y) \ ,$$

de classe C^1 sur V. Par dérivation de fonctions composées il vient

$$\alpha'_y = g'_x \xi'_y + g'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} g'_x + g'_y = \frac{j}{f'_x}$$

$$\beta'_u = \varphi'_x \xi'_u = \frac{j}{f'_x} \ ,$$

d'après 1 et l'égalité $f'_x g'_y - f'_y g'_x = \det \mathrm{DF} = j$; les dérivées de α et β sont prises au point $(u,y) \in V$, celles de f et g au point $(x,y) = (\xi(u,y),y)$. On a donc

$$\alpha'_y = \beta'_u \ .$$

3. Quitte à diminuer l'ouvert V, supposons-le convexe. D'après le lemme de Poincaré pour l'application $(u,y) \mapsto (\alpha,\beta)$ (Exercice 99 question 2 et commentaire), l'égalité $\alpha'_y = \beta'_u$ entraîne l'existence d'une fonction ω, de classe C^2 sur V, telle que $\alpha = \omega'_u$ et $\beta = \omega'_y$, c'est-à-dire

$$\varphi(x,y) = \omega'_y(u,y) \text{ et } v = \omega'_u(u,y) \ ,$$

x et v étant liés à u et y par $x = \xi(u,y)$, $v = g(x,y)$.

De plus $\omega''_{uy} = \alpha'_y = \beta'_u = j/f'_x$ ne s'annule pas sur V d'après les hypothèses.

4. *Inversement*, prenons (u_0, y_0), resp. (x_0, y_0), dans le domaine de définition de la fonction donnée $\omega(u,y)$, resp. $j(x,y)$; à nouveau, celui de j sera supposé convexe. Choisissons

$$\varphi(x,y) = \omega'_y(u_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} j(t,y)\,dt \ ;$$

de sorte que $\varphi'_x = j$ et $\varphi(x_0, y_0) = \omega'_y(u_0, y_0)$. Ceci permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites, avec (x_0, u_0, y_0) pour point de départ, pour résoudre l'équation $\varphi(x, y) = \omega'_y(u, y)$ sous la forme $u = f(x, y)$, puisque la dérivée utile $\omega''_{uy}(u_0, y_0)$ est non nulle par hypothèse. La fonction implicite f est de classe C^1 au voisinage de (x_0, y_0). En reportant $u = f(x, y)$ dans la deuxième équation (2) on obtient ensuite

$$v = \omega'_u(f(x, y), y) \ ,$$

noté $v = g(x, y)$, de classe C^1.

Il reste à montrer que l'application $F = (f, g)$ ainsi définie est solution du problème (1). Or en dérivant les identités

$$\varphi(x, y) = \omega'_y(f(x, y), y) \ , \ g(x, y) = \omega'_u(f(x, y), y) \ ,$$

valables sur un voisinage de (x_0, y_0), on obtient

$$j = \varphi'_x = \omega''_{uy} f'_x \ , \ g'_x = \omega''_{u^2} f'_x \ , \ g'_y = \omega''_{u^2} f'_y + \omega''_{uy} \ ,$$

d'où $f'_x = j/\omega''_{uy} \neq 0$ d'après les hypothèses et

$$\det \mathrm{DF} = f'_x g'_y - f'_y g'_x = \omega''_{uy} f'_x = j \ ,$$

ce qui établit le résultat.

Exercice 103. ***Équation de Monge-Ampère.* Si f est une fonction numérique de deux variables, de classe C^∞, on note**

$$z = f(x, y) \quad , p = f'_x(x, y) \ , q = f'_y(x, y) \ ,$$
$$r = f''_{x^2}(x, y) \ , s = f''_{xy}(x, y) \ , t = f''_{y^2}(x, y)$$

ses premières dérivées partielles (« notations de Monge »). On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles (non-linéaire du second ordre) :

$$rt - s^2 = 0 \ .$$

1. Exécuter sommairement le cas où r est identiquement nul. Montrer que la surface $z = f(x, y)$ obtenue est un cylindre.

Désormais on raisonne au voisinage d'un point (x_0, y_0) où r ne s'annule pas.

2. Déduire de l'équation qu'il existe (localement) une fonction F, de classe C^∞, telle que $q = F(p)$.

[Voir Exercices 67 ou 82.]

3. On définit $u = z - px - qy$. Calculer

$$\det \begin{pmatrix} p'_x & p'_y \\ u'_x & u'_y \end{pmatrix} \ ,$$

et en déduire l'existence (locale) d'une fonction G, de classe C^∞, telle que

$$\boldsymbol{z = px + \mathrm{F}(p)y + \mathrm{G}(p) \text{ et } 0 = x + \mathrm{F}'(p)y + \mathrm{G}'(p)} \; .$$

4. Soient inversement F et G deux fonctions d'un paramètre p, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et soient $p_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{F}''(p_0)y_0 + \mathrm{G}''(p_0) \neq 0$. Montrer que les relations de 3 définissent (localement) p fonction C^∞ de (x, y), et fournissent une solution $z = f(x, y)$ de l'équation $rt - s^2 = 0$.

5. *Interprétation géométrique.* Déduire de 3 que la surface $z = f(x, y)$ est *réglée*, i.e. engendrée par une droite variable et que, le long de chacune de ces droites, le plan tangent reste le même en tout point.

Solution. 1. Si $r = f''_{x^2}$ est identiquement nul sur $\mathbb{R}^2$, alors aussi $s = f''_{xy}$ d'après l'équation, d'où $p = f'_x = a$ (constant). Par suite

$$z = f(x, y) = ax + g(y) \; ,$$

où g est une fonction arbitraire de classe C^∞. Réciproquement cette fonction est bien solution de l'équation de Monge-Ampère.

Chaque plan $y = \textit{constante}$ coupe la surface selon une droite de vecteur directeur $(1, 0, a)$. La surface est le cylindre de direction $(1, 0, a)$ s'appuyant sur la courbe $z = g(y)$ du plan yOz.

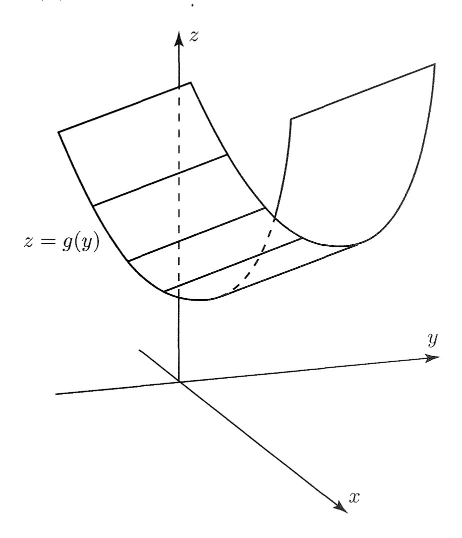


Fig. 131. Le cylindre $z = ax + g(y)$.

2. L'application $(x, y) \mapsto (p, q)$ a pour déterminant jacobien

$$\det \begin{pmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{pmatrix} = rt - s^2 = 0 \; .$$

Sur un ouvert où $p'_x = r$ ne s'annule pas, la matrice jacobienne est donc de rang un. D'après l'Exercice 67 ou 82 (écrit en version C^∞ au lieu de C^1), p et q sont liées au voisinage de (x_0, y_0) par une relation de la forme $q = F(p)$, où F est une fonction C^∞ au voisinage de $p_0 = f'_x(x_0, y_0)$.

3. L'égalité $u = z - px - qy$ entraîne

$$u'_x = -rx - sy \ , \ u'_y = -sx - ty$$

d'où

$$\det \begin{pmatrix} p'_x & p'_y \\ u'_x & u'_y \end{pmatrix} = -(rt - s^2)y = 0 \ .$$

Comme en 2, on en déduit qu'il existe une fonction G, de classe C^∞ au voisinage de p_0, telle que $u = G(p)$ au voisinage de (x_0, y_0).

Par suite

$$z = px + qy + u = px + F(p)y + G(p) \ .$$

En dérivant en x cette égalité, valable en tout point (x, y) voisin de (x_0, y_0), il vient

$$p = p + rx + F'(p)ry + G'(p)r \ .$$

Comme $r \neq 0$ sur le voisinage considéré, on obtient

$$0 = x + F'(p)y + G'(p) \ .$$

Remarque. Si on considérait p comme un paramètre indépendant de x, y et z, cette dernière égalité serait la dérivée par rapport à p de l'expression de z. Ceci permet de faire le lien avec la *théorie des enveloppes*[4] : la surface $z = f(x, y)$ est l'enveloppe des plans variables $z = px + F(p)y + G(p)$, dépendant du paramètre p.

4. Si on suppose $F''(p_0)y_0 + G''(p_0) \neq 0$, la relation $0 = x + F'(p)y + G'(p)$ définit alors p comme fonction implicite de (x, y), de classe C^∞ au voisinage du point de départ $x_0 = -F'(p_0)y_0 - G'(p_0)$, y_0, p_0. Soit $p = \varphi(x, y)$ cette fonction. [*Attention* : considéré pour l'instant comme une variable, p ne sera qu'*a posteriori* interprété comme la dérivée z'_x.]

L'égalité $z = px + F(p)y + G(p)$, avec $p = \varphi(x, y)$, *définit* alors $z = f(x, y)$, fonction C^∞ au voisinage de (x_0, y_0). En dérivant il vient

$$f'_x = p + (x + F'(p)y + G'(p))\, p'_x = p \ ,$$

où p et p'_x signifient $\varphi(x, y)$ et $\varphi'_x(x, y)$ respectivement. De même

$$f'_y = F(p) + (x + F'(p)y + G'(p))\, p'_y = F(p) \ .$$

4. La théorie des enveloppes de plans est analogue à celle des enveloppes de droites, esquissée par exemple dans M. Audin, *Géométrie*, Belin 1998, p. 222. Voir aussi les compléments ci-dessous.

On voit donc que p et $\mathrm{F}(p)$ s'interprètent comme les dérivées partielles de la fonction f ainsi construite, et qu'elles sont liées par la relation

$$f'_y = \mathrm{F}(f'_x) \ .$$

De là, en dérivant,

$$f''_{xy} = \mathrm{F}'(f'_x)f''_{x^2} \ , \ f''_{y^2} = \mathrm{F}'(f'_x)f''_{xy} \ ,$$

d'où

$$f''_{x^2}f''_{y^2} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 0 \ .$$

Conclusion. Les solutions $z = f(x, y)$ de l'équation de Monge-Ampère $rt - s^2 = 0$ sont les fonctions de la forme $z = ax + g(y)$ (question 1), ou bien s'obtiennent (localement) en résolvant un système de la forme

$$\begin{cases} z = px + \mathrm{F}(p)y + \mathrm{G}(p) \\ 0 = x + \mathrm{F}'(p)y + \mathrm{G}'(p) \ , \end{cases}$$

où F et G sont deux fonctions arbitraires.

5. Pour p fixé, ces équations définissent une droite de $\mathbb{R}^3$, intersection d'un plan non vertical avec un plan vertical. La surface $z = f(x, y)$ est donc, au-dessus d'un voisinage de (x_0, y_0), engendrée par les droites ainsi obtenues (*génératrices*), p variant au voisinage de $p_0 = f'_x(x_0, y_0)$.

L'équation du plan affine tangent au point (x, y, z) est

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y) \ ,$$

en notant $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ les coordonnées d'un point de ce plan, c'est-à-dire

$$\mathrm{Z} = p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + u = p\mathrm{X} + \mathrm{F}(p)\mathrm{Y} + \mathrm{G}(p)$$

avec les notations de 3. Ce plan ne dépend que de p, et reste donc le même en tout point d'une génératrice.

On vérifie que cette conclusion vaut encore pour le cylindre de 1.

Complément. Cette étude géométrique mériterait d'être poussée beaucoup plus loin. On peut en fait montrer l'équivalence des propriétés suivantes d'une surface S de $\mathbb{R}^3$ (localement, sur des voisinages convenables) :

- S peut être transformée en un plan par un difféomorphisme isométrique (i.e. conservant la longueur des courbes) ;
- S est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans ;
- S est un cylindre, ou un cône, ou est engendrée par les tangentes à une courbe de $\mathbb{R}^3$ appelée *arête de rebroussement* de S ;
- S est à courbure totale nulle (Exercice 112 question 3) ;

– S est définie par $z = f(x, y)$, graphe d'une fonction f qui vérifie $rt - s^2 = 0$.

On dit alors que S est une *surface réglée développable.* Sur ce beau sujet, fleuron des Cours de Calcul Différentiel et Intégral de nos aïeux, voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] p. 467, 709, ou Valiron [39] p. 132, 140, 468.

Exercice 104. ***Étude affine locale d'une courbe plane.*** **Soit $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^∞ sur un intervalle I, définissant un arc paramétré du plan. Soient t un point intérieur à I, p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que le vecteur $\overrightarrow{v} = \gamma^{(p)}(t)/p!$ soit non nul, et q le plus petit entier strictement plus grand que p tel que le vecteur $\overrightarrow{w} = \gamma^{(q)}(t)/q!$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{v}$ (on suppose l'existence de tels entiers).**

À l'aide de la formule de Taylor-Young, discuter selon la parité de p et q l'aspect local de l'arc au voisinage du paramètre t.

Solution. Notons $\mathrm{A} = \gamma(t)$, $\mathrm{M} = \gamma(t+h)$. En regroupant les termes (éventuels) colinéaires à $\overrightarrow{v}$, la formule de Taylor-Young à l'ordre q en t s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \gamma(t+h) - \gamma(t) \\ &= (h^p + \cdots)\,\overrightarrow{v} + h^q\overrightarrow{w} + o(h^q)\ ,\end{aligned}$$

où les $\cdots$, présents si $q \geqslant p+2$, sont une somme de monômes de degrés $p+1, \ldots, q-1$ en h. Dans le repère affine du plan d'origine A et de base $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a donc pour $h \to 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \mathrm{X}(h)\overrightarrow{v} + \mathrm{Y}(h)\overrightarrow{w}\ ,$$

avec

$$\mathrm{X}(h) = h^p + o(h^p)\ ,\ \mathrm{Y}(h) = h^q + o(h^q)\ .$$

Les signes de X et Y pour h voisin de 0 sont donc ceux de h^p et h^q ; ils dépendent de la parité de p et q, et situent l'arc dans les quatre quadrants, pour $h > 0$ et pour $h < 0$.

De plus le vecteur $h^{-p}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ tend vers $\overrightarrow{v}$ quand h tend vers 0. Donc $\overrightarrow{v}$ définit une *direction limite* en A au sens de l'Exercice 17 question 3, et on peut encore appeler *tangente en* A à l'arc γ la droite de direction $\gamma^{(p)}(t)$ passant par A.

Sur les figures, qui résument les quatre cas possibles, la flèche indique le sens des paramètres croissants. Le cas le plus fréquent est bien entendu $p = 1$, $q = 2$. Pour un rebroussement de deuxième espèce, on pourra distinguer les parties $h > 0$ et $h < 0$ de l'arc en étudiant le signe de $\mathrm{Y}(h) - \mathrm{Y}(-h)$.

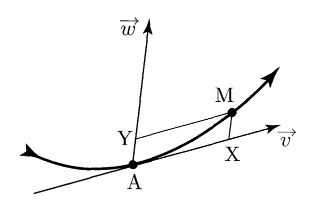


Fig. 132. p impair, q pair : point ordinaire.

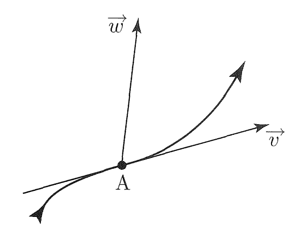


Fig. 133. p impair, q impair : inflexion.

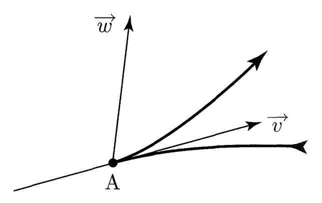


Fig. 134. p pair, q impair : rebroussement de première espèce.

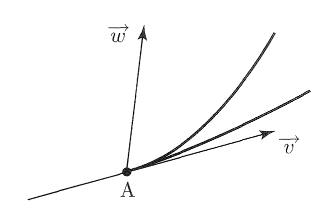


Fig. 135. p pair, q pair : rebroussement de deuxième espèce.

Remarque. La proximité de l'arc avec sa tangente n'est plus nécessairement la même que dans le cas usuel $p = 1$, $q = 2$: avec les notations précédentes on a

$$|\mathrm{Y}| \sim |\mathrm{X}|^{q/p} ,$$

d'où $\mathrm{Y} = o(|\mathrm{X}|)$ puisque $q > p$. Ainsi $\mathrm{Y} = \mathrm{O}(\mathrm{X}^2)$ dans le cas usuel mais, par exemple, $\mathrm{Y} = \mathrm{O}(|\mathrm{X}|^{3/2})$ pour le rebroussement de première espèce $\mathrm{X} = h^2$, $\mathrm{Y} = h^3$.

On renvoie à Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] p. 292 pour une étude similaire des branches infinies.

Exercice 105. ***Étude métrique locale d'une courbe plane.*** **Soit $\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le plan euclidien orienté. On suppose $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. Ayant fixé $a \in \mathrm{I}$ on note**

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| \, du$$

l'*abscisse curviligne* sur l'arc γ (Exercice 41).

1. Montrer que l'application $t \longmapsto s(t)$ est un difféomorphisme de classe C^2 de I sur un intervalle J.

On note $\beta(s) = \gamma(t)$, $\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) = d\beta/ds$ et $\overrightarrow{\mathrm{N}}(s)$ le vecteur déduit de $\overrightarrow{\mathrm{T}}(s)$ par rotation d'un quart de tour dans le sens direct. Montrer qu'il

existe une fonction continue $C : J \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée *courbure orientée* de l'arc γ, telle que

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = C(s)\,\overrightarrow{N}(s)\ ,\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -C(s)\,\overrightarrow{T}(s)\ .$$

Interpréter géométriquement $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et C. Donner le développement de β au voisinage d'un point, limité à l'ordre deux.

2. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Expliciter la courbure à l'aide des dérivées de x et y, en général puis dans le cas particulier $x = t$.

3. On reprend les notations de 1 avec $\overrightarrow{T}(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, où α est un relèvement donné par l'Exercice 100. Vérifier que

$$C(s) = \frac{d\alpha}{ds}\ .$$

***Inversement*, soit $C : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. Montrer qu'il existe un arc β paramétré par l'abscisse curviligne, unique à un déplacement près dans le plan, dont C soit la courbure orientée.**

4. Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\operatorname{grad} u$ ne s'annule jamais, et on note

$$\overrightarrow{N}(x,y) = \frac{\operatorname{grad} u(x,y)}{\|\operatorname{grad} u(x,y)\|}$$

un champ de normales unitaires aux courbes de niveau de u. Vérifier l'égalité

$$\operatorname{div}\overrightarrow{N} = -C$$

en chaque point du plan, où C est la courbure de la courbe de niveau (de normale $\overrightarrow{N}$) passant par ce point.

[On pourra utiliser la fonction $\alpha(x,y)$ associée au champ des tangentes par l'Exercice 100 question 2.]

Commentaires. Plusieurs notions importantes apparaissent ici.

Les *formules de Frenet* obtenues en 1 font intervenir la matrice *antisymétrique*

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -C(s) \\ C(s) & 0 \end{pmatrix},$$

comme matrice des vecteurs $d\overrightarrow{T}/ds$, $d\overrightarrow{N}/ds$ dans la base $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$. Ceci s'accorde avec la théorie générale du mouvement d'un solide (Exercice 25). Le solide mobile est défini ici par le repère affine d'origine $M = \beta(s)$, point de l'arc paramétré, et de vecteurs de base $\overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{N}(s)$. La vitesse de M étant $d\beta/ds = \overrightarrow{T}(s)$, le champ des vitesses à l'instant s est

$$\overrightarrow{v_s(P)} = A(s)\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{v_s(M)} = A(s)\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{T}(s).$$

Le centre instantané de rotation, point de vitesse nulle à l'instant s, est le point P défini (si $\mathrm{C}(s) \neq 0$) par

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = -\mathrm{A}(s)^{-1}\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) = \frac{1}{\mathrm{C}(s)}\overrightarrow{\mathrm{N}}(s) ,$$

(cf. Exercice 25 questions 2 et 3). Ce point est appelé *centre de courbure* de l'arc au point M. En résumé, le mouvement du repère M, $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ est tangent à une rotation autour du centre de courbure, de vitesse angulaire égale à la courbure[5]. Ce dernier point est vérifié ici directement à la question 3, indépendamment de la théorie des mouvements tangents.

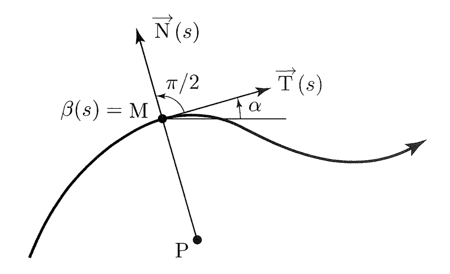


Fig. 136. Tangente, normale et centre de courbure (avec ici $\mathrm{C}(s) < 0$).

Le classique théorème de l'*équation intrinsèque* d'une courbe est établi à la question 3 : la donnée de la courbure détermine la courbe à déplacement près.

Le complément donné en 4 apporte une autre vision de la courbure, comme divergence des normales, qui se comprend aisément en pensant à l'interprétation intuitive de la divergence d'un champ de vecteurs (Exercice 30). Ce point de vue s'étend aux surfaces (Exercice 112, complément).

Voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] chapitre 6 pour d'autres compléments, et notamment l'extension aux arcs paramétrés de $\mathbb{R}^3$.

Solution. On notera toujours $'$ la dérivation par rapport à t et d/ds celle par rapport à s.

1. La dérivée $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ étant strictement positive, l'application $t \mapsto s(t)$ est une bijection strictement croissante de I sur un intervalle J, de classe C^2 ainsi que son application réciproque.

En remplaçant t par le paramètre s on a $\beta(s(t)) = \gamma(t)$ d'où $s'(t)(d\beta/ds) = \gamma'(t)$ et

5. Une étude analogue pour les arcs de $\mathbb{R}^3$ ferait apparaître un terme supplémentaire, la *torsion*, qui s'interprète comme une rotation du plan osculateur autour de la tangente. Courbure et torsion rejoignent ainsi leur sens intuitif : courber et tordre un fil de fer.

$$\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} ,$$

vecteur unitaire tangent à l'arc γ; donc $\overrightarrow{\mathrm{N}}(s)$ est un *vecteur unitaire normal.* L'arc γ étant de classe C^2, $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ est fonction C^1 de s, par suite aussi $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ qui se déduit de $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ par une rotation constante.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{T}} = 1$ il vient $\overrightarrow{\mathrm{T}} \cdot (d\overrightarrow{\mathrm{T}}/s) = 0$ en dérivant par rapport à s ; ainsi $d\overrightarrow{\mathrm{T}}/ds$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{N}}$, d'où l'existence d'un scalaire C tel que $d\overrightarrow{\mathrm{T}}/ds = \mathrm{C}\overrightarrow{\mathrm{N}}$. De même il existe un scalaire λ tel que $d\overrightarrow{\mathrm{N}}/ds = \lambda\overrightarrow{\mathrm{T}}$; en dérivant l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{N}} = 0$ il vient

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathrm{N}}}{ds} + \frac{d\overrightarrow{\mathrm{T}}}{ds} \cdot \overrightarrow{\mathrm{N}} = 0 ,$$

d'où $\lambda = -\mathrm{C}$, ce qui établit les formules de Frenet.

On a donc

$$\frac{d\beta}{ds} = \overrightarrow{\mathrm{T}} , \ \frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{T}}}{ds} = \mathrm{C}\overrightarrow{\mathrm{N}}$$

d'où, par la formule de Taylor-Young, le développement limité au voisinage de s :

$$\beta(s+h) - \beta(s) = h\,\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) + \frac{h^2}{2}\mathrm{C}(s)\overrightarrow{\mathrm{N}}(s) + o(h^2) .$$

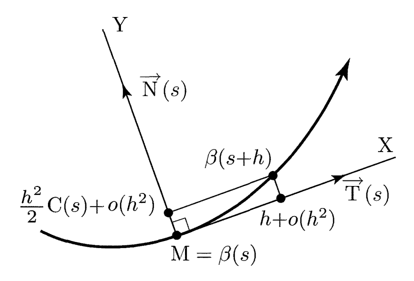


Fig. 137. Aspect local d'un arc paramétré (avec ici $\mathrm{C}(s) > 0$).

Supposons $\mathrm{C}(s) \neq 0$. Dans le repère orthonormé d'origine $\mathrm{M} = \beta(s)$ et de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{T}}(s)$, $\overrightarrow{\mathrm{N}}(s)$, où on note X, Y les coordonnées, l'aspect local de l'arc est donc celui de la parabole $\mathrm{X} = h$, $\mathrm{Y} = \mathrm{C}(s)h^2/2$, ou mieux celui du *cercle de courbure*, centré au centre de courbure et de rayon $\mathrm{R}(s) = 1/\mathrm{C}(s)$. Ce cercle a en effet pour équation

$$\mathrm{X}^2 + (\mathrm{Y} - \mathrm{R}(s))^2 = \mathrm{R}(s)^2 ,$$

d'où $\mathrm{Y} = \mathrm{R}(s) - \sqrt{\mathrm{R}(s)^2 - \mathrm{X}^2} = \mathrm{C}(s)\frac{\mathrm{X}^2}{2} + \mathrm{O}(\mathrm{X}^4)$ au voisinage de l'origine M.

Le signe de la courbure C donne la position de l'arc par rapport à la tangente, et sa valeur absolue $|\mathrm{C}| = \left\| d\overrightarrow{\mathrm{T}}/ds \right\|$ donne la vitesse de rotation de la tangente ; voir aussi la question 3.

2. En dérivant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ on a d'abord

$$\gamma' = s' \frac{d\beta}{ds} = s' \overrightarrow{\mathrm{T}} = (x', y')$$

d'où, par la rotation d'angle $\pi/2$,

$$s' \overrightarrow{\mathrm{N}} = (-y', x') \ .$$

Puis, en dérivant $s'\overrightarrow{\mathrm{T}}$ par rapport à t, on obtient

$$(x'', y'') = s''\overrightarrow{\mathrm{T}} + s'^2 \frac{d\overrightarrow{\mathrm{T}}}{ds} = s''\overrightarrow{\mathrm{T}} + s'^2 \mathrm{C}\overrightarrow{\mathrm{N}} \ ;$$

Le produit scalaire par $s'\overrightarrow{\mathrm{N}} = (-y', x')$ fait disparaître s'' et donne

$$s'^3 \mathrm{C} = (-y', x') \cdot (x'', y'') = x'y'' - y'x'' \ .$$

Comme $s'^2 = \|\gamma'\|^2 = x'^2 + y'^2$ on a finalement

$$\mathrm{C} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \ ,$$

où les dérivées sont prises par rapport à t.

Si $x = t$, l'arc est défini comme le *graphe* de $y = y(x)$ et on a $x' = 1$, $x'' = 0$, d'où

$$\mathrm{C} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)'$$

(dérivées par rapport à x).

3. D'après l'Exercice 100 question 1 il existe une fonction $\alpha : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)) \ , \text{ d'où } \overrightarrow{\mathrm{N}}(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$$

et immédiatement

$$\frac{d\overrightarrow{\mathrm{T}}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \overrightarrow{\mathrm{N}}(s) \ .$$

Par suite $\mathrm{C}(s) = d\alpha/ds$: *la courbure est la vitesse de rotation de la tangente* (et de la normale).

Inversement, si $s \mapsto \beta(s) = (x(s), y(s))$ est une paramétrisation par l'abscisse curviligne d'un arc de courbure donnée $\mathrm{C}(s)$ on doit avoir, avec les notations précédentes,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha(s) \ , \ \frac{dy}{ds} = \sin\alpha(s) \ , \ \frac{d\alpha}{ds} = \mathrm{C}(s) \ .$$

Par suite

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha_0 + \int_{s_0}^{s} \mathrm{C}(t)\,dt \\ x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\alpha(t)\,dt \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\alpha(t)\,dt \ ,\end{aligned}$$

où $s_0 \in \mathrm{J}$ est une origine fixée, et α_0, x_0, y_0 sont trois constantes quelconques. Ces égalités définissent bien un arc paramétré β de classe C^2 tel que $\|d\beta/ds\| = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{T}}(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, donc de courbure $\mathrm{C}(s)$. Les arcs obtenus pour différents choix des constantes se déduisent de l'un d'entre eux par rotations et translations, i.e. par un déplacement arbitraire du plan.

4. Soient $\overrightarrow{\mathrm{T}}(x,y)$ le vecteur unitaire tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{T}}(x,y), \overrightarrow{\mathrm{N}}(x,y)\right)$ soit une base orthonormée directe du plan, et $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 (donnée par l'Exercice 100 question 2) telle que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{T}}(x,y) &= (\cos\alpha(x,y), \sin\alpha(x,y)) \\ \overrightarrow{\mathrm{N}}(x,y) &= (-\sin\alpha(x,y), \cos\alpha(x,y)) \ .\end{aligned}$$

L'équation $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ définit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ (Théorème 5.10) que l'on peut paramétrer sous la forme $(x,y) = \gamma(t)$ au voisinage de (x_0, y_0), par exemple avec $t = x$ ou $t = y$ grâce au théorème des fonctions implicites. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ est normal à cette courbe, donc $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ lui est tangent. Quitte à changer t en $-t$, i.e. le sens de parcours sur la courbe, on peut supposer que $\overrightarrow{\mathrm{T}} = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$; on peut alors utiliser les notations et les résultats des questions précédentes.

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{N}} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\sin\alpha) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos\alpha) \\ &= -\cos\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \sin\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ &= -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{d\alpha}{ds} = -\mathrm{C}(s) \ ,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait établir.

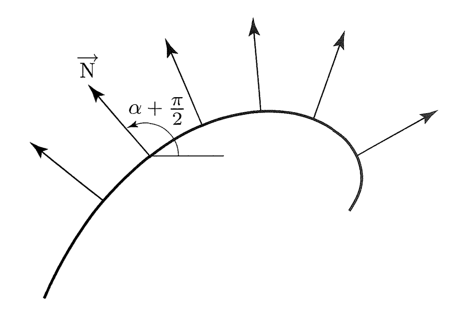


Fig. 138. Courbure et divergence des normales.

Exercice 106. ***Un lemme de division.*** **Soient $f, g_1, \ldots, g_k$ des fonctions numériques de classe C^∞ sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, les différentielles $Dg_1(0), \ldots, Dg_k(0)$ étant indépendantes.**

1. On suppose que les relations

$$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_k(x) = 0 \text{ entraînent } f(x) = 0 \ .$$

Montrer que f appartient (localement) à l'*idéal engendré* par $g_1, \ldots, g_k$, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $a_1, \ldots, a_k$, de classe C^∞ au voisinage de 0, telles que

$$f(x) = a_1(x)g_1(x) + \cdots + a_k(x)g_k(x) \ .$$

[On pourra prendre les g_i pour coordonnées et appliquer la formule de Taylor avec reste intégral.]

2. *Généralisation.* On suppose que f s'annule à l'ordre $m \geqslant 1$ sur la sous-variété des zéros communs aux g_i, c'est-à-dire

$$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_k(x) = 0 \text{ entraîne } \partial^\alpha f(x) = 0 \text{ pour } |\alpha| < m$$

(notation multi-indice). Comment peut-on préciser le résultat de 1 ?

Solution. 1. L'indépendance des $Dg_i(0)$ permet, d'après la version C^∞ du Corollaire 5.1, de compléter $g_1, \ldots, g_k$ par des fonctions $g_{k+1}, \ldots, g_n$ telles que les égalités

$$u_1 = g_1(x), \ldots, u_n = g_n(x)$$

définissent un changement C^∞ de coordonnées au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Notons

$$u = (u_1, \ldots, u_k) \ , \ v = (u_{k+1}, \ldots, u_n) \ , \ F(u, v) = f(x) \ .$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral sur les variables u on a

$$\begin{aligned} F(u,v) - F(0,v) &= \int_0^1 (D_u F)(tu,v)\, u\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{k} u_i \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(tu,v)\, dt \ . \end{aligned}$$

Comme $F(0,v) = 0$ par hypothèse, on obtient le résultat voulu en revenant aux variables x, avec

$$a_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(tu,v)\, dt \ , \ 1 \leqslant i \leqslant k \ ,$$

fonction C^∞ au voisinage de 0 par dérivation sous le signe somme (Exercice 40 question 1).

Remarque. L'hypothèse d'indépendance des $Dg_i(0)$ est essentielle : l'égalité $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$, mais x n'est pas divisible par x^2 au voisinage de l'origine...

2. Reprenons les notations et la méthode de 1. Par dérivation de fonctions composées, on voit que chaque dérivée partielle $\partial^\alpha F(u,v)$ est combinaison linéaire des $\partial^\beta f(x)$ avec $|\beta| \leqslant |\alpha|$. Il résulte de l'hypothèse que $\partial^\alpha F(0,v) = 0$ pour $|\alpha| \leqslant m-1$ d'où, en traduisant en notation multi-indice la formule de Taylor avec reste intégral sur les variables u,

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} (D_u^m F)(tu,v)(u)^m dt \\ &= \sum_{|\alpha|=m} u_1^{\alpha_1} \cdots u_k^{\alpha_k} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (\partial^\alpha F)(tu,v)\, dt \ . \end{aligned}$$

Il existe donc des fonctions $a_\alpha(x)$, de classe C^∞ au voisinage de l'origine, telles que

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) g_1(x)^{\alpha_1} \cdots g_k(x)^{\alpha_k} \ .$$

Exercice 107. ***Laplacien et moyennes.*** **Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on rappelle la formule d'intégration d'une fonction radiale :**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, dx_1 \cdots dx_n = S_n \int_0^\infty f(\rho) \rho^{n-1} d\rho \ ,$$

où S_n est la mesure de la sphère unité [6] (voir Exercice 32, compléments).

6. En prenant $f(\rho) = e^{-\rho^2}$, il est facile de montrer que $S_n = 2\Gamma(1/2)^n/\Gamma(n/2)$.

1. Soient A une matrice réelle $n \times n$ et $r > 0$. Établir l'égalité

$$\int_{\|x\| \leqslant r} \left({}^t x \mathrm{A} x\right) \, dx_1 \cdots dx_n = \frac{r^2 \mathrm{V}_n(r)}{n+2} \operatorname{tr} \mathrm{A} ,$$

où ^{t} est la transposition et $\mathrm{V}_n(r)$ le volume d'une boule de rayon r.

[On pourra se ramener au cas d'une matrice A symétrique, que l'on diagonalisera dans une base orthonormale, puis considérer le cas $\mathrm{A} = \mathrm{I}$.]

2. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes. On note $\mathrm{M}f(a, r)$ la moyenne de f sur la boule de centre a et de rayon r, et $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ le laplacien. En utilisant le développement de Taylor de f à l'ordre deux, déduire de 1 que

$$\mathrm{M}f(a, r) = f(a) + \frac{r^2}{2(n+2)} \Delta f(a) + o(r^2) .$$

3. Montrer qu'*une fonction* C^2 *qui possède la propriété de moyenne est harmonique* : si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, l'égalité $\mathrm{M}f(a, r) = f(a)$ (pour toute boule de centre a et de rayon r contenue dans U) entraîne $\Delta f = 0$ sur U.

4*. Montrer la réciproque de 3 pour $n = 2$.

[On pourra considérer la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{2\pi} f\left(a + \mathrm{R}_\theta x\right) \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

où R_θ est la rotation d'angle θ autour de l'origine, vérifier que $\Delta \widetilde{f} = \widetilde{\Delta f}$, $\mathrm{M}\widetilde{f}(0, r) = \mathrm{M}f(a, r)$ et, en exprimant le laplacien de $\widetilde{f}$ en coordonnées polaires, montrer que $\widetilde{f}$ est constante au voisinage de 0.]

Commentaire. *Une fonction de classe* C^2 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *est harmonique si et seulement si elle possède la propriété de moyenne*, i.e. si sa valeur en un point quelconque égale sa moyenne sur toute boule centrée en ce point. On montre ici l'implication « si » en dimension quelconque, et le « seulement si » en dimension deux – mais la méthode utilisée pourrait s'étendre à $\mathbb{R}^n$, voir complément à la fin.

Si on se limite à la dimension deux, ce résultat pourrait s'obtenir autrement, en exploitant le lien entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes d'une variable complexe : voir Cartan [9] p. 124-134.

Solution. 1. L'égalité demandée est linéaire par rapport à A, et trivialement vérifiée si A est antisymétrique (les deux membres sont nuls). Comme toute matrice carrée est somme d'une symétrique et d'une antisymétrique, il suffit de l'établir lorsque A est symétrique.

On peut alors diagonaliser A dans une base orthonormale : il existe une matrice de passage orthogonale P telle que le changement de variable $x = \mathrm{P}y$ sur $\mathbb{R}^n$ donne

$$ {}^t x \mathrm{A} x = {}^t y {}^t \mathrm{PAP} y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 , $$

où les λ_i sont les valeurs propres de A. Comme $\|x\| = \|y\|$ et

$$ dx_1 \cdots dx_n = |\det \mathrm{P}|\, dy_1 \cdots dy_n = dy_1 \cdots dy_n , $$

soit en bref $dx = dy$, on a

$$ \int_{\|x\| \leqslant r} \left({}^t x \mathrm{A} x\right) dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\|y\| \leqslant r} y_i^2 dy . $$

Les n intégrales $\int y_i^2 dy$ sont égales, par permutation de coordonnées (qui conserve $\|y\|$ et dy), d'où

$$ \int_{\|x\| \leqslant r} \left({}^t x \mathrm{A} x\right) dx = \mathrm{C} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{C} \operatorname{tr} \mathrm{A} , $$

où C ne dépend que de r et de n.

Pour $\mathrm{A} = \mathrm{I}$ on a en particulier

$$ n\mathrm{C} = \int_{\|x\| \leqslant r} \|x\|^2 dx = \mathrm{S}_n \int_0^r \rho^2 \rho^{n-1} d\rho = \mathrm{S}_n \frac{r^{n+2}}{n+2} . $$

D'autre part le volume de la boule $\|x\| \leqslant r$ est

$$ \mathrm{V}_n(r) = \int_{\|x\| \leqslant r} dx = \mathrm{S}_n \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \mathrm{S}_n \frac{r^n}{n} . $$

Finalement $\mathrm{C} = r^2 \mathrm{V}_n(r)/(n+2)$, d'où le résultat.

2. Par définition

$$ \mathrm{M}f(a, r) = \frac{1}{\mathrm{V}_n(r)} \int_{\|x\| \leqslant r} f(a + x)\, dx . $$

Pour évaluer ce nombre, on va intégrer sur la boule $\|x\| \leqslant r$ l'égalité de Taylor-Young à l'ordre deux en a :

$$ f(a + x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j + o\left(\|x\|^2\right) , $$

et diviser par $V_n(r)$ pour obtenir la moyenne sur la boule de centre a et de rayon r.

La constante $f(a)$ a pour moyenne $f(a)$. Les termes du premier ordre sont de moyenne nulle, car

$$\int_{\|x\|\leqslant r} x_i \, dx = 0$$

par changement de x en $-x$. La moyenne des termes du second ordre est

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{n+2}\Delta f(a) \ ,$$

en appliquant 1 à la matrice hessienne de f en a, de trace $\Delta f(a)$.

Enfin le reste $R(x) = o\left(\|x\|^2\right)$ a pour moyenne un $o(r^2)$. Soit en effet $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \alpha$ entraîne $|R(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|^2$, d'où

$$\left| \frac{1}{V_n(r)} \int_{\|x\|\leqslant r} R(x) \, dx \right| \leqslant \frac{1}{V_n(r)} \int_{\|x\|\leqslant r} \varepsilon r^2 \, dx = \varepsilon r^2 \text{ si } r \leqslant \alpha \ .$$

En réunissant tous ces termes on obtient le développement limité de la moyenne :

$$Mf(a,r) = f(a) + \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta f(a) + o(r^2) \ .$$

3. On a d'après 2

$$\Delta f(a) = 2(n+2) \lim_{r\to 0} \frac{Mf(a,r) - f(a)}{r^2} \ ,$$

d'où $\Delta f(a) = 0$ pour tout $a \in U$ si f a la propriété de moyenne.

4. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit a un point fixé de U, et soit $\rho > 0$ tel que le disque ouvert de centre a et de rayon ρ soit contenu dans U. La fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{2\pi} f\left(a + R_\theta x\right) \frac{d\theta}{2\pi} \ , \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

est alors de classe C^2 sur le disque $\|x\| < \rho$ et on a, par dérivation sous le signe somme (Exercice 40),

$$\Delta \widetilde{f}(x) = \int_0^{2\pi} \Delta_x \left(f\left(a + R_\theta x\right)\right) \frac{d\theta}{2\pi} \ .$$

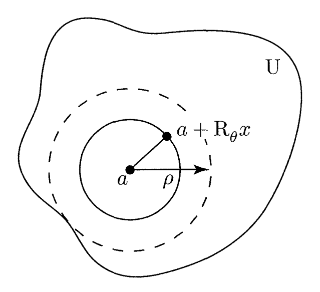


Fig. 139. Moyenne sur un cercle de centre a.

Or on a $\Delta_x\left(f\left(a+\mathrm{R}_\theta x\right)\right) = (\Delta f)\left(a+\mathrm{R}_\theta x\right)$ d'après l'Exercice 98 question 3 (l'application $x \mapsto a + \mathrm{R}_\theta x$ étant une isométrie du plan), ou par un calcul direct des dérivées partielles. Par suite le laplacien commute à l'opération $\widetilde{\ }$:

$$\Delta\widetilde{f}(x) = \widetilde{\Delta f}(x)\ .$$

De plus, pour $0 \leqslant r < \rho$,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}f(a,r) &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{\|x\|\leqslant r} f(a+x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{\|x\|\leqslant r} f(a+\mathrm{R}_\theta x)\,dx\end{aligned}$$

pour tout θ, car le disque $\|x\| \leqslant r$ et la mesure de Lebesgue dx du plan sont invariants par toute rotation R_θ. En prenant la moyenne en θ de 0 à 2π il vient, en permutant les intégrales,

$$\mathrm{M}f(a,r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\|x\|\leqslant r} \widetilde{f}(x)\,dx = \mathrm{M}\widetilde{f}(0,r)\ .$$

Enfin la fonction $\widetilde{f}$ est *radiale* : $\widetilde{f}(\mathrm{R}_\alpha x) = \widetilde{f}(x)$ pour tout α, comme le montre le changement de variable $\theta' = \theta + \alpha$ dans l'intégrale qui définit $\widetilde{f}$. Il existe donc une fonction g, de classe C^2 sur l'intervalle $]0,\rho[$, telle que $\widetilde{f}(x) = g(r)$ avec $r = \|x\|$. L'expression classique du laplacien de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires donne alors, pour $0 < r < \rho$,

$$\Delta\widetilde{f}(x) = g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) = \frac{1}{r}\left(rg'(r)\right)'\ .$$

Supposons maintenant f *harmonique dans* U. Les calculs précédents montrent que $\widetilde{f}$ est alors harmonique sur le disque $\|x\| < \rho$, et que $rg'(r)$ est constante sur l'intervalle $]0,\rho[$. Or on vérifie, en dérivant en r l'égalité $g(r) = \widetilde{f}(x)$, l'égalité

$$rg'(r) = \sum_{i=1}^{2} x_i \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x_i}(x)\ ,$$

qui montre que $rg'(r)$ tend vers 0 avec r. Cette fonction est donc identiquement nulle sur $]0, \rho[$. Finalement $g(r) = \widetilde{f}(x)$ est constante, égale à $\widetilde{f}(0)$ par continuité à l'origine ; en revenant à f cela s'écrit

$$f(a) = \int_0^{2\pi} f\left(a + \mathrm{R}_\theta x\right) \frac{d\theta}{2\pi} \text{ pour } \|x\| < \rho \ ,$$

ce qui est une première forme du résultat souhaité : la moyenne de f sur un cercle égale sa valeur au centre du cercle. On a aussi, $\widetilde{f}$ étant constante sur le disque $\|x\| < \rho$,

$$\mathrm{M}f(a,r) = \mathrm{M}\widetilde{f}(0,r) = \widetilde{f}(0) = f(a) \text{ pour } 0 \leqslant r < \rho \ ,$$

et f possède donc la propriété de moyenne dans U.

Complément. Comme signalé au début cette preuve, qui repose essentiellement sur l'invariance du laplacien par les isométries du plan, se généralise en dimension quelconque. Il suffit pour cela de définir $\widetilde{f}(x)$, moyenne de f sur la sphère de centre a et de rayon $\|x\|$, par

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\mathrm{K}} f(a + kx)\, dk \ ,$$

où la variable k parcourt le groupe compact $\mathrm{K} = \mathrm{SO}(n)$ des rotations autour de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, et dk est une « mesure invariante » sur K, normalisée par la condition $\int_{\mathrm{K}} dk = 1$. Pour $n = 2$ on avait simplement $dk = d\theta/2\pi$.

Exercice 108. ***Fonctions convexes (bis).*** **Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois différentiable sur U. Montrer que f est une fonction convexe sur U si et seulement si $\mathrm{D}^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point, i.e.**

$$\mathbf{D}^2 f(x)(h,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \geqslant 0 \text{ pour tous } x \in \mathrm{U} \text{ et } h \in \mathbb{R}^n.$$

[On pourra utiliser l'Exercice 42 question 1 et la formule de Taylor.]

Commentaire. Ce critère de convexité, très maniable, est bien connu en dimension un : une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive ou nulle. Voir aussi l'Exercice 119, en liaison avec la recherche d'extremum.

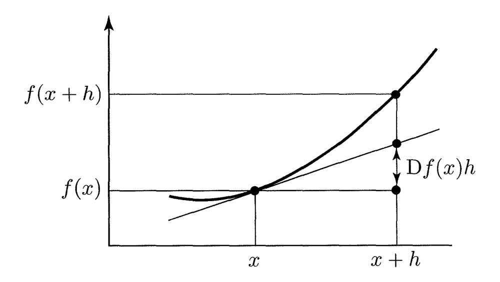


Fig. 140. Convexité de f.

Solution. On sait d'après l'Exercice 42 que la convexité de f sur U équivaut à

$$f(x+h) - f(x) - \mathrm{D}f(x)h \geqslant 0$$

pour tout $x \in \mathrm{U}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \mathrm{U}$.

Supposons f convexe et fixons $x \in \mathrm{U}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Pour t voisin de 0 dans $\mathbb{R}$ on a $x + th \in \mathrm{U}$ et, d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x+th) - f(x) - t\mathrm{D}f(x)h = \frac{t^2}{2}\mathrm{D}^2 f(x)(h,h) + o(t^2) \geqslant 0 \ .$$

En simplifiant par $t^2/2$ il vient $\mathrm{D}^2 f(x)(h,h) + o(1) \geqslant 0$, d'où

$$\mathrm{D}^2 f(x)(h,h) \geqslant 0$$

en faisant tendre t vers 0.

Réciproquement, supposons $\mathrm{D}^2 f(x)(h,h) \geqslant 0$ pour tous $x \in \mathrm{U}$, $h \in \mathbb{R}^n$.

- Si f est de classe C^2 sur U on a, par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x+h) - f(x) - \mathrm{D}f(x)h = \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x+th)(h,h)\, dt \geqslant 0$$

  si x et $x + h$ sont dans U ; par suite f est convexe dans U.
- Si f est seulement supposée deux fois différentiable sur U, on peut appliquer la formule de Taylor élémentaire à la fonction deux fois dérivable $g(t) = f(x + th)$, avec x et $x + h$ fixés dans U, d'où l'existence de $\tau \in \,]0,1[$ tel que

$$g(1) - g(0) - g'(0) = \frac{1}{2}g''(\tau) \ ,$$

  c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) - \mathrm{D}f(x)h = \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(x+\tau h)(h,h) \ .$$

  Le second membre est positif par hypothèse, d'où le résultat.

Exercice 109. ***Lemme de Morse à deux variables.*** **Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. On suppose la forme quadratique hessienne $\mathrm{D}^2 f(0,0)$** ***non dégénérée.***

1. Montrer qu'il existe trois fonctions α, β, γ de classe C^1 sur U telles que

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = \alpha(x,y)x^2 + 2\beta(x,y)xy + \gamma(x,y)y^2 \; .$$

[On pourra appliquer la formule de Taylor avec reste intégral.]

2. On suppose ici la forme $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ de signature $(+-)$, et $f''_{x^2}(0,0)$ ou $f''_{y^2}(0,0)$ non nul. Déduire de 1, en s'inspirant de la réduction de Gauss des formes quadratiques, qu'il existe deux fonctions u et v telles que

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = u(x,y)^2 - v(x,y)^2 \; ,$$

et que l'application $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$ soit un difféomorphisme de classe C^1 entre deux voisinages de l'origine.

3. Montrer que le résultat de 2 reste valable si $f''_{x^2}(0,0) = f''_{y^2}(0,0) = 0$. [On pourra utiliser le changement $\mathrm{X} = (x+y)/2$, $\mathrm{Y} = (x-y)/2$.] Comment adapter ces résultats au cas des signatures $(++)$ et $(--)$?

4. ***Application.*** **On suppose $\mathrm{D}f(0,0) = 0$, et $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ de signature $(+-)$. Montrer à l'aide du difféomorphisme φ que** ***la courbe de niveau d'équation $f(x,y) = f(0,0)$ admet un point double à l'origine,*** **et que le couple des tangentes en ce point a pour équation**

$$f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{y^2}(0,0)y^2 = 0 \; .$$

Exemple **: $f(x,y) = x^2 - y^2 + (y^4/4)$ (cf. Exercice 89).**

Commentaire. Le lemme de Morse établi aux questions 2 et 3 donne une expression simple de la formule de Taylor à l'ordre deux, sans aucun reste, à condition d'effectuer sur les termes du second ordre un changement de coordonnées qui s'inspire de la réduction de Gauss des formes quadratiques.

Ce résultat permet notamment l'étude précise de la position locale par rapport à son plan tangent d'une surface $z = f(x,y)$ (Exercice 111). On l'applique ici à une étude de point double d'une courbe de niveau de f ; voir aussi l'Exercice 110 pour une approche différente (mais s'appuyant aussi sur la formule de Taylor avec reste intégral), et le chapitre 7 pour une discussion générale sur les courbes de niveau en liaison avec les problèmes d'extremum.

Le lemme de Morse sera étendu à n variables à l'Exercice 114.

Solution. 1. La formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral donne

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y & \\ &= \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(tx,ty)((x,y),(x,y))\,dt \\ &= \alpha(x,y)x^2 + 2\beta(x,y)xy + \gamma(x,y)y^2 \ , \end{aligned}$$

où α, β, γ apparaissent en explicitant $\mathrm{D}^2 f$, à savoir

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \int_0^1 (1-t) f''_{x^2}(tx,ty)\,dt \\ \beta(x,y) &= \int_0^1 (1-t) f''_{xy}(tx,ty)\,dt \\ \gamma(x,y) &= \int_0^1 (1-t) f''_{y^2}(tx,ty)\,dt. \end{aligned}$$

Ces trois fonctions sont de classe C^1 sur U, par dérivation sous le signe somme (Exercice 40). Dans la suite, il sera utile d'observer que

$$\alpha(0,0) = \frac{1}{2} f''_{x^2}(0,0)\ ,\ \beta(0,0) = \frac{1}{2} f''_{xy}(0,0)\ ,\ \gamma(0,0) = \frac{1}{2} f''_{y^2}(0,0)\ .$$

2. Quitte à échanger x et y, et à changer f en $-f$, on peut supposer par exemple $f''_{x^2}(0,0) > 0$. Par continuité on a donc $\alpha > 0$ au voisinage de l'origine, ce qui permet d'effectuer la « réduction de Gauss » :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \alpha \left(x + \frac{\beta}{\alpha} y \right)^2 - \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha} y^2\ ,$$

avec α, β, γ fonctions de (x, y). Comme

$$\det \mathrm{D}^2 f(0,0) = 4(\alpha\gamma - \beta^2)(0,0) < 0$$

par l'hypothèse sur la signature, le coefficient $(\beta^2 - \alpha\gamma)/\alpha$ reste strictement positif au voisinage de l'origine. Si on définit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sqrt{\alpha(x,y)} \left(x + \frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)} y \right) \\ v(x,y) &= \sqrt{\frac{\beta(x,y)^2 - \alpha(x,y)\gamma(x,y)}{\alpha(x,y)}}\, y\ , \end{aligned}$$

on obtient donc deux fonctions u, v de classe C^1 au voisinage de l'origine et

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = u(x,y)^2 - v(x,y)^2\ .$$

Enfin l'application $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$ est un changement de coordonnées au voisinage de $(0,0)$: son déterminant jacobien *à l'origine* se calcule en effet très simplement

$$\begin{aligned}\det \mathrm{D}\varphi(0,0) &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \beta/\sqrt{\alpha} \\ 0 & \sqrt{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha} \end{pmatrix} (0,0) \\ &= \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\,(0,0) > 0 \ ,\end{aligned}$$

d'où la conclusion par le théorème d'inversion locale.

3. *Si les deux dérivées* $f''_{x^2}(0,0)$ *et* $f''_{y^2}(0,0)$ *sont nulles*, on doit avoir $f''_{xy}(0,0) \neq 0$ puisque la forme quadratique $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ est non dégénérée, et la signature est $(+-)$. On peut alors se ramener à la situation de 2 par le changement linéaire de variables $x = \mathrm{X}+\mathrm{Y}$, $y = \mathrm{X}-\mathrm{Y}$. En notant $g(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = f(x,y)$ on a en effet

$$g''_{\mathrm{X}^2} = f''_{x^2} + 2f''_{xy} + f''_{y^2} \ , \ g''_{\mathrm{XY}} = f''_{x^2} - f''_{y^2} \ , \ g''_{\mathrm{Y}^2} = f''_{x^2} - 2f''_{xy} + f''_{y^2} \ ,$$

d'où $g''_{\mathrm{X}^2}(0,0) \neq 0$. Le résultat de 2 s'applique à g, d'où une égalité analogue pour f.

Si $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ *est de signature* $(++)$ on a forcément $\alpha(0,0) > 0$ et on peut reprendre la méthode de réduction de Gauss, ce qui conduit ici à définir

$$u = \sqrt{\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}y\right) \ , \ v = \sqrt{\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha}}\, y \ ,$$

d'où

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = u(x,y)^2 + v(x,y)^2 \ .$$

Si $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ *est de signature* $(--)$ on applique ce qui précède à $-f$.

En résumé, *si* $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ *est non dégénérée de signature* $(\varepsilon,\eta) = (\pm,\pm)$ *on peut construire un changement de coordonnées* $(x,y) \mapsto (u,v)$ *au voisinage de l'origine tel que*

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = \varepsilon u(x,y)^2 + \eta v(x,y)^2 \ .$$

Remarque. Cet énoncé ne s'étendrait pas tel quel au cas où $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ est dégénérée : la signature est $(+\,0)$ pour la fonction $f(x,y) = x^2 + y^3$, qui ne peut cependant pas s'écrire $f(x,y) = u(x,y)^2$ pour d'évidentes raisons de signe. Voir Demazure [14] p. 120 ou Pham [33] p. 17 pour des précisions sur ce cas.

4. Si $\mathrm{D}f(0,0) = 0$ et $\mathrm{D}^2 f(0,0)$ est de signature $(+-)$ il existe, d'après 2 et 3, un voisinage V de l'origine tel que, pour $(x,y) \in \mathrm{V}$,

$$(f(x,y) = f(0,0)) \Longleftrightarrow (u(x,y) + v(x,y) = 0 \text{ ou } u(x,y) - v(x,y) = 0) \ .$$

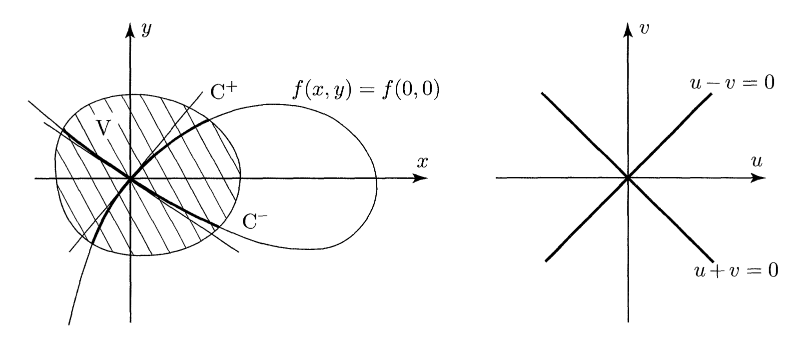


Fig. 141. Point double de la courbe de niveau, en coordonnées (x, y) et en coordonnées (u, v).

La courbe de niveau de f se décompose donc en deux courbes C^+, resp. C^-, définies implicitement par $u + v = 0$, resp. $u - v = 0$: il y a *point double à l'origine.* Comme la différentielle

$$D(u+v) = (u'_x + v'_x, u'_y + v'_y)$$

ne peut pas s'annuler sur V (sinon la matrice jacobienne

$$D\varphi = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

aurait deux lignes proportionnelles), on voit que C^+ est une sous-variété du plan ; de même pour C^- (mais la courbe de niveau de f n'en est pas une !).

Notons $a = u'_x(0,0)$, $b = u'_y(0,0)$, $c = v'_x(0,0)$, $d = v'_y(0,0)$ pour abréger ; le choix de v fait en 2 donnait $c = 0$, mais peu importe ici. La tangente à l'origine à C^+, resp. C^-, a pour équation

$$(a+c)x + (b+d)y = 0 \text{ , resp. } (a-c)x + (b-d)y = 0 \text{ ,}$$

et l'équation du couple de ces tangentes s'obtient en multipliant membre à membre ces deux équations, soit

$$(ax+by)^2 - (cx+dy)^2 = 0 \text{ .}$$

Or $u(x, y) = ax + by + o(\|(x, y)\|)$ et $v(x, y) = cx + dy + o(\|(x, y)\|)$ par définition de la différentielle, d'où

$$u(x,y)^2 - v(x,y)^2 = (ax+by)^2 - (cx+dy)^2 + o(\|(x,y)\|^2) \text{ .}$$

Par identification avec le développement de Taylor-Young de $f(x, y) - f(0, 0)$ à l'ordre deux, on en déduit que l'équation du couple des tangentes au point double de la courbe de niveau est

$$f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{y^2}(0,0)y^2 = 0 \text{ .}$$

Ce sont simplement les termes d'ordre deux de la formule de Taylor.

Remarque. Il est instructif de comparer cela à la situation plus banale où $\mathrm{D}f(0,0) \neq 0$: le théorème des fonctions implicites s'applique alors à f au voisinage de l'origine, et la courbe de niveau de f est lisse à l'origine avec la tangente d'équation

$$f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y = 0 ,$$

formée des termes d'ordre un de la formule de Taylor.

Exemple. La courbe d'équation

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents, considérée à l'Exercice 89. Le développement de Taylor à l'origine est ici en évidence ; ses termes d'ordre deux montrent qu'il y a point double à l'origine, avec pour tangentes

$$x^2 - y^2 = 0 ,$$

soit $y = x$ et $y = -x$.

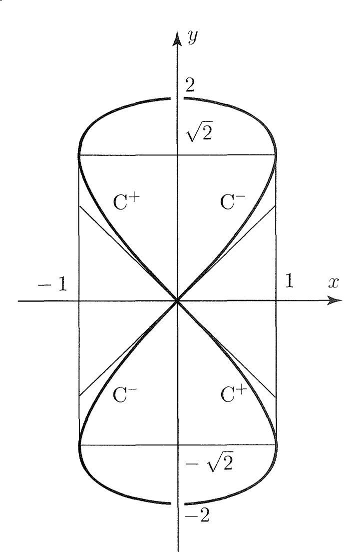


Fig. 142. La courbe $x^2 - y^2 + (y^4/4) = 0$.

Il est d'ailleurs facile d'expliciter ici directement un choix de fonctions u et v : on a

$$f(x,y) = u^2 - v^2 \text{ avec } u(x,y) = x \ , \ v(x,y) = y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \ ,$$

qui permettent un tracé précis de C^+ et C^-, d'équations respectives $u = -v$ et $u = v$. On vérifiera que l'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}\times]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$.

Exercice 110. ***Éclatement d'un point double.*** **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. On suppose $f(0,0) = 0$ et $Df(0,0) = 0$. Pour $x, t \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, soit**

$$F(x,t) = \frac{1}{x^2} f(x,tx) .$$

1. Montrer que F se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $F(0,t)$.

[On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.]

On suppose désormais que la forme quadratique $D^2 f(0,0)$ est de signature $(+-)$, avec $f''_{y^2}(0,0) \neq 0$.

2. Montrer que l'équation $F(0,t) = 0$ admet deux racines réelles distinctes t_1 et t_2, et que l'équation $F(x,t) = 0$ définit deux fonctions implicites $t = \varphi_1(x)$, resp. $t = \varphi_2(x)$, au voisinage de $x = 0$, $t = t_1$, resp. $x = 0$, $t = t_2$.

3. En déduire qu'au voisinage de l'origine on a

$$(f(x,y) = 0) \iff (y = x\varphi_1(x) \text{ ou } y = x\varphi_2(x)) .$$

[On pourra appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre deux, et séparer le cas $x = 0$.]

4. Montrer que l'équation des tangentes au point double à l'origine de la courbe $f(x,y) = 0$ est

$$f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{y^2}(0,0)y^2 = 0 .$$

5. ***Exemple.*** **Dessiner, au voisinage de l'origine, l'ensemble défini par l'équation**

$$x^2 - y^2 + 2x^3 + y^3 = 0 .$$

On précisera les tangentes au point double et la position de la courbe par rapport à ces tangentes.

Commentaire. Le théorème des fonctions implicites ne peut s'appliquer tel quel en un point double, puisqu'il donnerait une branche de courbe et non deux. La méthode d'*éclatement* utilisée ici procède d'une idée simple : le point double n'est en somme qu'un effet de perspective, apparu en projetant sur le plan xOy la courbe (vraie sous-variété de $\mathbb{R}^3$) définie par les équations en (x,y,t) :

$$F(x,t) = 0 \ , \ y - tx = 0 .$$

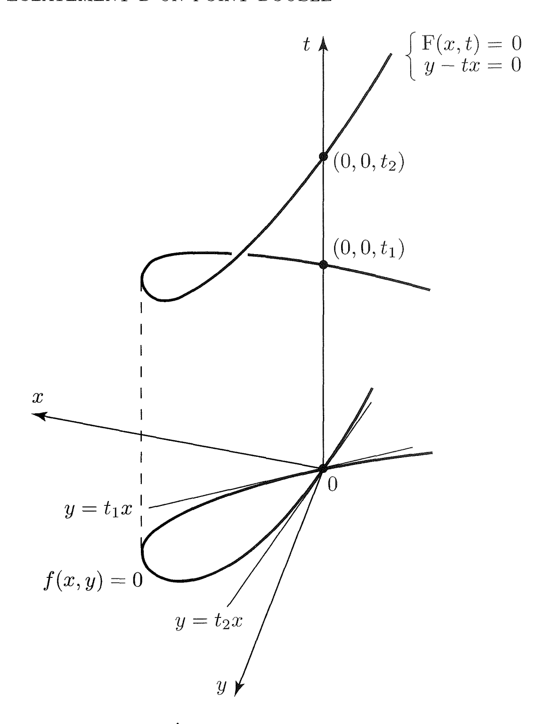


Fig. 143. Éclatement d'un point double.

Il suffit pour s'en convaincre d'observer sous différents angles une hélice circulaire (ressort à boudin) : on peut voir apparaître points doubles ou points de rebroussement en perspective, alors que l'hélice est lisse en tout point ! Sous l'hypothèse de l'énoncé, le théorème des fonctions implicites s'applique sans difficulté au voisinage de chacun des points $(0, 0, t_1)$ et $(0, 0, t_2)$ de la courbe de $\mathbb{R}^3$; on a ainsi séparé les deux branches au point double.

La variable t correspond à une direction de droite dans le plan $x\text{O}y$. Il serait donc préférable de la considérer comme un point de l'espace projectif de dimension un ; l'éclatement se définit en fait dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ (voir Lafontaine [28] p. 82).

Le lemme de Morse donne une autre méthode d'étude d'un point double, par un difféomorphisme qui transforme localement la courbe en deux droites (Exercice 109).

Solution. 1. Compte tenu des hypothèses, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un à l'origine se réduit à

$$f(h) = \int_0^1 (1 - \lambda)\text{D}^2 f(\lambda h)(h, h)\, d\lambda \ , \ h \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Pour $h = (x, tx)$, elle s'explicite selon $f(x, tx) = x^2\text{F}(x, t)$, avec

$$\mathrm{F}(x,t) = \int_0^1 (1-\lambda)\left(f''_{x^2}(\lambda x, \lambda tx) + 2tf''_{xy}(\lambda x, \lambda tx) + t^2 f''_{y^2}(\lambda x, \lambda tx)\right) d\lambda.$$

Comme f est de classe C^3, la fonction F ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ d'après les théorèmes élémentaires sur les intégrales à paramètres (Exercice 40), et prolonge $f(x,tx)/x^2$. Pour $x = 0$ et $t \in \mathbb{R}$ on a en particulier

$$\mathrm{F}(0,t) = \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}(0,0) + 2tf''_{xy}(0,0) + t^2 f''_{y^2}(0,0)\right) .$$

2. Sous les hypothèses de l'énoncé l'équation $\mathrm{F}(0,t) = 0$ est effectivement du second degré et son discriminant, égal à $-\det \mathrm{D}^2 f(0,0)$, est strictement positif. Elle admet donc deux racines réelles distinctes t_1 et t_2 :

$$\mathrm{F}(0,t) = \frac{1}{2} f''_{y^2}(0,0)(t-t_1)(t-t_2) .$$

Comme $\mathrm{F}(0,t_i) = 0$ et $\mathrm{F}'_t(0,t_i) \neq 0$ pour $i = 1,2$, le théorème des fonctions implicites s'applique à F avec le point de départ $(0,t_i)$: il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et une fonction $\varphi_i :]-\alpha,\alpha[\to]t_i-\beta, t_i+\beta[$, de classe C^1, tels que pour $i = 1,2$

$$(|x| < \alpha, |t-t_i| < \beta \text{ et } \mathrm{F}(x,t) = 0) \iff (|x| < \alpha \text{ et } t = \varphi_i(x)) .$$

Remarque. On montre de même que la courbe de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$\mathrm{F}(x,t) = 0 \ , \ y - tx = 0$$

est lisse en chacun des points $(0,0,t_i)$, et que ces équations définissent implicitement y et t fonctions de x au voisinage de ce point.

3. On veut maintenant revenir à x, y et f, ce qui demande un peu de soin. *L'idée* est bien sûr que l'équation $f(x,y) = 0$ équivaut à $\mathrm{F}(x,t) = 0$, avec $t = y/x$ si x n'est pas nul. Pour appliquer le résultat de 2 à la résolution de cette équation, il faut toutefois s'assurer qu'un tel t est nécessairement voisin de l'une des racines t_1, t_2 de l'équation $\mathrm{F}(0,t) = 0$, autrement dit qu'il n'y a pas d'autre branche de courbe que les deux attendues.

La formule de Taylor-Young à l'origine s'écrit

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{y^2}(0,0)y^2\right) + o(x^2+y^2) .$$

En comparant avec les expressions de $\mathrm{F}(0,t)$, cela s'écrit encore

$$f(x,y) = \frac{1}{2} f''_{y^2}(0,0)\left((y-t_1x)(y-t_2x) + r(x,y)\right) ,$$

où le reste $r(x,y)$ est un $o(x^2+y^2)$.

En reprenant les nombres α et β introduits en 2, notons

$$\mathrm{T} = \max_{i=1,2}\left(|t_i|+\beta\right) \ , \ \varepsilon = \frac{\beta^2}{1+2\beta^2+2\mathrm{T}^2} \ ;$$

ainsi $0<\varepsilon<1/2$, et $|t-t_i|<\beta$ entraîne $|t|<\mathrm{T}$. Quitte à diminuer le α de 2 (sans changer β) on peut supposer que

$$|x|<\alpha \text{ et } |y|<\mathrm{T}\alpha \text{ entraînent } |r(x,y)| \leqslant (x^2+y^2)\varepsilon \ .$$

Pour $|x|<\alpha$ et $|y|<\mathrm{T}\alpha$ l'égalité $f(x,y)=0$ entraîne, d'après ce qui précède,

$$|(y-t_1x)(y-t_2x)| \leqslant (x^2+y^2)\varepsilon \ .$$

- Si $x=0$ cela se réduit à $y^2 \leqslant \varepsilon y^2$, dont la seule solution est $y=0$.
- Si $x\neq 0$, notons $t=y/x$. Il vient

$$|t-t_1|\cdot|t-t_2| \leqslant \left(1+t^2\right)\varepsilon \ .$$

  Si $|t-t_i|$ désigne le plus petit des deux nombres $|t-t_1|$ et $|t-t_2|$, on a ainsi

$$(t-t_i)^2 \leqslant \left(1+t^2\right)\varepsilon \leqslant \left(1+2(t-t_i)^2+2t_i^2\right)\varepsilon$$

  d'où

$$(t-t_i)^2 \leqslant \frac{\left(1+2t_i^2\right)\varepsilon}{1-2\varepsilon} < \frac{\left(1+2\mathrm{T}^2\right)\varepsilon}{1-2\varepsilon} = \beta^2 \ .$$

  Alors $|x|<\alpha$, $|t-t_i|<\beta$ et $f(x,y)=x^2\mathrm{F}(x,t)=0$, ce qui entraîne $y=x\varphi_i(x)$ d'après 2.

Cela nous conduit à l'équivalence suivante :

$$\left(|x|<\alpha, |y|<\mathrm{T}\alpha \text{ et } f(x,y)=0\right) \iff \left(|x|<\alpha \text{ et } \left(y=x\varphi_1(x) \text{ ou } y=x\varphi_2(x)\right)\right) \ .$$

En effet l'implication $\Rightarrow$ s'obtient en regroupant le cas $x=0$ et le cas $x\neq 0$ examinés précédemment. L'implication $\Leftarrow$ s'obtient de même en séparant deux cas :

- si $x=0$ et $y=x\varphi_i(x)$ alors $y=0$ et $f(x,y)=0$;
- si $0<|x|<\alpha$ et $y=x\varphi_i(x)$ alors $t=y/x$ vérifie $|t-t_i|<\beta$, $\mathrm{F}(x,t)=0$ d'après 2, d'où $|t|<\mathrm{T}$, $|y|=|tx|<\mathrm{T}\alpha$ et $f(x,y)=x^2\mathrm{F}(x,t)=0$.

La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet donc deux branches distinctes passant par l'origine : il y a *point double.*

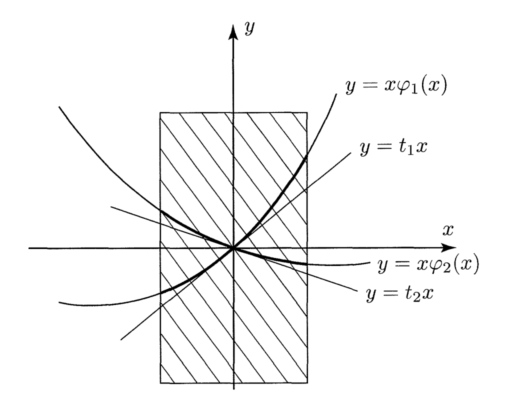


Fig. 144. Séparation des deux branches au point double.

4. La dérivée à l'origine de la fonction $y = x\varphi_i(x)$ est $\lim_{x\to 0} y/x = t_i$, d'où l'équation de la tangente à cette branche : $y - t_i x = 0$.

L'équation du couple des tangentes est donc

$$(y - t_1 x)(y - t_2 x) = 0 \ .$$

On a vu que cela s'écrit aussi

$$f''_{x^2}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{y^2}(0,0)y^2 = 0 \ .$$

Ce sont les *termes d'ordre deux du développement de Taylor de f au point double.*

5. *Exemple.* Les termes d'ordre deux donnent ici $x^2 - y^2 = 0$. Il y a donc point double à l'origine, avec pour tangentes les bissectrices ($t_1 = 1$, $t_2 = -1$).

Pour avoir un développement limité à l'ordre deux des branches $y = x\varphi_i(x)$ on a besoin de développer les φ_i à l'ordre un, c'est-à-dire de calculer les dérivées $\varphi_i'(0)$. On a ici

$$\mathrm{F}(x,t) = \frac{1}{x^2} f(x, tx) = 1 - t^2 + 2x + t^3 x = 0 \ ,$$

et les dérivées des fonctions implicites $t = \varphi_i(x)$ s'en déduisent en dérivant par rapport à x :

$$-2tt' + 2 + 3t^2 t' x + t^3 = 0 \ .$$

Pour $x = 0$, $t = \pm 1$ on obtient donc $\varphi_1'(0) = 3/2$, $\varphi_2'(0) = -1/2$, d'où les deux branches

$$y = x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \ , \ y = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ ,$$

au-dessus et au-dessous de leurs tangentes respectives.

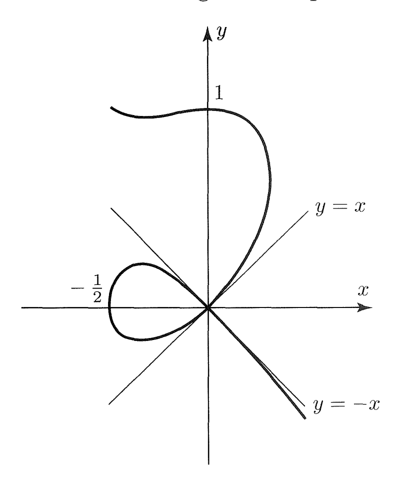


Fig. 145. Point double de $x^2 - y^2 + 2x^3 + y^3 = 0$.

Remarque. Sur cet exemple simple on pourrait résoudre en x l'équation $\mathrm{F}(x,t) = 0$, d'où la représentation paramétrique rationnelle

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^3 + 2} \ , \ y = t\frac{t^2 - 1}{t^3 + 2}$$

qui permet de tracer la courbe.

Exercice 111. *Étude affine locale d'une surface.* Soit S la surface d'équation $z = f(x,y)$, où f est de classe C^3 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$. En supposant la forme quadratique $\mathrm{D}^2 f(a)$ *non dégénérée*, discuter la position relative de S par rapport à son plan tangent au point $(a, f(a))$:
1. par la formule de Taylor-Young ;
2. par le lemme de Morse (Exercice 109).

Solution. Au-dessus du point $a + h$ de $\mathbb{R}^2$ la différence d'altitude entre la surface S et le plan tangent P est

$$\delta(h) = f(a + h) - (f(a) + \mathrm{D}f(a)h) \ .$$

1. La formule de Taylor-Young à l'ordre deux en a donne

$$\delta(h) = \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(a)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \ ,$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon(h)$ tend vers 0 avec h.

Si $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est de signature* $(++)$, il est commode de choisir

$$\|h\| = \left(\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(a)(h,h)\right)^{1/2}$$

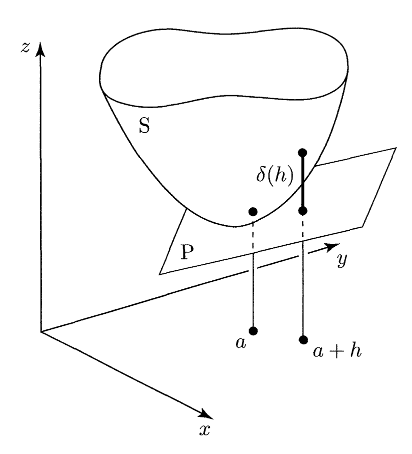


Fig. 146. Surface $z = f(x, y)$ et plan tangent : cas où $D^2f(a)$ est de signature $(++)$.

pour norme sur le plan, ce qui donne

$$\delta(h) = (1 + \varepsilon(h)) \|h\|^2 \ ,$$

strictement positif pour tout $h \neq 0$ suffisamment voisin de 0. Ainsi S est strictement au-dessus de P au voisinage du point $(a, f(a))$, sauf en ce point.

Si $D^2f(a)$ *est de signature* $(--)$, on voit de même que S est strictement au-dessous de P au voisinage de $(a, f(a))$, sauf en ce point.

Si $D^2f(a)$ *est de signature* $(+-)$, il existe deux vecteurs h_1 et h_2 tels que

$$D^2f(a)(h_1, h_1) > 0 \ , \ D^2f(a)(h_2, h_2) < 0 \ .$$

Comme

$$\delta(th_i) \sim \frac{t^2}{2} D^2f(a)(h_i, h_i) \ , \ i = 1, 2 \ ,$$

lorsque t tend vers 0, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\delta(th_1) > 0 \ , \ \delta(th_2) < 0$$

pour t réel tel que $0 < |t| < \alpha$. Au voisinage de $(a, f(a))$ une partie de S est au-dessus du plan tangent et l'autre au-dessous.

2. Le lemme de Morse va redonner immédiatement les résultats de 1 et permettre de les préciser. Une translation ramène a en $(0, 0)$ d'où, par l'Exercice 109 question 3,

$$\delta(h) = \varepsilon u(h)^2 + \eta v(h)^2 \ ,$$

où $(\varepsilon, \eta) = (\pm, \pm)$ est la signature de $D^2f(a)$ et l'application $h \mapsto (u(h), v(h))$ est un difféomorphisme de classe C^1 entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^2$. En particulier u et v ne s'annulent simultanément que pour $h = 0$.

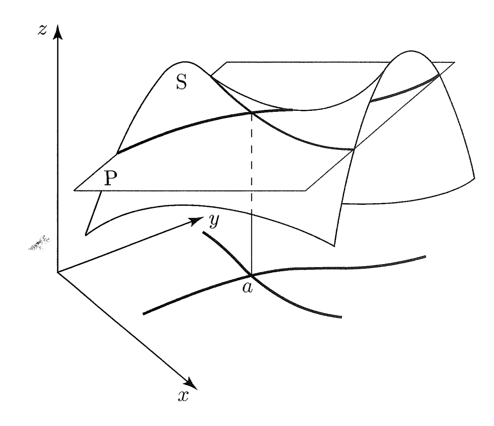


Fig. 147. Cas où $\mathrm{D}^2 f(a)$ est de signature $(+-)$.

Si $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est de signature* $(++)$, *resp.* $(--)$, on a donc $\delta(h) > 0$, resp. $\delta(h) < 0$, pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.

Si $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est de signature* $(+-)$ on a $\delta(h) = u^2 - v^2$ et la surface traverse son plan tangent selon une courbe admettant un *point double* en $(a, f(a))$, dont la projection sur le plan $x\mathrm{O}y$ se décompose en les deux courbes $u = v$ et $u = -v$ (voir Exercice 109 question 4).

Remarque. Il n'y a pas de réponse générale lorsque $\mathrm{D}^2 f(a)$ est dégénérée : la position de S par rapport à P dépend alors des termes suivants du développement de Taylor, comme le montrent les exemples de $x^2 + y^3$, $x^2 + y^4$ etc.

Exercice 112. ***Étude métrique locale d'une surface.*** **Soit S une hypersurface de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ définie par une paramétrisation $x = \varphi(u)$, où $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathrm{D}\varphi$ est injective. On note N un vecteur unitaire normal à S en $x_0 = \varphi(u_0)$.**

1. On projette orthogonalement le point $x = \varphi(u_0 + h)$ de S, en y sur l'espace affine tangent en x_0, et en z sur la normale. Montrer que, pour $h \to 0$,

$$\|x - x_0\|^2 = \Phi_1(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

$$\|y - x_0\|^2 = \Phi_1(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

$$\mathrm{N} \cdot (z - x_0) = \frac{1}{2}\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right) \ ,$$

où Φ_1 et Φ_2 sont deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{n-1}$ que l'on explicitera (*première et deuxième formes quadratiques fondamentales* de S en x_0).

2. Soit γ un arc de S passant par x_0, défini par une fonction $t \longmapsto u(t)$ de classe C^2 sur un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $u(0) = u_0$, $u'(0) = v \neq 0$; soit

s une abscisse curviligne sur γ. Montrer que

$$\mathrm{N}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}(0)=\frac{\Phi_2(v)}{\Phi_1(v)}\ .$$

On note $\mathrm{C_N}(v)$ ce nombre (*courbure normale* de γ en x_0). Quelles valeurs peut prendre $\mathrm{C_N}(v)$ lorsque v parcourt $\mathbb{R}^{n-1}$?

[On pourra utiliser l'équation $\det(\mathrm{A}_2-\lambda\mathrm{A}_1)=0$, où A_1 et A_2 sont les matrices des deux formes quadratiques.]

3. On appelle *courbure de Gauss* de S en x_0 le produit des racines λ de l'équation précédente. Calculer la courbure de Gauss en un point quelconque de la surface $z=f(x,y)$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution. On notera α,β des indices variant de 1 à $n-1$, i un indice de 1 à n, et $\partial_\alpha\varphi_i=\partial\varphi_i/\partial u_\alpha$.

1. Fixons une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On a

$$x-x_0=\varphi(u_0+h)-\varphi(u_0)=\mathrm{D}\varphi(u_0)h+o(\|h\|)\ ,$$

d'où, en prenant le carré scalaire dans $\mathbb{R}^n$,

$$\|x-x_0\|^2=\Phi_1(h)+o\left(\|h\|^2\right)$$

en notant

$$\begin{aligned}\Phi_1(h)&=\|\mathrm{D}\varphi(u_0)h\|^2\\&=\sum_{\alpha,\beta}\left(\partial_\alpha\varphi(u_0)\cdot\partial_\beta\varphi(u_0)\right)h_\alpha h_\beta\\&=\sum_{i,\alpha,\beta}\partial_\alpha\varphi_i(u_0)\partial_\beta\varphi_i(u_0)h_\alpha h_\beta\ .\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{D}\varphi(u_0)$ est injective, la forme quadratique Φ_1 est définie positive sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

La formule de Taylor-Young donne d'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{N}\cdot(z-x_0)&=\mathrm{N}\cdot(x-x_0)\\&=\mathrm{N}\cdot\left(\mathrm{D}\varphi(u_0)h+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi(u_0)(h,h)+o\left(\|h\|^2\right)\right)\ .\end{aligned}$$

Le premier produit scalaire est nul car $\mathrm{D}\varphi(u_0)h$ est un vecteur tangent en x_0 à S, d'où

$$\mathrm{N}\cdot(z-x_0)=\frac{1}{2}\Phi_2(h)+o\left(\|h\|^2\right)$$

en notant Φ_2 la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n-1}$ définie par

$$\begin{aligned}\Phi_2(h) &= \mathrm{N} \cdot \mathrm{D}^2\varphi(u_0)(h,h) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} (\mathrm{N} \cdot \partial_\alpha \partial_\beta \varphi(u_0))\, h_\alpha h_\beta = \sum_{i,\alpha,\beta} \mathrm{N}_i \partial_\alpha \partial_\beta \varphi_i(u_0) h_\alpha h_\beta \ .\end{aligned}$$

Enfin $\|z - x_0\| = |\mathrm{N} \cdot (z - x_0)| = \mathrm{O}\left(\|h\|^2\right)$ d'où, par le théorème de Pythagore,

$$\|y - x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 - \|z - x_0\|^2 = \Phi_1(h) + o\left(\|h\|^2\right) \ .$$

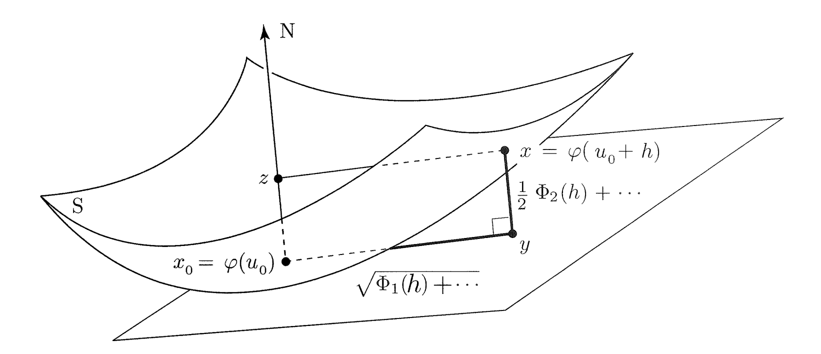


Fig. 148. Les deux formes quadratiques fondamentales d'une hypersurface.

Remarques. Supposons $\mathbb{R}^n$ orienté. Si $n = 2$ (cas d'une courbe paramétrée $x = \varphi(u)$ du plan), on peut supposer que N est le vecteur normal défini à l'Exercice 105. Les formes Φ_1, resp. Φ_2, n'ont ici qu'un seul coefficient, à savoir

$$\|\varphi'(u_0)\|^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \text{, resp. } \mathrm{N} \cdot \varphi''(u_0) = \mathrm{C}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 ,$$

où s est une abscisse curviligne, C est la courbure et les calculs sont effectués en u_0 ; cela résulte de l'expression de la dérivée seconde obtenue en résolvant la question 2 de l'Exercice 105. Dans la question suivante nous allons généraliser ce lien de la deuxième forme fondamentale avec la courbure.

Si $n = 3$ (cas d'une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$), on peut définir N par

$$\mathrm{N} = \frac{\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi}{\|\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi\|} ,$$

où les dérivées sont calculées en u_0. Plus généralement, on vérifie que l'égalité

$$\mathrm{N} \cdot \mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{\det \Phi_1}} \det(\partial_1 \varphi, \dots, \partial_{n-1}\varphi, \mathrm{X})$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ définit un vecteur unitaire normal à l'hypersurface S (cf. Exercice 32, complément (i)).

2. Notons $'$ les dérivées par rapport au paramètre t. Comme $x = \gamma(t) = \varphi(u(t))$ on a $\gamma'(0) = \mathrm{D}\varphi(u_0)v \neq 0$ et on peut paramétrer l'arc (au voisinage de $t = 0$) par une abscisse curviligne $s(t)$, avec $s(0) = 0$, $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Le changement de paramètre de t à s permet d'écrire

$$x' = \frac{dx}{ds} s' \ , \ x'' = \frac{dx}{ds} s'' + \frac{d^2x}{ds^2} s'^2 \ ,$$

et le passage de t à u donne d'autre part

$$x'' = \mathrm{D}\varphi(u) u'' + \mathrm{D}^2\varphi(u)(u', u') \ .$$

Dans chacune de ces deux expressions de x'' le premier terme est, pour $t = s = 0$, un vecteur tangent à S en x_0. Le produit scalaire par N conduit donc à l'égalité

$$\mathrm{N} \cdot x'' = \mathrm{N} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} s'^2 = \mathrm{N} \cdot \mathrm{D}^2\varphi(u)(u', u') \ .$$

Pour $t = 0$ on a

$$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = v \ , \ s'(0)^2 = \|\gamma'(0)\|^2 = \|\mathrm{D}\varphi(u_0)v\|^2 = \Phi_1(v) \ ,$$

d'où

$$\mathrm{N} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}(0) = \frac{\Phi_2(v)}{\Phi_1(v)} = \mathrm{C_N}(v) \ .$$

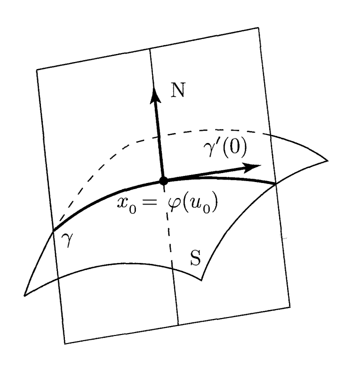


Fig. 149. Section normale de S.

Remarque. Le nombre $C_N(v)$ a une interprétation géométrique simple dans le cas particulier où γ est une *section normale* de S, i.e. la courbe obtenue en coupant S par un 2-plan P passant par x_0 et contenant N. Si on oriente P pour que les vecteurs $\gamma'(0) = D\varphi(u_0)v$ et N forment un système orthogonal direct, on voit que $C_N(v)$ *est la courbure orientée de cette section normale* en x_0 (voir remarque à la fin de la question 1).

Dans le cas général, $C_N(v)$ s'appelle *courbure normale* de γ en x_0 ; il est remarquable qu'elle ne dépende que de v, i.e. de la direction de la tangente en x_0 à γ. Étudions maintenant sa variation avec v.

La forme quadratique Φ_1 est définie positive, et on peut diagonaliser simultanément Φ_1 et Φ_2 par changement de base : si A_1 et A_2 sont les matrices de Φ_1 et Φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$, il existe une matrice de passage P telle que ${}^tPA_1P = I$ et que ${}^tPA_2P$ soit diagonale, d'éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Ces réels λ_α sont les racines de l'équation

$$\det\left({}^tPA_2P - \lambda I\right) = \det\left({}^tP\left(A_2 - \lambda A_1\right)P\right) = 0 \ ,$$

équivalente à

$$\det\left(A_2 - \lambda A_1\right) = 0 \ ,$$

ou encore à l'équation caractéristique de $A_2A_1^{-1}$. En notant (v_α) les composantes de v dans la nouvelle base de $\mathbb{R}^{n-1}$ on a

$$\Phi_1(v) = \sum_\alpha v_\alpha^2 \ , \ \Phi_2(v) = \sum_\alpha \lambda_\alpha v_\alpha^2 \ , \ C_N(v) = \frac{\sum \lambda_\alpha v_\alpha^2}{\sum v_\alpha^2} \ .$$

Lorsque v parcourt $\mathbb{R}^{n-1}$, la courbure normale $C_N(v)$ prend donc toute valeur comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs propres λ_α. Pour $n = 2$ (cas d'une courbe plane paramétrée) il n'y a qu'une seule valeur propre, égale à la courbure de la courbe en x_0.

3. Plus généralement, les λ_α sont appelées les *courbures principales* de S en x_0. Leur somme, resp. leur produit, est la *courbure moyenne*, resp. la *courbure de Gauss* (ou *courbure totale*) de S en ce point. Ce sont donc

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha = \operatorname{tr}\left(A_2A_1^{-1}\right) \ , \text{ resp. } \prod_\alpha \lambda_\alpha = \frac{\det A_2}{\det A_1} = \frac{\det \Phi_2}{\det \Phi_1} \ .$$

Exemple. La surface $z = f(x,y)$ de $\mathbb{R}^3$ est paramétrée par $u = (x,y)$ selon

$$(x,y,z) = \varphi(x,y) = (x,y,f(x,y)) \ ;$$

la fonction f est supposée de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Rappelons les notations de Monge

$$p = f'_x \ , \ q = f'_y \ , \ r = f''_{x^2} \ , \ s = f''_{xy} \ , \ t = f''_{y^2} \ .$$

La théorie précédente s'applique, puisque

$$\mathrm{D}\varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

est de rang deux. Calculons en un point (x, y) quelconque (qui ne sera pas répété dans les formules). Soit $v = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2$; la première forme s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &= \|(\mathrm{D}\varphi)v\|^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + (p\mathrm{X} + q\mathrm{Y})^2 \\ &= \left(1 + p^2\right)\mathrm{X}^2 + 2pq\mathrm{XY} + \left(1 + q^2\right)\mathrm{Y}^2 , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det \Phi_1 &= \left(1 + p^2\right)\left(1 + q^2\right) - (pq)^2 \\ &= 1 + p^2 + q^2 . \end{aligned}$$

Ensuite $\mathrm{D}^2\varphi$ est une application bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et on a, en écrivant les composantes en ligne par commodité,

$$\left(\mathrm{D}^2\varphi\right)(v, v) = \left(0, 0, r\mathrm{X}^2 + 2s\mathrm{XY} + t\mathrm{Y}^2\right) .$$

En prenant pour vecteur unitaire normal

$$\mathrm{N} = \frac{\varphi'_x \wedge \varphi'_y}{\left\|\varphi'_x \wedge \varphi'_y\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(-p, -q, 1) ,$$

il vient

$$\Phi_2(v) = \mathrm{N} \cdot \left(\mathrm{D}^2\varphi\right)(v, v) = \frac{r\mathrm{X}^2 + 2s\mathrm{XY} + t\mathrm{Y}^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\det \Phi_2 = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2} .$$

La courbure de Gauss de la surface au point (x, y, z) est donc

$$\frac{rt - s^2}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^2} .$$

Complément. Une autre approche intéressante de la courbure vient de l'*application de Gauss*, qui à chaque point x de l'hypersurface associe un vecteur unitaire normal $\mathrm{N}(x)$. La différentielle de cette application donne une application linéaire $\mathrm{DN}(x)$ de l'espace vectoriel tangent en x à S dans l'espace vectoriel tangent en $\mathrm{N}(x)$ à la sphère unité. Ces hyperplans, tous deux orthogonaux à $\mathrm{N}(x)$, peuvent être identifiés et $\mathrm{DN}(x)$ peut être vu

comme un endomorphisme de cet espace tangent. On montre alors que les courbures principales λ_α en x sont les valeurs propres[7] de l'endomorphisme $-\mathrm{DN}(x)$; sa trace donne la courbure moyenne, et son déterminant la courbure de Gauss de S en x. Ce lien entre courbure et variation des normales généralise le résultat obtenu pour les courbes à l'Exercice 105. Pour approfondir le sujet, voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [31] p. 497, Valiron [39] p. 451, et surtout do Carmo [7] chapitre 3.

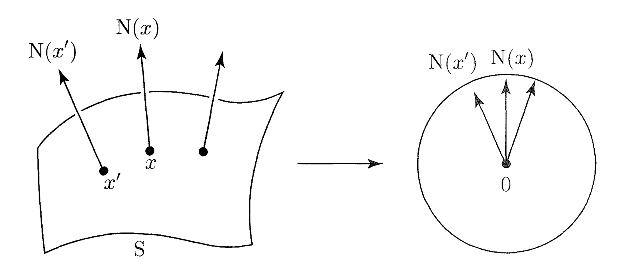


Fig. 150. L'application de Gauss.

Exercice 113. ***Méthode de Laplace.*** **Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a < b \leqslant \infty$), $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a, b[$ pour un certain réel t_0. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.**

On recherche un équivalent pour $t \to +\infty$ de l'intégrale

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\, dx \; .$$

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, montrer que

$$\mathrm{F}(t) \sim \frac{f(0)}{t} \; .$$

[On pourra couper en $\int_0^\alpha$ et $\int_\alpha^b$, et étudier la première intégrale par convergence dominée.]

2. Si $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$, montrer que

$$\mathrm{F}(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t} \; .$$

[On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y$ et utiliser 1.]

7. Elles sont donc indépendantes du choix d'une représentation paramétrique de l'hypersurface.

3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, montrer que

$$\mathrm{F}(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{f(0)}{\sqrt{t}} .$$

[Même indication qu'en 1.]
4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que

$$\mathrm{F}(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}} .$$

[On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ et utiliser 3.]
5. *Application.* Donner un équivalent pour $t \longrightarrow +\infty$ de

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t dx .$$

Commentaire. Il est remarquable que les résultats de 2 et 4 ne fassent intervenir que les propriétés locales de φ et f en a ; on suppose ici $f(a) \neq 0$ mais, si $f(a)$ était nul, on ferait appel au développement de Taylor de f en a. Cela s'explique aisément (voir heuristique ci-dessous), et justifie la présence en ces pages « différentielles » d'un tel exercice classique (et important) de calcul intégral. Cette *méthode de Laplace* permet l'étude asymptotique de diverses intégrales comportant un exposant qui tend vers l'infini. Dans l'exemple célèbre de la *formule de Stirling* (question 5), on voit ainsi que l'étrange facteur $\sqrt{2\pi}$ apparaît en intégrant une gaussienne e^{-x^2}, où le x^2 provient d'un développement de Taylor à l'ordre deux.

Une variante utile concerne les intégrales de la forme

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b e^{-it\varphi(x)} f(x)\, dx ;$$

c'est la *méthode de la phase stationnaire.* Toutes ces méthodes s'étendent à des intégrales multiples.

On pourra approfondir le sujet dans Erdélyi [21] chapitre 2 ou de Bruijn [5] chapitre 4.

La solution ci-dessous, par convergence dominée de Lebesgue, suit de près Faraut [22] p. 95. Elle a le mérite d'éviter les ε et les encadrements un peu lourds des preuves plus « élémentaires » que l'on trouve par exemple dans Dieudonné [17] p. 122 ou Chambert-Loir *et al.* [41] p. 186.

Heuristique. Dans les quatre situations considérées la fonction φ croît strictement sur $[a, b[$; pour t grand, la fonction $e^{-t\varphi}$ est donc rapidement décroissante à partir de sa valeur en $x = a$. Ceci suggère que l'essentiel de

l'intégrale $\mathrm{F}(t)$ provient d'un petit intervalle $[a, a+\alpha[$, sur lequel on pourra utiliser les expressions approchées données par la formule de Taylor

$$f(x) \simeq f(a) \text{ et } \quad \begin{array}{c} \varphi(x) \simeq \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) \ , \\ \text{resp. } \varphi(x) \simeq \varphi(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a) \ , \end{array}$$

selon que $\varphi'(a)$ est nul ou non. À nouveau les intégrales ainsi simplifiées auront sensiblement même valeur sur $[a, a+\alpha[$ et sur $[a, \infty[$, d'où finalement

$$\mathrm{F}(t) \simeq e^{-t\varphi(a)} \int_a^\infty e^{-t(x-a)\varphi'(a)} f(a)\, dx = \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t} \ ,$$

respectivement

$$\mathrm{F}(t) \simeq e^{-t\varphi(a)} \int_a^\infty e^{-t(x-a)^2\varphi''(a)/2} f(a)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}} \ .$$

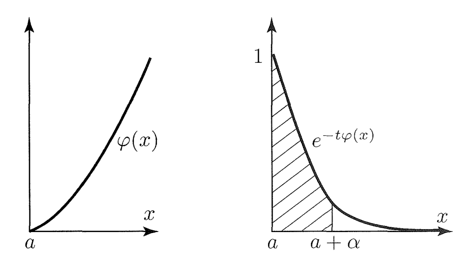


Fig. 151. Heuristique de la méthode de Laplace : cas où $\varphi(a) = 0, \varphi'(a) > 0$.

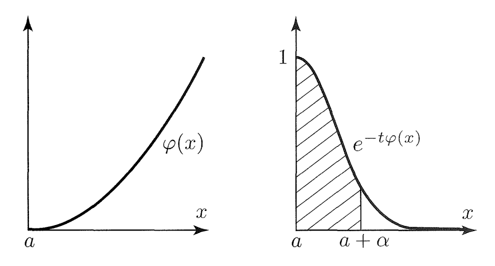


Fig. 152. Cas où $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0, \varphi''(a) > 0$.

Solution. Dans les questions 1 à 4, la fonction φ est croissante ; par suite, pour $t \geqslant t_0$, $a \leqslant x < b$,

$$\begin{aligned} \left|e^{-t\varphi(x)} f(x)\right| &= e^{-(t-t_0)\varphi(x)} \left|e^{-t_0\varphi(x)} f(x)\right| \\ &\leqslant e^{-(t-t_0)\varphi(a)} \left|e^{-t_0\varphi(x)} f(x)\right| \ , \end{aligned}$$

et l'intégrale $F(t)$ converge pour tout $t \geqslant t_0$.

Pour simplifier les notations on supposera $t_0 = 0$; on peut toujours s'y ramener en remplaçant $t - t_0$ par t et $e^{-t_0 \varphi} f$ par f.

1. Comme f est continue à l'origine elle est bornée au voisinage : il existe $M > 0$ et $\alpha \in]0, b[$ tels que $|f(x)| \leqslant M$ pour $0 \leqslant x \leqslant \alpha$. Alors, pour $t > 0$,

$$t \int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x)\, dx = \int_0^{t\alpha} e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right) du \to \int_0^{\infty} e^{-u} f(0)\, du = f(0)$$

lorsque $t \to \infty$. Le passage à la limite sous l'intégrale est justifié par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, applicable grâce à l'inégalité de domination

$$\left| e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right) \chi_{[0,t\alpha]}(u) \right| \leqslant M e^{-u} \text{ pour } u \geqslant 0, t > 0$$

(où χ désigne la fonction caractéristique), la fonction e^{-u} étant intégrable sur $[0, \infty[$. Ainsi

$$\int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x)\, dx \sim \frac{f(0)}{t}$$

pour $t \to \infty$. De plus

$$\left| \int_{\alpha}^{b} e^{-tx} f(x)\, dx \right| \leqslant e^{-t\alpha} \int_0^b |f(x)| dx$$

est à décroissance exponentielle vers 0, d'où l'équivalent demandé en assemblant les deux parties de l'intégrale.

2. D'après les hypothèses l'application $x \mapsto y = \varphi(x) - \varphi(a)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$. Soit ψ l'application réciproque ; il vient

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty} f(\psi(y)) \psi'(y)\, dy \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\psi'(0)}{t}$$

d'après 1, d'où le résultat compte tenu de $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = 1/\varphi'(a)$.

3. On reprend la méthode et les notations de 1. D'une part l'intégrale

$$\sqrt{t} \int_0^{\alpha} e^{-tx^2} f(x)\, dx = \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du$$

tend vers

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} f(0)\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$$

par convergence dominée : si $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$ sur $[0, \alpha]$ on a

$$\left| e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) \chi_{[0,\alpha\sqrt{t}]}(u) \right| \leqslant \mathrm{M} e^{-u^2}$$

pour $u \geqslant 0$, $t > 0$. D'autre part

$$\left| \int_\alpha^b e^{-tx^2} f(x)\, dx \right| \leqslant e^{-t\alpha^2} \int_0^b |f(x)| dx \ .$$

par suite

$$\mathrm{F}(t) \sim \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}} \ .$$

4. D'après les hypothèses, l'application $x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ est un difféomorphisme C^1 de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$. En effet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \sim \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2 \varphi''(a)/2}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$$

lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, et la dérivée dy/dx est donc strictement positive et continue jusqu'en $x = a$. On a ainsi $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ (lemme de Morse à une variable !).

Soit $x = \psi(y)$ l'application réciproque. Il vient

$$\mathrm{F}(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\psi'(y)\, dy \sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi} f(\psi(0))\psi'(0)}{2\sqrt{t}}$$

d'après 3, d'où le résultat compte tenu de $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = \sqrt{2/\varphi''(a)}$.

5. Heuristique. L'importance de l'exemple justifie qu'on revienne sur l'heuristique ! La fonction $x \mapsto e^{-x} x^t$ atteint son maximum au point $x = t$, et on s'attend à ce que la contribution essentielle à l'intégrale vienne d'un voisinage de ce point. Le changement de variable $x = t(u+1)$, avec $t > 0$ fixé, ramène au cas d'un maximum atteint au point $u = 0$, indépendant du paramètre t, d'où

$$\Gamma(t+1) = t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-t\varphi(u)} du$$

avec $\varphi(u) = 1 + u - \ln(1+u)$; c'est une intégrale du type précédent.

Pour u voisin de 0 on a par développement limité

$$\varphi(u) \simeq 1 + \frac{u^2}{2} \ ,$$

ce qui suggère que, pour t grand,

$$\Gamma(t+1) \simeq t^{t+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-tu^2/2} du = t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t} \ .$$

En particulier, pour n entier tendant vers l'infini,

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \ .$$

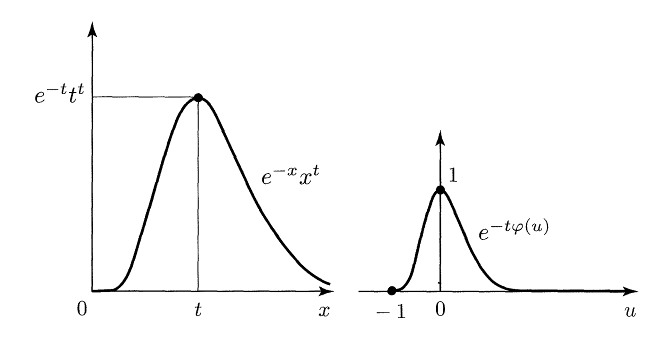


Fig. 153. Formule de Stirling : les fonctions $e^{-x}x^t$ et $e^{-t\varphi(u)}$.

Solution. Il suffit pour rendre cela rigoureux d'appliquer 4, avec $\varphi(0) = \varphi''(0) = 1$, $f = 1$ et $t_0 > 0$, à chacune des deux intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-t\varphi(u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \ ;$$

pour la seconde on change u en $-u$ avant d'appliquer 4. Il vient en ajoutant

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$$

pour $t \to \infty$, d'où pour t entier l'équivalent classique de $\Gamma(t+1) = t!$

Remarque. On procédera de même chaque fois que le point a où $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ est un point intérieur à l'intervalle d'intégration, au lieu d'en être une extrémité comme en 4.

Exercice 114. ***Lemme de Morse à n variables.*** **Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que 0 est un *point critique quadratique non dégénéré* de f, c'est-à-dire que $\mathrm{D}f(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $\mathrm{D}^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.**

Montrer qu'il existe un difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2 \ .$$

[On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et l'Exercice 66.]

Commentaire. Comme en deux variables à l'Exercice 109, la fonction f devient par changement de coordonnées une simple forme quadratique (formule de Taylor sans reste !). Le résultat s'étend immédiatement au cas où $\mathrm{D}f(0) \neq 0$, en remplaçant $f(x)$ par $g(x) = f(x) - f(0) - \mathrm{D}f(0)x$.

On trouvera dans Berger et Gostiaux [4] p. 153-157 un survol des applications topologiques de ce résultat (« théorie de Morse »). Pour d'autres preuves du lemme de Morse voir Lafontaine [28] p. 112 (où φ s'obtient en construisant une famille à un paramètre de difféomorphismes), ou Pham [33] p. 17 (où le changement de coordonnées s'obtient en n étapes, faisant apparaître successivement chacun des $\pm u_i^2$).

Solution. La formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral s'écrit au voisinage de 0

$$f(x) - f(0) = {}^t x \mathrm{Q}(x) x$$

où $\mathrm{Q}(x)$ est la matrice symétrique

$$\mathrm{Q}(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(tx)\, dt \ ,$$

fonction C^1 de x. D'après l'Exercice 66 question 2 il existe une matrice inversible $\mathrm{M}(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\mathrm{Q}(x) = {}^t\mathrm{M}(x)\mathrm{Q}(0)\mathrm{M}(x) \ ,$$

d'où

$$f(x) - f(0) = {}^t y \mathrm{Q}(0) y \ , \text{ avec } y = \mathrm{M}(x)x \ .$$

Or $\mathrm{Q}(0) = (1/2)\mathrm{D}^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et il existe donc un changement linéaire de coordonnées $y = \mathrm{A}u$, où A est une matrice inversible, tel que

$${}^t y \mathrm{Q}(0) y = {}^t u\, {}^t\mathrm{A}\mathrm{Q}(0)\mathrm{A}u = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2 \ ,$$

ce qui donne à f l'expression voulue.

Enfin l'application $x \mapsto y = \mathrm{M}(x)x$ a pour différentielle à l'origine $\mathrm{M}(0)$, matrice inversible. D'après le théorème d'inversion locale, c'est un difféomorphisme C^1 entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$; il en est de même de l'application $x \mapsto u$, puisque A est inversible.

Exercice 115. ***Théorème de Whitney.*** **On appelle *support* d'une fonction numérique (définie sur un espace topologique) l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas, c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est identiquement nulle.**

1. Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(t) = e^{-1/t} \text{ si } t > 0 \ , \ \psi(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0 \ .$$

Montrer que ψ appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. On suppose l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive, dont le support soit la boule unité.

[On pourra prendre $\varphi_n(x) = \psi\left(1 - \|x\|^2\right)$.]

3. Montrer qu'on peut toujours mettre un éléphant dans un boa[8] : étant donnés deux intervalles compacts $[a, d]$ et $[b, c]$ strictement emboîtés (avec $a < b < c < d$), il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $[b, c]$ et de support $[a, d]$.

[On pourra considérer successivement les fonctions

$$\alpha(t) = \psi(t)\psi(1-t) \ , \ \beta(t) = \left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)\left(\int_0^1 \alpha(s)ds\right)^{-1} \ ,$$

$$f(x) = \beta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\beta\left(\frac{d-x}{d-c}\right) \ .]$$

4. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, avec $F \neq \mathbb{R}^n$. Montrer que le complémentaire de F est réunion d'une suite de boules ouvertes $B(a_k, r_k)$.

5. En déduire que tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles (*théorème de Whitney*).

[On pourra considérer la série

$$f(x) = \sum_k \lambda_k \varphi_n\left(\frac{x - a_k}{r_k}\right) \ ,$$

où φ_n est la fonction définie en 2 et les coefficients λ_k seront choisis convenablement.]

Commentaire. Les fonctions du type de celles construites aux questions 2 et 3 (« fonctions plateau ») sont un outil important en analyse (régularisation par convolution, unité approchée, théorie des distributions... ; voir Zuily et Queffélec [40] p. 314 sq., et l'Exercice 116 ci-dessous) et en géométrie différentielle (passage du local au global grâce à une partition C^∞ de l'unité ; voir Lafontaine [28] p. 87 et 204, Berger et Gostiaux [4] p. 19 et 117).

Le théorème de Whitney (question 5) a de quoi surprendre les moins blasés d'entre nous. Une équation du type $f(x) = 0$, où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *continue*, définit évidemment un fermé de $\mathbb{R}^n$; inversement tout fermé

8. Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*, Gallimard 1943, chapitre I.

F s'obtient ainsi (penser à la fonction $f(x) = d(x, \mathrm{F}) = \inf_{y \in \mathrm{F}} \|x - y\|$). Le résultat de 5 est que l'ensemble des zéros d'une fonction *indéfiniment différentiable* n'a rien de plus particulier que celui d'une fonction *continue* arbitraire !

La situation serait bien différente en supposant de plus que la différentielle $\mathrm{D}f(x)$ ne s'annule jamais : l'ensemble des zéros de f est alors une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (Théorème 5.10), localement difféomorphe à un hyperplan. Elle serait différente aussi dans le cadre des fonctions *analytiques réelles* : pour $n = 1$ par exemple, l'ensemble des zéros de f est alors soit $\mathbb{R}$ entier, soit formé de points isolés (Zuily et Queffélec [40] p. 290).

Solution[9]**. 1.** D'abord ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et toutes ses dérivées sont nulles pour $t < 0$. Pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a, par une récurrence facile,

$$\psi^{(k)}(t) = \mathrm{P}_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t}$$

avec $\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = 1$, $\mathrm{P}_{k+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2\left(\mathrm{P}_k(\mathrm{X}) - \mathrm{P}'_k(\mathrm{X})\right)$, d'où résulte que P_k est un polynôme de degré $2k$.

On en déduit par récurrence que, pour tout k, la fonction ψ est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\psi^{(k)}(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$: c'est vrai pour $k = 0$ et, si c'est vrai au rang k, on a

$$\frac{1}{t}\left(\psi^{(k)}(t) - \psi^{(k)}(0)\right) = \begin{cases} \frac{1}{t}\mathrm{P}_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0\ , \end{cases}$$

qui tend vers 0 avec t ; par suite $\psi^{(k+1)}(0) = 0$ et la propriété est établie au rang $k + 1$. Ainsi ψ est indéfiniment dérivable, donc de classe C^∞, sur $\mathbb{R}$ entier.

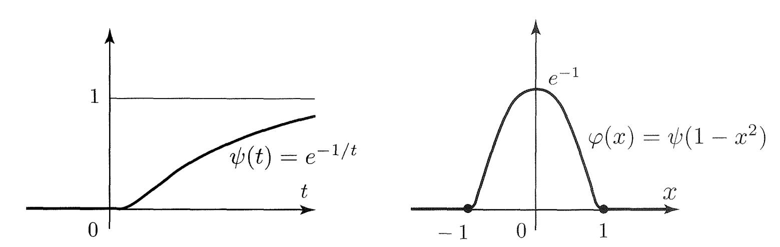


Fig. 154. Les fonctions ψ et φ.

2. La fonction composée

$$\varphi_n(x) = \psi\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

9. Avec mes excuses aux Lecteurs de la première édition, où l'on trouvait ici une bien curieuse « solution » ...

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, non nulle si et seulement si $\|x\| < 1$; son support est donc la boule unité (fermée).

3. D'après 1 la fonction α est C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, de support $[0, 1]$. Son graphe a même allure que celui de φ_1 ; on vérifie d'ailleurs que $\alpha(t) = \psi(t(1-t)) = (\varphi_1(2t-1))^4$.

L'intégrale $\int_0^1 \alpha(s)ds$ est strictement positive et β est C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus $\beta(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, β est strictement croissante sur $[0, 1]$, $\beta(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$, et $\beta(t)$ est strictement positif si et seulement si $t > 0$.

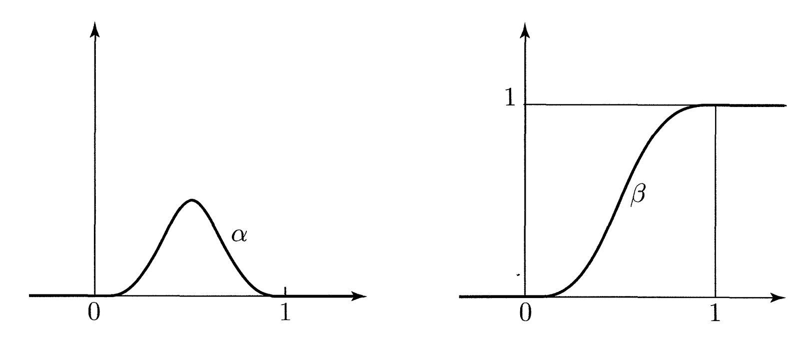


Fig. 155. Les fonctions α et β.

Alors $f(x) = \beta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\beta\left(\frac{d-x}{d-c}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, comprise entre 0 et 1, égale à 1 si $b \leqslant x \leqslant c$, non nulle si et seulement si $a < x$ et $x < d$; le support de f est donc $[a, d]$.

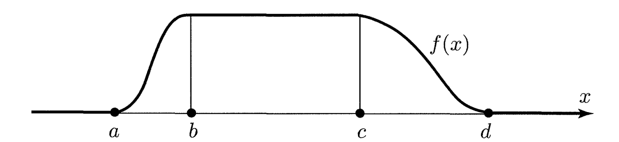


Fig. 156. La fonction f, ou l'éléphant dans un boa.

4. En dimension un il suffit d'observer que l'ouvert non vide $\mathbb{R}\backslash F$ est réunion de ses composantes connexes, qui sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints, en nombre fini ou dénombrable (choisir un rationnel dans chacune...).

En dimension n notons $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des points à coordonnées rationnelles de l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash F$, et $r_k = d(a_k, F) > 0$ le rayon de la plus grande boule ouverte de centre a_k contenue dans Ω. Pour chaque $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$, et il existe k tel que $\|x - a_k\| < r/2$; par suite

$$x \in B(a_k, r/2) \subset B(x, r) \subset \Omega ,$$

d'où $r/2 \leqslant r_k$ et $x \in \mathrm{B}(a_k, r_k)$. Ceci établit l'égalité

$$\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{F} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{B}(a_k, r_k) \ ,$$

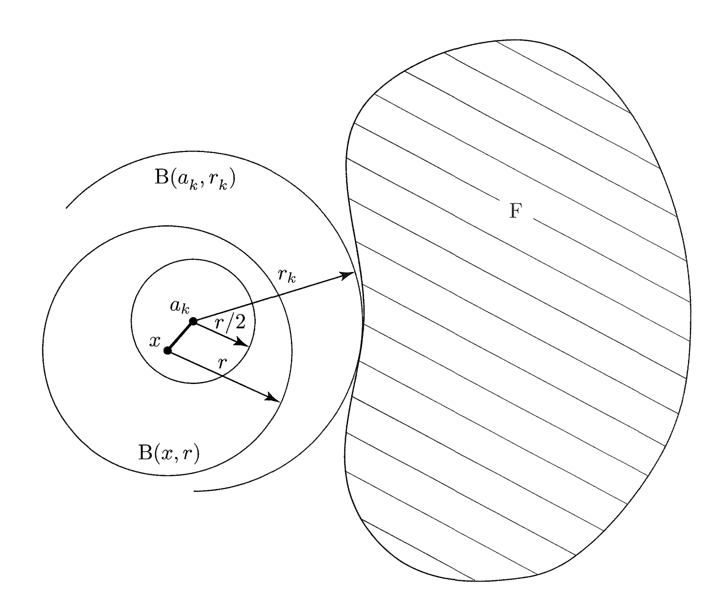


Fig. 157. Le complémentaire de F est réunion des $\mathrm{B}(a_k, r_k)$.

5. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$ la question est trivialement résolue par la fonction $f = 0$.

Sinon on peut écrire $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{F} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{B}(a_k, r_k)$ d'après 4. Considérons alors la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi_n \left(\frac{x - a_k}{r_k} \right) \ ,$$

où φ_n est la fonction définie en 2 et les λ_k sont des constantes strictement positives. Comme $\varphi_n((x - a_k)/r_k)$ est strictement positive sur $\mathrm{B}(a_k, r_k)$ et nulle en dehors, cette fonction f aura la propriété voulue $f^{-1}(0) = \mathrm{F}$; le seul problème est d'assurer la convergence de la série vers une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Or la série des valeurs absolues des dérivées ∂^α, en notation multi-indice, est majorée par $\mathrm{M}_\alpha \sum_k \lambda_k r_k^{-m}$, où $m = |\alpha|$ est l'ordre de dérivation et M_α majore la fonction $|\partial^\alpha \varphi|$, continue et à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Prenons par exemple

$$\lambda_k = \frac{1}{2^k} e^{-1/r_k} \ .$$

Alors $\lambda_k r_k^{-m} \leqslant 2^{-k} m^m e^{-m}$ pour tous $m, k \in \mathbb{N}$, comme on voit en étudiant les variations de la fonction $e^{-x}x^m$ pour $x > 0$. La série donnant f converge donc normalement sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que chaque série dérivée, d'où $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par l'Exercice 39.

Exercice 116. ***Théorème de Borel et applications.***

1. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k (*théorème de Borel*).

[On pourra utiliser une fonction plateau $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, égale à 1 pour $|x| \leqslant 1/2$, nulle pour $|x| \geqslant 1$ (Exercice 115 question 3), et considérer la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k x)\, a_k \frac{x^k}{k!} ,$$

où les λ_k seront choisis convenablement.]

2. Déduire de 1 que toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ (avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b) peut être *prolongée* en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, *paire*. Déduire de 1 qu'il existe $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x^2) .$$

[On pourra construire grâce à 1 une fonction $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que la fonction $v(x) = f(x) - u(x^2)$ ait toutes ses dérivées nulles en 0, et prendre $g(t) = u(t) + v\left(\sqrt{|t|}\right)$.]

Solution. 1. Il n'y aurait aucune difficulté si la série entière $\sum a_k x^k/k!$ avait un rayon de convergence infini (prendre pour $u(x)$ la somme de cette série), ou même un rayon de convergence fini $\mathrm{R} > 0$ (multiplier la somme de la série entière par une fonction plateau égale à 1 pour $|x| \leqslant \mathrm{R}/4$, nulle pour $|x| \geqslant \mathrm{R}/2$).

Dans le cas général, prenons f selon l'indication de l'énoncé, notons $f_k(x) = f(\lambda_k x)\, a_k x^k/k!$ et montrons qu'on peut choisir les $\lambda_k > 0$ pour assurer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série $u = \sum_k f_k$ et de chaque série dérivée. Pour $k \geqslant m$ on a, par la formule de Leibniz de dérivation d'un produit,

$$f_k^{(m)}(x) = a_k \sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p f^{(m-p)}(\lambda_k x)\, \lambda_k^{m-p} \frac{x^{k-p}}{(k-p)!} .$$

Soit M_m un majorant uniforme sur $\mathbb{R}$ de f et de toutes ses dérivées d'ordre au plus m. Comme f est nulle hors de $[-1, 1]$ il suffit d'effectuer les majorations lorsque $|x| \leqslant 1/\lambda_k$, ce qui donne

$$\left|f_k^{(m)}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}_m |a_k| \sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p \lambda_k^{m-p} \frac{\lambda_k^{p-k}}{(k-p)!} \leqslant \frac{2^m \mathrm{M}_m}{(k-m)!} \frac{|a_k|}{\lambda_k^{k-m}} ,$$

valable pour $k \geqslant m \geqslant 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prenons par exemple

$$\lambda_k = \max(1, |a_k|) ;$$

alors $\lambda_k^{k-m} \geqslant \lambda_k \geqslant |a_k|$ pour $k - m \geqslant 1$, d'où

$$\left|f_k^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{2^m \mathrm{M}_m}{(k-m)!}$$

et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k^{(m)}$. La fonction $u = \sum_k f_k$ est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ (Exercice 39), et

$$u^{(m)}(0) = \sum_k f_k^{(m)}(0) = a_m$$

pour tout $m \geqslant 0$, puisque $f_k(x)$ coïncide avec $a_k x^k/k!$ sur le voisinage de l'origine défini par $|x| \leqslant 1/2\lambda_k$.

Remarques. (i) En d'autres termes il existe toujours une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ admettant à l'origine une série de Taylor donnée (dont le rayon de convergence peut être nul).
(ii) Le théorème de Borel se généralise aux fonctions de n variables : si (a_α) est une suite quelconque de réels, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une fonction $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial^\alpha u(0) = a_\alpha$ pour tout α (en notation multi-indice). Pour cela on peut prendre

$$u(x) = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha x)\, a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} ,$$

avec $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = 1$ pour $\|x\| \leqslant 1/2$, $f(x) = 0$ pour $\|x\| \geqslant 1$ ($\|.\|$ étant la norme euclidienne usuelle) ; les $\lambda_\alpha > 0$ sont choisis convenablement par des calculs similaires aux précédents.

2. Soit f une fonction donnée C^∞ sur $[a, b]$. D'après 1 il existe $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $v \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que $u^{(k)}(a) = f^{(k)}(a_+)$ (dérivées à droite de f en a) et $v^{(k)}(b) = f^{(k)}(b_-)$ (dérivées à gauche de f en b) pour tout k. La fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{f}(x) = u(x) \text{ si } x < a \\ \widetilde{f}(x) = f(x) \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \widetilde{f}(x) = v(x) \text{ si } x > b \end{cases}$$

donne alors un prolongement C^∞ de f.

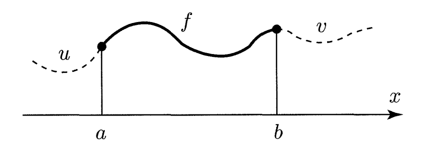


Fig. 158. Prolongement C^∞ de f.

3. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, paire. L'idée de la solution est de se ramener au cas où f a toutes ses dérivées nulles à l'origine (on dit alors que f est *plate* en ce point), en lui retranchant une fonction convenablement choisie donnée par le théorème de Borel.

Les dérivées d'ordre impair de f étant nulles en 0, sa série de Taylor à l'origine (qui peut être de rayon de convergence nul !) est de la forme $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^{2k}$. D'après 1 il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ admettant $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ pour série de Taylor en 0. On a alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le développement limité

$$u(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = o(x^n)$$

lorsque x tend vers 0, d'où

$$u(x^2) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^{2k} = o(x^{2n}) \ .$$

Par identification avec le développement limité donné par la formule de Taylor, on en déduit que la série de Taylor en 0 de la fonction $x \mapsto u(x^2)$ est $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^{2k}$. Par suite celle de la fonction $v(x) = f(x) - u(x^2)$ est la série nulle, autrement dit la fonction $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ est plate à l'origine. De plus v est paire.

Montrons que la fonction $t \mapsto v\left(\sqrt{|t|}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, si v est C^∞ et plate en 0. Une récurrence facile conduit à

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(v\left(\sqrt{|t|}\right)\right) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \sum_{p=1}^{m} c_{m,p} \frac{v^{(p)}\left(\sqrt{|t|}\right)}{\left(\sqrt{|t|}\right)^{2m-p}} \qquad (*)$$

pour $t \neq 0$ et $m \geqslant 1$, où ε est le signe de t et les constantes $c_{m,p}$ sont des entiers relatifs. Comme v est plate en 0 on a $v^{(p)}(x) = o(x^n)$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, et les dérivées données par $(*)$ sont aussi des $o(t^n)$ pour tout n. En raisonnant comme à l'Exercice 115 question 1 on en déduit que la fonction $t \mapsto v\left(\sqrt{|t|}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (et plate à l'origine), en dépit de la racine carrée et de la valeur absolue !

L'égalité $g(t) = u(t) + v\left(\sqrt{|t|}\right)$ définit alors une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$f(x) = u(x^2) + v(x) = g(x^2) \ ,$$

ce qu'il fallait.

Exercice 117. ***Groupe local.*** **Soient V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞. On notera**

$$f(x, y) = x * y \ ,$$

interprétée comme une loi de composition $*$ sur $\mathbb{R}^n$ (définie au voisinage de l'origine). On suppose que 0 est *élément neutre* :

$$x * 0 = 0 * x = x \ ,$$

pour tout $x \in V$.

1. Montrer que le développement limité à l'ordre deux de f en $(0, 0)$ est de la forme

$$f(x, y) = x * y = x + y + b(x, y) + r(x, y) \ ,$$

où b est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et

$$r(x, y) = O\left((\|x\| + \|y\|)^3\right) \ , \text{ avec } r(x, 0) = r(0, y) = 0 \ .$$

2. Montrer qu'il existe deux applications δ et γ, de classe C^∞ au voisinage de 0, telles que

$$\delta(0) = 0 \ , \ x * \delta(x) = 0 \ , \ \gamma(0) = 0 \ , \ \gamma(x) * x = 0$$

(*inverse à droite*, resp. *inverse à gauche*, de x). Écrire leurs développements limités à l'ordre deux à l'origine.

On suppose désormais l'*associativité* :

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

pour tous x, y, z assez voisins de 0 pour que les deux membres soient définis.

3. Montrer que $\delta(x) = \gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. On note $D_1 f$, resp. $D_2 f$, les différentielles partielles de f par rapport à sa première, resp. seconde, variable. Montrer que l'expression

$$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \det D_2 f(x, 0)^{-1} dx$$

(où dx est la mesure de Lebesgue et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ à support compact voisin de l'origine) définit une *intégrale invariante à gauche*, i.e.

$$\mathrm{I}(\varphi_a) = \mathrm{I}(\varphi) \text{ avec } \varphi_a(x) = \varphi(a * x) .$$

[On pourra dériver en $y = 0$ l'identité $a * (x * y) = (a * x) * y$.]

5. On note x' l'inverse de x et $\mathrm{C}(x, y) = x' * y' * x * y$. Donner les développements limités à l'ordre deux à l'origine des applications

$$(x, y) \mapsto y' * x * y \text{ et } (x, y) \mapsto \mathrm{C}(x, y) .$$

On exprimera les résultats à l'aide de la notation

$$[x, y] = b(x, y) - b(y, x) .$$

6. Donner le développement limité à l'ordre trois à l'origine de l'application

$$(x, y, z) \mapsto \mathrm{C}(y' * x * y, \mathrm{C}(y, z)) ,$$

et en déduire l'*identité de Jacobi*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Commentaires. On aborde ici, de manière locale, la théorie des *groupes de Lie*, c'est-à-dire l'étude générale des lois de groupe indéfiniment différentiables. Le cas de la dimension un, beaucoup plus facile, a été étudié à l'Exercice 24.

Un exemple typique de loi f s'obtient en transformant la multiplication matricielle $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY}$ du groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ par la correspondance $x \mapsto \mathrm{X} = 1 + x$, qui transforme l'élément neutre $\mathrm{X} = \mathrm{I}$ en $x = 0$. L'égalité

$$\mathrm{I} + f(x, y) = (\mathrm{I} + x)(\mathrm{I} + y)$$

conduit ainsi à la loi

$$f(x, y) = x * y = x + y + xy$$

sur l'espace des matrices carrées réelles $n \times n$, qui s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$. La correspondance $x \mapsto \mathrm{X} = \exp x$ (exponentielle de matrice) conduit de même à étudier la loi

$$f(x, y) = \ln\left((\exp x)(\exp y)\right) ,$$

où ln est l'application réciproque de exp sur un voisinage de 0 (Exercice 65) ; ces deux lois, qui traduisent toutes deux la multiplication matricielle, sont équivalentes à un difféomorphisme près.

On montre aux questions 2 et 3 que l'habituel troisième axiome des groupes (inverse d'un élément) résulte ici des deux premiers (élément neutre, associativité), par application du théorème des fonctions implicites.

La question 4 (qui n'est pas utilisée dans la suite) donne un procédé pour expliciter une mesure invariante par les translations à gauche de la loi de groupe (*mesure de Haar*). Pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ par exemple, un calcul instructif avec la loi $x+y+xy$ conduirait à l'intégrale invariante (à gauche et aussi à droite)

$$\mathrm{I}(\varphi) = \int_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} \varphi(\mathrm{X}) |\det \mathrm{X}|^{-n} d\mathrm{X}_{11} d\mathrm{X}_{12} \cdots d\mathrm{X}_{nn} ,$$

où les X_{ij} sont les éléments matriciels de $\mathrm{X} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Les questions 5 et 6 introduisent la structure d'*algèbre de Lie* associée au groupe. C'est une application $(x, y) \mapsto [x, y]$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, bilinéaire, antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi ; elle exprime la non-commutativité de la loi $*$, lue au second ordre sur les développements limités. Dans les deux exemples ci-dessus on trouve facilement (voir exemples de la solution 3)

$$[x, y] = xy - yx .$$

Le crochet de Lie est donc le crochet usuel des matrices.

Un résultat profond de la théorie des groupes de Lie est la possibilité d'un passage inverse : toute structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^n$ est la structure associée à une certaine loi de groupe. De plus cette loi est commutative si et seulement si le crochet $[x, y]$ est identiquement nul ; la commutativité à l'ordre deux du développement limité de la loi entraîne donc sa commutativité à un ordre quelconque.

Pour aller plus loin voir Lafontaine [28] chapitre IV, ou Mneimné et Testard [32].

Solution. 1. Notons x_i, resp. y_j, les composantes de x, resp. y, avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Le développement de Taylor-Young de f à l'ordre deux en $(0, 0)$ est *a priori* de la forme

$$f(x, y) = f(0,0) + \sum_i a_i x_i + \sum_j b_j y_j + \\ + \sum_{i,j} (a_{ij} x_i x_j + b_{ij} x_i y_j + c_{ij} y_i y_j) + r(x, y) ,$$

où les indices vont de 1 à n, les coefficients a_i,..., c_{ij} appartiennent à $\mathbb{R}^n$, et le reste $r(x, y)$ est un $\mathrm{O}\left((\|x\| + \|y\|)^3\right)$. Comme $f(x, 0) = f(0, x) = x$ au voisinage de 0 ce développement se réduit, par identification, à

$$x * y = f(x, y) = x + y + b(x, y) + r(x, y) ,$$

avec $b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$ et $r(x,0) = r(0,y) = 0$.

Remarque. Au premier ordre (terme $x + y$), la loi est donc toujours commutative ; la non-commutativité éventuelle ne se manifeste qu'à partir de l'ordre deux (terme $b(x,y)$, non symétrique en général).

2. Comme $f(0,x) = x$ la différentielle partielle par rapport à la deuxième variable $\mathrm{D}_2 f(0,0)$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc à l'équation $f(x,y) = 0$ au voisinage de $(0,0)$ et donne un inverse à droite $y = \delta(x)$, de classe C^∞ au voisinage de 0. Le développement limité de δ peut s'obtenir par identification : en reportant dans $f(x,y) = 0$ l'égalité $y = y_1 + y_2 + \cdots$, somme de termes d'ordres respectifs 1, 2 et supérieur ou égal à 3, il vient

$$x + y_1 + y_2 + b(x, y_1) + \cdots = 0 \ ,$$

d'où $y_1 = -x$, $y_2 = -b(x, y_1) = b(x,x)$ et

$$\delta(x) = -x + b(x,x) + \mathrm{O}\left(\|x\|^3\right) \ .$$

De même $\mathrm{D}_1 f(0,0)$ est l'identité, et l'équation $f(y,x) = 0$ se résout au voisinage de 0 en $y = \gamma(x)$, avec

$$\gamma(x) = -x + b(x,x) + \mathrm{O}\left(\|x\|^3\right) \ .$$

3. L'associativité entraîne l'égalité des inverses à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= (\gamma(x) * x) * \delta(x) \\ &= \gamma(x) * (x * \delta(x)) \\ &= \gamma(x) \ . \end{aligned}$$

On notera désormais

$$x' = \delta(x) = \gamma(x) = -x + b(x,x) + \mathrm{O}\left(\|x\|^3\right) \ .$$

Exemples. Pour $f(x,y) = x + y + xy$ on obtient

$$b(x,y) = xy \text{ et } x' = (\mathrm{I} + x)^{-1} - \mathrm{I} = -x + x^2 + \cdots$$

Pour $f(x,y) = \ln((\exp x)(\exp y))$ on a $x' = -x$ évidemment et

$$z = (\exp x)(\exp y) = \mathrm{I} + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \cdots$$

$$f(x,y) = \ln z = (z - \mathrm{I}) - \frac{1}{2}(z - \mathrm{I})^2 + \cdots \ ,$$

d'où en développant

$$b(x,y) = \frac{1}{2}(xy - yx) .$$

4. En différentiant en $y = 0$ l'égalité $f(a, f(x,y)) = f(f(a,x), y)$ il vient

$$D_2 f(a,x) \circ D_2 f(x,0) = D_2 f(a * x, 0) .$$

Comme $\det D_2 f(0,0) = 1$, les déterminants de ces trois applications linéaires sont strictement positifs pour a et x assez voisins de 0. On peut donc écrire, pour φ continue à support compact voisin de 0,

$$\begin{aligned} I(\varphi_a) &= \int \varphi(a * x) \det D_2 f(x,0)^{-1} dx \\ &= \int \varphi(a * x) \det D_2 f(a * x, 0)^{-1} \det D_2 f(a,x) dx , \end{aligned}$$

où les intégrales sont étendues à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Le changement de variable $y = a * x = f(a,x)$ dans l'intégrale donne $dy = \det D_2 f(a,x) dx$, d'où

$$I(\varphi_a) = \int \varphi(y) \det D_2 f(y,0)^{-1} dy = I(\varphi) ,$$

ce qui établit l'invariance à gauche.

Remarque. En procédant de même à partir de $f(y, f(x,a)) = f(f(y,x), a)$ on montrerait que l'intégrale

$$J(\varphi) = \int \varphi(x) \det D_1 f(0,x)^{-1} dx$$

est invariante par les translations à droite $x \mapsto x * a$.

5. Sachant que

$$\begin{aligned} x * y &= x + y + b(x,y) + \cdots \\ y' &= -y + b(y,y) + \cdots , \end{aligned}$$

où les $\cdots$ sont un reste d'ordre au moins trois en (x,y), on obtient sans difficulté les développements limités

$$\begin{aligned} y' * (x * y) &= (-y + b(y,y)) + (x + y + b(x,y)) + b(-y, x + y) + \cdots \\ &= x + b(x,y) - b(y,x) + \cdots \\ &= x + [x,y] + \cdots \end{aligned}$$

et

$$x' * (y' * x * y) = (-x + b(x,x)) + (x + [x,y]) + b(-x,x) + \cdots$$

c'est-à-dire

$$C(x, y) = [x, y] + \cdots$$

Remarque. Le terme $C(x, y) = x' * y' * x * y$ est appelé *commutateur* de x et y, à cause de l'égalité $(y * x) * C(x, y) = x * y$.

6. Notons $\Gamma(x, y, z) = C(y' * x * y, C(y, z))$. D'après 5 on a

$$\Gamma(x, y, z) = [y' * x * y, C(y, z)] + \cdots$$

où les $\cdots$ sont ici d'ordre au moins quatre en (x, y, z), d'où

$$\Gamma(x, y, z) = [x, [y, z]] + \cdots$$

en n'écrivant que les termes utiles à cet ordre.

Notons encore

$$\begin{aligned} u &= z * x * z' * y * z \\ v &= x * y * x' * z * x \\ w &= y * z * y' * x * y \ . \end{aligned}$$

On vérifie alors sur les définitions l'égalité $\Gamma(x, y, z) = w' * u$, d'où par permutation circulaire

$$\Gamma(x, y, z) * \Gamma(y, z, x) * \Gamma(z, x, y) = 0 \ .$$

Le développement limité du premier membre de cette égalité commence par des termes d'ordre trois en (x, y, z). En identifiant à 0 la somme de ces termes on obtient

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ .$$

Établie pour x, y, z voisins de 0, cette identité s'étend à tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ par linéarité.

Chapitre 7
Problèmes d'extremum

1. Objectifs

L'étude locale précise d'une fonction numérique par les outils du calcul différentiel (formule de Taylor) permet d'aborder efficacement la recherche de ses maximums ou minimums[1], où elle fournit une condition nécessaire et une condition suffisante assez satisfaisantes en pratique.

Mais la résolution d'un problème d'extremum ne se réduit pas toujours à un simple exercice de calcul différentiel ! D'autres outils peuvent intervenir, par exemple :

- la *compacité* assure l'existence d'un point où est atteint l'extremum ; le calcul différentiel précisera ensuite la position de ce point, si on peut se ramener à travailler sur un ouvert (voir Exercices 118, 128, 130, 132). Ce mélange des genres, topologie et calcul différentiel, apparaît déjà dans la preuve du théorème de Rolle.
- la théorie des *espaces normés*, et notamment *hilbertiens* : normes d'applications linéaires, meilleure approximation d'une fonction par des polynômes, théorème de la projection orthogonale, minimisation, méthode des moindres carrés... Voir par exemple les Exercices 8, 9, 10 du chapitre 1, l'Exercice 121 ci-dessous, ou Pommellet [34] p. 239-250, Demailly [13] chapitre 2, ou encore le théorème de Lax-Milgram et ses applications aux équations aux dérivées partielles (Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1993, p. 84, 136, 176).
- la théorie des *fonctions holomorphes* : Exercice 120, ou Cartan [9] p. 83.
- l'*inégalité isopérimétrique*, établie grâce aux séries de Fourier, montre que, parmi les courbes fermées de longueur donnée, c'est le cercle qui enferme une aire maximale : Berger et Gostiaux [4] p. 363, Chambert-Loir *et al.* [41] p. 195.
- citons encore la très belle preuve du théorème fondamental de la représentation conforme de Riemann, en recherchant le maximum de $|f'(0)|$ lorsque f parcourt un certain ensemble compact de fonctions holomorphes : Cartan [9] p. 187-191.

1. Les pluriels latins *maxima*, *minima*, sont également utilisés ; mais on doit dire, selon le Petit Robert, des *extremums*.

Ces divers aspects ne seront guère abordés ici. On se contentera de rassembler autour de la notion de *courbe de niveau* quelques-uns des acquis du cours de calcul différentiel : sous-variété définie implicitement, gradient, changement de coordonnées, lemme de Morse, extremum.

2. Panorama du cours

On ne considère dans ce chapitre que des *fonctions à valeurs réelles* ; la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ permettra de comparer leurs valeurs en différents points.

Problème d'extremum libre.

Soient X une partie d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$, a un point de X , et $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f admet en a un *maximum global* (ou absolu) si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$: le point a est champion du monde.

On dit que f admet en a un *maximum local (*ou relatif) s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{X}$: le point a est champion régional.

On dit que f admet en a un *maximum strict* (global, resp. local) si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq a$: il n'y a pas d'ex æquo (sur X, resp. $\mathrm{V} \cap \mathrm{X}$).

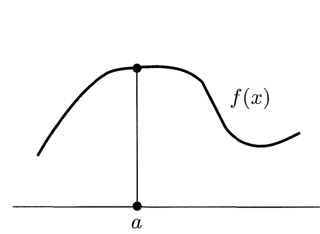


Fig. 159. Maximum global non strict.

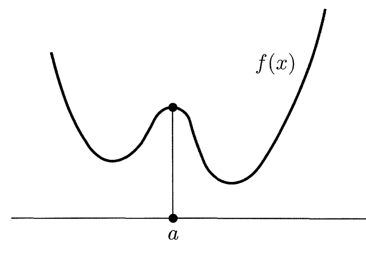


Fig. 160. Maximum local strict.

Les définitions correspondantes d'un *minimum* global, resp. local, resp. strict, s'en déduisent en renversant le sens des inégalités. Le terme d'*extremum* signifie maximum ou minimum.

Théorème 7.1. *Soient* U *un* ouvert *d'un espace normé* E *sur* $\mathbb{R}$, *a un point de* U *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique.*

1. *Condition nécessaire (pas suffisante) du premier ordre : si f admet en a un extremum local et si* $\mathrm{D}f(a)$ *existe, alors nécessairement a est un point critique de f, i.e.* $\mathrm{D}f(a) = 0$.

2. *Condition nécessaire (pas suffisante) du second ordre : si f admet en a un minimum local et si* $\mathrm{D}^2 f(a)$ *existe, alors nécessairement* $\mathrm{D}f(a) = 0$

et $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est une forme quadratique* positive, *i.e.* $\mathrm{D}^2 f(a)(h,h) \geqslant 0$ *pour tout vecteur* $h \in \mathrm{E}$.

3. *Condition suffisante (pas nécessaire) du second ordre : si* E *est de dimension finie, si* $\mathrm{D}f(a) = 0$ *et si* $\mathrm{D}^2 f(a)$ *est une forme quadratique* définie positive *(i.e.* $\mathrm{D}^2 f(a)(h,h) > 0$ *pour tout vecteur* $h \neq 0$*), alors* f *admet en* a *un minimum local strict.*

La preuve est facile, à l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre deux. En 2 on raisonne sur la fonction $t \mapsto f(a+th)$, qui a un minimum en $t=0$. En 3 on observe que les termes d'ordre deux de la formule sont le carré d'une norme sur E ; le théorème d'équivalence (Théorème 1.1) permet d'utiliser cette norme, avec laquelle on conclut rapidement.

Rappelons d'autre part que le classique théorème de Rolle se déduit de 1 ci-dessus : si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a,b[$, et prend la même valeur en a et b, sa dérivée s'annule en (au moins) un point $c \in\,]a,b[$. En effet, si f n'est pas constante, son maximum ou son minimum sur le *compact* $[a,b]$ est atteint en un point c de l'intervalle *ouvert*, d'où $f'(c) = 0$ d'après 1.

Remarques. Il est essentiel de supposer U ouvert dans le théorème : la fonction $f(x) = x$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x = 1$, mais $f'(1) \neq 0$.

La fonction $f(x) = x^3$, resp. x^4, fournit un contre-exemple à la réciproque de 1, 2, resp. 3, en $a = 0$.

Les assertions 2 et 3 relatives aux maximums s'en déduisent en remplaçant f par $-f$, c'est-à-dire « positive » par « négative ».

En pratique, pour rechercher les extremums locaux *sur un ouvert* d'une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$, on cherchera d'abord ses points critiques en résolvant le système d'équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0 \;, \;\ldots\;, \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \;.$$

Puis on étudiera, en chacun des points critiques, la forme quadratique hessienne $\mathrm{D}^2 f(a)$, de matrice $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$. Cette matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres λ_i réelles, et leurs signes donnent la *signature* de la forme quadratique. En particulier la forme est positive si et seulement si tous les λ_i sont positifs ou nuls, définie positive si et seulement s'ils sont tous strictement positifs ; voir la discussion pour $n = 2$ dans la partie « courbes de niveau ». Cette étude ne donnera qu'un résultat local ; pour conclure à un extremum global, on pourra par exemple faire une étude directe de f, ou utiliser un argument de compacité.

Problème d'extremum lié.

Dans ce qui précède, la variable x parcourait « *librement* » un ouvert de l'espace E. Mais de nombreuses questions conduisent à rechercher les

extremums de $f(x)$ lorsque les variables $x_1,\dots,\ x_n$ sont « *liées* » par certaines relations. Cherchons par exemple le(s) point(s) le(s) plus proche(s) de l'origine sur une courbe plane C donnée dans le plan euclidien.

- *Première méthode.* La courbe C est définie paramétriquement selon $x = x(t)$, $y = y(t)$, où t parcourt un intervalle ouvert I, et il s'agit de trouver le minimum sur I de la fonction $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$. Ce problème d'extremum libre conduit à la condition nécessaire

$$x(t_0)x'(t_0) + y(_0)y'(t_0) = 0$$

pour un point critique t_0. En un tel point $\mathrm{A} = (x(t_0), y(t_0))$ on voit donc que OA est normal à C.

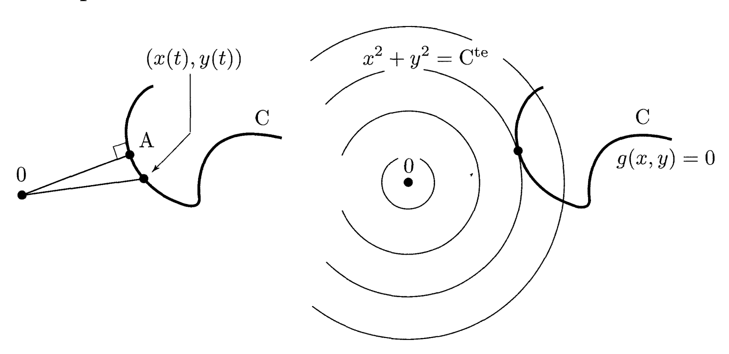


Fig. 161. Deux méthodes de recherche du point de C le plus proche de O.

- *Deuxième méthode.* La courbe C est définie implicitement par l'équation $g(x, y) = 0$, et il s'agit de trouver le minimum de $x^2 + y^2$ lorsque x et y sont liés par cette relation. Si on trace des cercles de centre O et de rayons croissants, jusqu'à rencontrer C, la figure suggère que le cercle critique est tangent à C au(x) point(s) cherché(s). Le théorème suivant donne une forme générale de ce résultat.

Théorème 7.2. *Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et X l'ensemble défini par les équations*

$$g_1(x) = 0 \ , \ \dots \ , \ g_p(x) = 0 \ , \ \textit{avec } x \in \mathrm{U} \ .$$

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in \mathrm{X}$, et si les différentielles $\mathrm{D}g_1(a),\dots,\ \mathrm{D}g_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors nécessairement les formes linéaires $\mathrm{D}f(a)$, $\mathrm{D}g_1(a),\dots$, $\mathrm{D}g_p(a)$ sont liées.

En d'autres termes, il existe des coefficients réels $\lambda_1,\dots,\ \lambda_p$, appelés multiplicateurs de Lagrange, *tels que*

$$\mathrm{D}f(a) = \lambda_1 \mathrm{D}g_1(a) + \cdots + \lambda_p \mathrm{D}g_p(a) \ .$$

La présence des (traditionnels) multiplicateurs de Lagrange donne à ce théorème un aspect un peu technique, que ne démentent guère. hélas, les preuves qu'on peut en lire dans certains ouvrages... Il faut donc insister sur son *interprétation géométrique*, particulièrement simple : si f admet un extremum en a sur X, et si $\gamma(t)$ est un arc dérivable tracé sur X avec $\gamma(t_0) = a$, alors la fonction $f(\gamma(t))$ admet un extremum en t_0. d'où nécessairement

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{D}f(a)\gamma'(t_0) = 0 \ .$$

C'est dire que $\mathrm{D}f(a)v = 0$ pour tout vecteur v tangent en a à X au sens de la Définition 5.2. Si de plus X est lisse en a (ce qu'assurent nos hypothèses sur les fonctions g_i), ces vecteurs forment un espace vectoriel (Théorèmes 5.9 et 5.11) ; la condition nécessaire d'extremum lié exprime donc que *la restriction de la forme linéaire* $\mathrm{D}f(a)$ *à l'espace vectoriel tangent en* a *à* X *est identiquement nulle.*

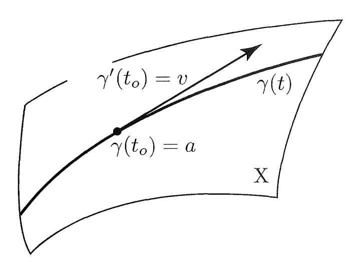


Fig. 162. Recherche d'extremum sur X.

La fin de la démonstration du Théorème 7.2 n'est plus qu'un exercice élémentaire d'algèbre linéaire, où l'on utilise la définition explicite de cet espace tangent comme intersection des noyaux des $\mathrm{D}g_i(a)$; voir Avez [3] p.103 pour les détails.

Remarque. Si on suppose de plus $\mathrm{D}f(a) \neq 0$, l'hypersurface de niveau de f passant par a, d'équation $f(x) = f(a)$, est elle-même lisse en a. La condition nécessaire d'extremum lié signifie alors que son espace vectoriel tangent en a, noyau de $\mathrm{D}f(a)$, contient celui de X, c'est-à-dire que X *est tangente en* a *à l'hypersurface de niveau de* f *passant par ce point.* Ainsi est justifié le résultat obtenu empiriquement plus haut pour la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemple. Dans le plan euclidien on donne un droite X et deux points F, F′ hors de X. Cherchons le minimum sur X de la fonction

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{FM} + \mathrm{F'M} \ .$$

La réponse est immédiate si F et F′ sont de part et d'autre de X : le minimum est atteint à l'intersection de X avec le segment FF′ (cf. Exercice 41). Si F et F′ sont d'un même côté de X, on se ramène au cas précédent en considérant le symétrique F″ de F′ par rapport X : alors la fonction

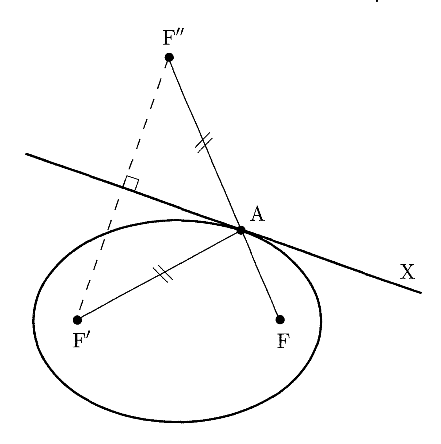


Fig. 163. Tangente à l'ellipse et extremum lié.

$f(\mathrm{M}) = \mathrm{FM} + \mathrm{F''M}$ atteint son minimum à l'intersection A de X et de FF″.

D'après la remarque ci-dessus, l'ellipse de foyers F et F′ passant par A, qui est une courbe de niveau de f, est tangente en A à X ; on retrouve ainsi[2] une propriété classique de cette tangente, bissectrice extérieure de AF et AF′ (cf. Exercice 92).

En pratique on pourra, pour appliquer le Théorème 7.2, écrire les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(a) + \cdots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(a) \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$
$$g_1(a) = 0 \ , \ \ldots \ , \ g_p(a) = 0 \ ,$$

d'où $n + p$ équations pour les n inconnues a_1,..., a_n et les p inconnues auxiliaires λ_1,..., λ_p. Dans le cas fréquent où $p = 1$, la condition nécessaire d'extremum de f en a sur l'hypersurface $g(x) = 0$ s'écrit $g(a) = 0$ et $\mathrm{D}f(a) = \lambda \mathrm{D}g(a)$, ou encore (si l'espace est muni d'un produit scalaire)

$$g(a) = 0 \text{ et } \operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a) \ .$$

Références. Avez [3] chapitre 10, Schwartz [37] p. 167-173 et 285-302. On trouvera des conditions au second ordre d'extremum lié (l'une nécessaire, l'autre suffisante) dans Cartan [8] p. 267.

3. Finale : courbes de niveau

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$, on rappelle les notations de Monge

2. Cet exemple est tiré de S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et Synthèses n°1, Société Mathématique de France, 1995, p. 24.

$$p = f'_x(a) \ , \ q = f'_y(a) \ , \ r = f''_{x^2}(a) \ , \ s = f''_{xy}(a) \ , \ t = f''_{y^2}(a) \ .$$

Les figures suivantes illustrent les aspects locaux les plus fréquents de la surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ et de ses courbes de niveau $z = \lambda$ (constante), au voisinage du point $(x_0, y_0, z_0) = (a, f(a))$ de $\mathbb{R}^3$. Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis du produit scalaire usuel.

Le *plan affine tangent* en (x_0, y_0, z_0) à S a pour équation

$$\mathrm{Z} - z_0 = p(\mathrm{X} - x_0) + q(\mathrm{Y} - y_0) \ ;$$

il est normal au vecteur $(p, q, -1)$, gradient de la fonction $(x, y, z) \mapsto f(x,y) - z$ en ce point.

Soient C_λ la *courbe de niveau* λ sur S, resp. C^0_λ sa projection sur $\mathbb{R}^2$, d'équations

$$\mathrm{C}_\lambda : \begin{cases} f(x,y) - z = 0 \\ z - \lambda = 0 \end{cases} \quad , \text{ resp. } \mathrm{C}^0_\lambda : f(x,y) = \lambda \ .$$

La courbe C_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ si la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang deux en chaque point de C_λ. Cela revient à dire que f'_x et f'_y ne s'annulent pas simultanément sur C^0_λ, ou que C^0_λ ne contient aucun *point critique* de f, ou encore que λ *n'est pas une valeur critique de* f. Cette même condition assure que C^0_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. La tangente en (a, λ) à C_λ est alors l'intersection du plan tangent à S et du plan horizontal d'altitude λ, définie par les équations

$$\begin{cases} p(\mathrm{X} - x_0) + q(\mathrm{Y} - y_0) = 0 \\ \mathrm{Z} = \lambda \end{cases}$$

puisque $z_0 = \lambda$ ici. La tangente en a à C^0_λ est définie par la première de ces deux équations ; elle est normale au vecteur (p, q), gradient de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

Dans la discussion suivante on utilise, entre autres, les Exercices 109 et 111.

1. Si a n'est pas point critique de f, on a par exemple $p \neq 0$ et l'application
$$(x, y) \mapsto (u, v) = (f(x, y), y)$$
est un changement de coordonnées locales dans $\mathbb{R}^2$ au voisinage de a (Théorème 5.2). En coordonnées (u, v, z) dans $\mathbb{R}^3$ la surface S est transformée en le plan $z = u$ et les courbes de niveau C^0_λ en les droites $u = \lambda$.

1. $Df(a) \neq 0$; point non critique.

2. $Df(a) = 0$, $D^2f(a)$ $++$; point critique, minimum local strict.

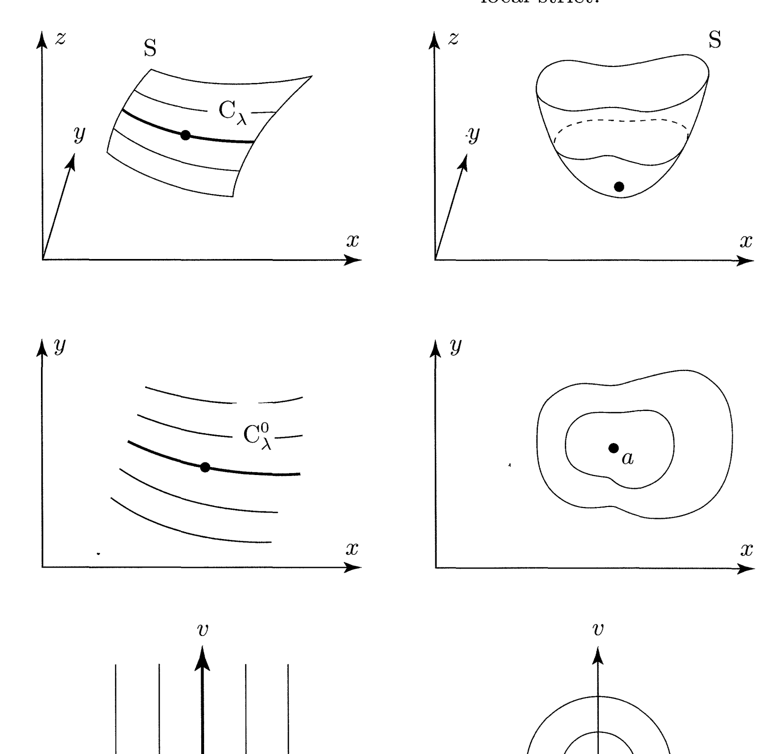
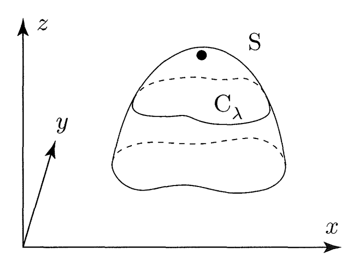


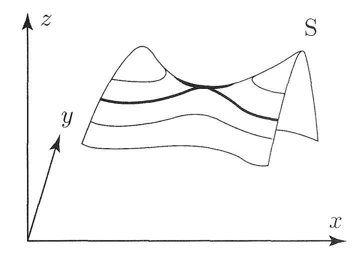
Fig. 164. Courbes de niveau : aspect local de la surface S, de ses courbes de niveau projetées sur $x\mathrm{O}y$, et d'un modèle simplifié de ces courbes dans le plan (u, v).

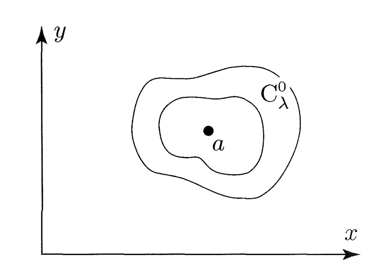
2. Si $p = q = 0$, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est définie positive. La fonction f admet en a un *minimum local strict.* Le plan tangent en $(a, f(a))$ à S est horizontal et, au voisinage de ce point, S est au-dessus de ce plan. Le lemme de Morse (Exercice 109) donne un changement de coordonnées locales $(x, y) \mapsto (u, v)$ dans $\mathbb{R}^2$ au voisinage de a, tel que $f(x, y) - f(a) = u^2 + v^2$. En coordonnées (u, v, z) dans $\mathbb{R}^3$, la surface S devient le paraboloïde

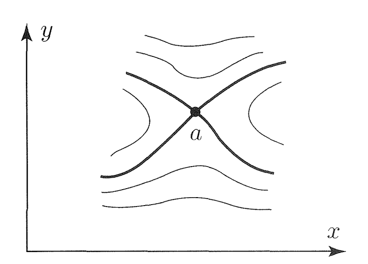
3. $\mathrm{D}f(a) = 0$, $\mathrm{D}^2 f(a) - -$; point critique, maximum local strict.

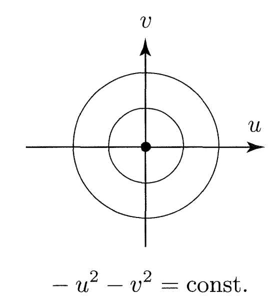
4. $\mathrm{D}f(a) = 0$, $\mathrm{D}^2 f(a) + -$; point critique, col.



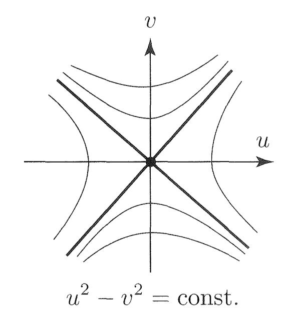








$-u^2 - v^2 = \text{const.}$



$u^2 - v^2 = \text{const.}$

Fig. 164. (Suite.)

$z = f(a) + u^2 + v^2$, et les courbes de niveau sont des cercles ; la courbe de niveau critique est réduite à un point.

3. Si $p = q = 0$, $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors $\mathrm{D}f(a) = 0$ et $\mathrm{D}^2 f(a)$ est définie négative. La fonction f admet un *maximum local strict.* Le plan tangent à S est horizontal et, localement, S est au-dessous de ce plan. Comme dans le cas précédent, on peut transformer (localement) S en le paraboloïde $z = f(a) - u^2 - v^2$, et les courbes

de niveau en des cercles ; la courbe de niveau critique se réduit à un point.

4. Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 < 0$, alors $\mathrm{D}f(a) = 0$ et $\mathrm{D}^2 f(a)$ est non dégénérée, de signature $(+\,-)$. Le plan tangent à S est horizontal. Le lemme de Morse permet d'écrire $f(x,y) - f(a) = u^2 - v^2$, d'où résulte que S traverse son plan tangent selon les deux courbes d'équations $u(x,y) \pm v(x,y) = 0$ (Exercice 111). La fonction f *n'a pas d'extremum* en a (*point col*). En coordonnées (u,v,z) dans $\mathbb{R}^3$ la surface S devient le paraboloïde hyperbolique $z = f(a) + u^2 - v^2$, et les courbes de niveau deviennent des hyperboles, sauf la courbe de niveau critique formée de deux droites (qui sont les asymptotes de ces hyperboles). En revenant aux coordonnées (x,y) on en déduit que *la courbe de niveau critique admet un point double en* a ; l'équation du couple de ses tangentes en ce point est

$$r(\mathrm{X} - x_0)^2 + 2s(\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{Y} - y_0) + t(\mathrm{Y} - y_0)^2 = 0 \; .$$

5. Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 = 0$, alors $\mathrm{D}f(a) = 0$ et $\mathrm{D}^2 f(a)$ est dégénérée. Le comportement de f au voisinage de a dépend des termes suivants de son développement de Taylor (voir Exercice 118).

Remarque. Dans les trois cas d'utilisation du lemme de Morse, les courbes de niveau en coordonnées (u,v) (cercles ou hyperboles) sont homothétiques entre elles. Il en résulte, en revenant aux coordonnées (x,y), que les courbes de niveau non critiques de f se déduisent les unes des autres, au voisinage de a, par des difféomorphismes.

4. Exercices

Libres aux Exercices 118 à 126, nos problèmes d'extremum seront liés par la suite, aux numéros 128 à 133. À l'Exercice 127 on examine les courbes de niveau des parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe.

Exercice 118. ***Premiers exemples d'extremum.*** **Pour chacune des fonctions f suivantes, rechercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ et esquisser les courbes de niveau de la surface d'équation $z = f(x,y)$:**

1. $f(x,y) = x^2 + y^4$
2. $f(x,y) = x^2 + y^3$
3. $f(x,y) = x^2 - y^2 + (y^4/4)$.

Commentaire. Les exemples 1 et 2 montrent l'influence déterminante des termes d'ordre supérieur à deux, lorsque la forme quadratique $\mathrm{D}^2 f(a)$ est dégénérée. La courbe de niveau 0 de l'exemple 3 est celle de l'Exercice

89 (avec les variables (y, z) au lieu de (x, y) ici) ; elle a été étudiée par le lemme de Morse à l'Exercice 109.

Solution. 1. On a $\mathrm{D}f(x, y) = (2x, 4y^3)$, et l'origine est le seul point critique. Comme $f(x, y) = x^2 + y^4 > 0 = f(0, 0)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, f a donc un minimum global strict en ce point. Noter que le développement de Taylor de f à l'origine est en évidence : $\mathrm{D}f(0, 0) = 0$, $\mathrm{D}^2f(0, 0)$ est la forme quadratique $(x, y) \mapsto 2x^2$, positive (en accord avec le Théorème 7.1 (2)) mais dégénérée.

Les sections de la surface $z = f(x, y)$ par les plans verticaux $y = y_0$, resp. $x = x_0$, sont les paraboles $z = x^2 + y_0^4$, resp. les courbes d'allure parabolique $z = y^4 + x_0^2$, qui permettent d'esquisser la surface. La courbe de niveau λ, en projection sur le plan $x\mathrm{O}y$, a pour équation

$$x^2 + y^4 = \lambda \ .$$

Vide pour $\lambda < 0$, elle se réduit à un point pour $\lambda = 0$. Pour $\lambda > 0$ elle a l'allure d'un ovale, de « demi-axes » $\sqrt{\lambda}$ et $\sqrt[4]{\lambda}$. La courbe de niveau $\lambda' > 0$ se déduit de la précédente par la transformation affine $x' = x\sqrt{\lambda'/\lambda}$, $y' = y\sqrt[4]{\lambda'/\lambda}$.

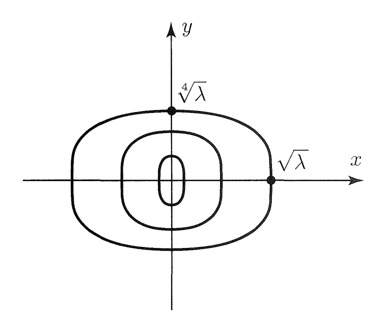


Fig. 165. Courbes de niveau de $x^2 + y^4$.

2. On a $\mathrm{D}f(x, y) = (2x, 3y^2)$, et l'origine est le seul point critique de f. Mais il n'y a pas d'extremum en ce point puisque $f(0, y) = y^3$ a le signe de y.

L'esquisse de la surface s'obtient comme en 1. La courbe de niveau d'équation

$$x^2 + y^3 = \lambda$$

peut être tracée comme graphe de $y = \sqrt[3]{\lambda - x^2}$ (voir figure page suivante). Si λ et λ' sont de même signe, les courbes de niveau λ et λ' se déduisent l'une de l'autre par la transformation affine $x' = x\sqrt{\lambda'/\lambda}$, $y' = \sqrt[3]{\lambda'/\lambda}$. La courbe de niveau 0 peut se paramétrer selon $x = t^3$, $y = -t^2$; elle présente à l'origine un point de rebroussement de première espèce (Exercice 104).

3. On a $\mathrm{D}f(x, y) = (2x, -2y + y^3)$, d'où les trois points critiques $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$. La forme quadratique $\mathrm{D}^2f(0, 0)$ est $(x, y) \mapsto$

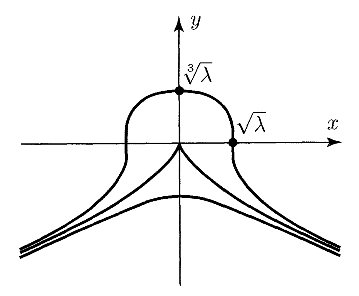


Fig. 166. Courbes de niveau de $x^2 + y^3$.

$2(x^2 - y^2)$, non dégénérée de signature $(+\,-)$; il n'y a pas d'extremum à l'origine (point col). Aux points $(0, \pm\sqrt{2})$ on a $f''_{x^2} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = 3y^2 - 2 = 4$; donc $D^2 f$ est définie positive en ces points, et il y a minimum local strict. C'est même un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ car

$$f(x,y) - f(0, \pm\sqrt{2}) = x^2 + \frac{1}{4}\left(y^2 - 2\right)^2 \geqslant 0 \ .$$

L'allure de la surface $z = f(x,y)$ se déduit de ses sections $y = y_0$ (paraboles) et de la section $x = 0$, d'équation $z = -y^2 + (y^4/4)$.

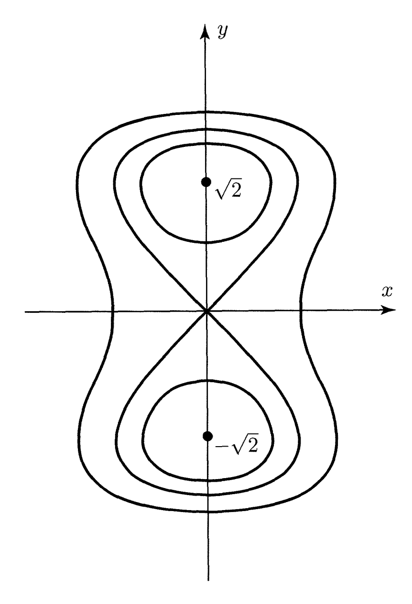


Fig. 167. Courbes de niveau de $x^2 - y^2 + (y^4/4)$.

On peut tracer la courbe de niveau $f(x,y) = \lambda$ en écrivant son équation sous la forme

$$x = \pm\sqrt{(\lambda+1) - \frac{1}{4}\left(y^2-2\right)^2}\ .$$

Elle est vide pour $\lambda < -1$, réduite aux deux points $(0, \pm\sqrt{2})$ pour $\lambda = -1$, formée de deux composantes connexes pour $-1 < \lambda < 0$, et connexe pour $\lambda \geqslant 0$. La courbe critique, pour $\lambda = f(0,0) = 0$, a un point double à l'origine (Exercice 109, exemple) ; son tracé peut aussi s'effectuer en coordonnées polaires (r, θ), grâce à l'équation

$$r^2 = -4\,\frac{\cos 2\theta}{\sin^4\theta}\ .$$

L'étude des variations du second membre montre que r croît de 0 à 2 lorsque θ croît de $\pi/4$ à $\pi/2$, et il n'y a plus qu'à compléter par symétries.

Exercice 119. *Fonctions convexes et extremums.* Soit f une fonction numérique convexe sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a \in$ U et $\mathrm{D}f(a) = 0$, montrer que f admet en a un minimum global sur U (cf. Exercice 42).

Si f est deux fois différentiable, comparer les conditions du second ordre pour un extremum (Théorème 7.1) et le critère de convexité de l'Exercice 108.

Solution. D'après l'Exercice 42 question 1 on sait que le graphe de f est au-dessus de la tangente, i.e.

$$f(x) - f(a) \geqslant \mathrm{D}f(a)(x-a)$$

pour tout $x \in$ U ; la preuve de cette inégalité n'utilisait en fait que la convexité de f et sa différentiabilité en a. Si de plus $\mathrm{D}f(a) = 0$, alors $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout x et le tour est joué. La recherche d'extremum est donc extrêmement facile pour une fonction convexe !

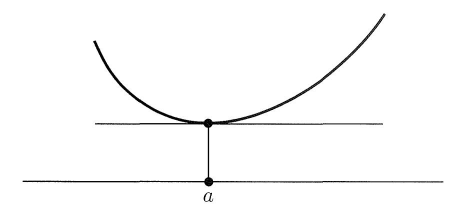


Fig. 168. Minimum d'une fonction convexe.

Soit f une fonction deux fois différentiable sur un ouvert convexe U. Le résultat précédent, joint au critère de convexité de l'Exercice 108, montre que les conditions

$$\mathrm{D}f(a) = 0 \text{ et } \mathrm{D}^2 f(x)(h,h) \geqslant 0 \text{ pour tous } x \in \mathrm{U}, h \in \mathbb{R}^n$$

entraînent que f admet en a un minimum global. Ce résultat n'est ni plus fort ni plus faible que la condition suffisante de minimum donnée au Théorème 7.1 : on suppose seulement ici la forme quadratique $\mathrm{D}^2 f$ positive (non nécessairement définie positive), mais on le suppose en tout point x de U ; on obtient en contrepartie un minimum global (non nécessairement strict).

Exercice 120. ***Fonctions holomorphes et extremums.*** **Soient U un ouvert *connexe* du plan complexe et f une fonction holomorphe sur U.**

1. En raisonnant sur un développement limité de $|f(a+h)|^2 - |f(a)|^2$ pour $h \longrightarrow 0$, montrer que
(i) si la fonction $z \longmapsto |f(z)|$ admet un minimum local sur U, alors ce minimum est nul ;
(ii) si $|f|$ admet un maximum local sur U, alors f est constante sur U.

2. Étudier de même les extremums de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Commentaire. On admet ici qu'une fonction holomorphe est développable en série entière (série de Taylor) au voisinage de chaque point et on établit, en raisonnant sur le développement limité qui s'en déduit, le *principe du maximum* pour cette fonction (question 1(ii)). On reconnaîtra au passage, dans la solution du second cas ci-dessous, une forme du *principe du prolongement analytique.*

Le résultat (i) conduit aisément à l'une des innombrables preuves du *théorème de d'Alembert-Gauss* : si P est un polynôme de degré au moins un en une indéterminée, à coefficients complexes, on montre facilement que $|\mathrm{P}(z)|$ tend vers l'infini avec $|z|$ en raisonnant sur le quotient de $\mathrm{P}(z)$ par son terme de plus haut degré. Par suite la borne inférieure $\inf_{z\in\mathbb{C}} |\mathrm{P}(z)|$ est atteinte en un point a, par un argument de compacité sur un disque suffisamment grand. Ce minimum de $|\mathrm{P}(z)|$ sur $\mathbb{C}$ doit être nul d'après (i), d'où $\mathrm{P}(a) = 0$.

Le principe du maximum sera généralisé à l'Exercice 124.

Solution. 1. Soit a un point de l'ouvert U.

Premier cas. *Supposons que les dérivées de f en a ne sont pas toutes nulles.* Soit alors $f^{(k)}(a)$, avec $k \geqslant 1$, la première dérivée non nulle. Lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \mathrm{O}\left(|h|^{k+1}\right)$$

par la formule de Taylor, d'où

$$|f(a+h)|^2 = |f(a)|^2 + \frac{2}{k!} \mathrm{Re}\left(\overline{f(a)}\, f^{(k)}(a)\, h^k\right) + \mathrm{O}\left(|h|^{k+1}\right) ,$$

ou encore, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|f(a+re^{i\theta})|^2 - |f(a)|^2 = \frac{2r^k}{k!}\left(\mathrm{Re}\left(\overline{f(a)}\, f^{(k)}(a)\, e^{ik\theta}\right) + \mathrm{O}(r)\right) .$$

Si la fonction $|f|$ admet en a un minimum (resp. maximum) local, on en déduit en faisant tendre r vers 0 que cette partie réelle doit être positive ou nulle (resp. négative ou nulle) pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $k \geqslant 1$ et $f^{(k)}(a) \neq 0$, ce n'est bien sûr possible que si $f(a) = 0$, et l'extremum considéré de $|f|$ en a est donc nul. S'il s'agit d'un minimum local, le résultat (i) est ainsi établi ; et il ne peut s'agir d'un maximum local, sinon $|f|$ devrait être identiquement nulle au voisinage de a, d'où $f^{(k)}(a) = 0$, en contradiction avec l'hypothèse de ce premier cas.

Second cas. *Supposons toutes les dérivées $f^{(k)}(a)$ nulles, pour $k \geqslant 1$.* Le développement de f en série de Taylor autour de a se réduit alors à son terme constant, et f est constante sur un voisinage de a. Par suite les dérivées successives de f sont identiquement nulles sur ce voisinage.

Cet argument montre que l'ensemble des $z \in \mathrm{U}$ tels que

$$f'(z) = f''(z) = \cdots = f^{(k)}(z) = \cdots = 0$$

est ouvert dans U. Comme il est évidemment fermé dans U et contient a, c'est U tout entier par connexité de U. Ainsi f est constante sur U.

2. Dans le premier cas ci-dessus on a de même

$$\mathrm{Re}\, f(a+re^{i\theta}) - \mathrm{Re}\, f(a) = \frac{r^k}{k!}\left(\mathrm{Re}\left(f^{(k)}(a)\, e^{ik\theta}\right) + \mathrm{O}(r)\right) ,$$

avec $f^{(k)}(a) \neq 0$. À nouveau la partie réelle à droite ne peut garder le même signe pour tout θ, d'où résulte que $\mathrm{Re}\, f$ ne peut avoir d'extremum local en aucun point de U. Dans le deuxième cas, f est constante sur U.

Ainsi la partie réelle (et de même la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe sur un *ouvert connexe* n'admet d'extremum local que si la fonction est constante.

Variante. Comme $\left|e^{f(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}\, f(z)}$, le résultat 2 peut aussi se déduire de 1 appliqué à la fonction holomorphe $z \mapsto e^{f(z)}$.

Exercice 121. ***Moindres carrés.*** **Étant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$, avec des x_i non tous égaux entre eux, montrer qu'il existe des nombres λ et μ, uniques, qui rendent minimum la somme $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.**

Commentaire. La somme des carrés des distances (mesurées verticalement) des points donnés (x_i, y_i) à la droite $y = \lambda x + \mu$ est donc minimale. Cette droite est appelée *droite des moindres carrés.*

Cette minimisation d'une expression quadratique en deux variables entre dans le cadre général de la recherche de la *projection orthogonale* d'un point sur un sous-espace d'un espace de Hilbert : la variante ci-dessous exploite ce point de vue.

Solution. Notons $f(\lambda, \mu) = \sum_i (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$, $s_k = \sum_i x_i^k$ et $t_k = \sum_i x_i^k y_i$, avec $k \in \mathbb{N}$. On a

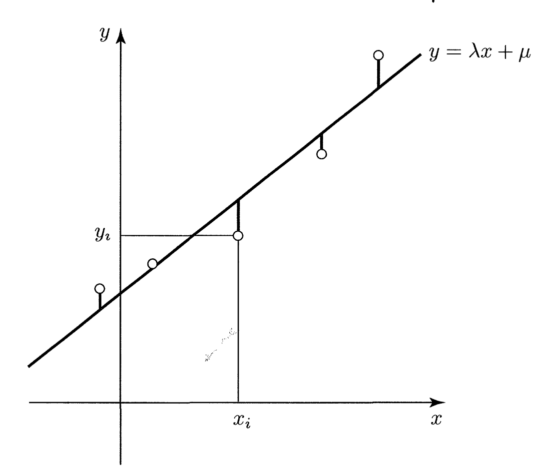


Fig. 169. Droite des moindres carrés.

$$\frac{1}{2}f'_\lambda = s_2\lambda + s_1\mu - t_1 \ , \ \frac{1}{2}f'_\mu = s_1\lambda + s_0\mu - t_0 \ .$$

La condition nécessaire d'extremum $f'_\lambda = f'_\mu = 0$ détermine λ et μ de manière unique : le déterminant de ce système linéaire aux inconnues λ et μ est en effet

$$s_0s_2 - s_1^2 = \left(\sum_i 1^2\right)\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i 1 \cdot x_i\right)^2 \ ,$$

strictement positif par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque, par hypothèse, les vecteurs $(1, \ldots, 1)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ne sont pas proportionnels. On obtient

$$\lambda = \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2} \ , \ \mu = \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{s_0s_2 - s_1^2} \ .$$

Le point (λ, μ) étant ainsi choisi, et (λ', μ') étant un accroissement quelconque, le développement de $f(\lambda + \lambda', \mu + \mu') - f(\lambda, \mu)$ par la formule de Taylor à l'ordre deux ne comporte pas de terme d'ordre un, ni de reste puisque f est un polynôme du second degré. Cette expression se réduit donc à une forme quadratique en (λ', μ'). En isolant les termes du second degré en (λ', μ') dans $f(\lambda + \lambda', \mu + \mu')$ on a ainsi directement

$$\begin{aligned} f(\lambda + \lambda', \mu + \mu') - f(\lambda, \mu) &= f(\lambda', \mu') \\ &= \sum_i (\lambda' x_i + \mu')^2 \geqslant 0 \ , \end{aligned}$$

avec inégalité stricte sauf pour $\lambda' = \mu' = 0$. Par suite f *admet au point* (λ, μ) *un minimum global strict.* Ce résultat pourrait s'obtenir aussi en

observant que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$, sa matrice hessienne étant définie positive en tout point (Exercices 108 et 119).

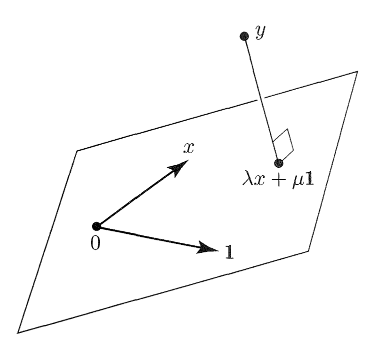


Fig. 170. Projection orthogonale et moindres carrés.

Variante. La solution peut être présentée de manière géométrique, en raisonnant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $u \cdot v = \sum_i u_i v_i$ et de la norme associée. Notons $\mathbf{1}$ le vecteur $(1, \ldots, 1)$. Les points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ étant donnés, on cherche λ et μ tels que

$$f(\lambda, \mu) = \|y - (\lambda x + \mu\mathbf{1})\|^2 = \sum_i (y_i - \lambda x_i - \mu)^2$$

soit minimum. La réponse est fournie par la projection orthogonale de y sur le sous-espace de dimension deux engendré par les vecteurs $\mathbf{1}$ et x ; cette projection est caractérisée par

$$(y - (\lambda x + \mu\mathbf{1})) \cdot \mathbf{1} = 0 \text{ et } (y - (\lambda x + \mu\mathbf{1})) \cdot x = 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$s_1\lambda + s_0\mu - t_0 = 0 \text{ et } s_2\lambda + s_1\mu - t_1 = 0 \ .$$

La méthode se généralise immédiatement pour rechercher des coefficients λ_0,...,λ_m (avec $m < n$) qui minimisent l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \lambda_0 - \lambda_1 x_i - \cdots - \lambda_m x_i^m)^2 \ ,$$

d'où le *polynôme de degré m des moindres carrés.* Ses coefficients sont donnés par la projection orthogonale de y sur le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $m+1$ vecteurs $\mathbf{1}$, x,... et $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$.

Exercice 122. ***Point de Fermat.*** **Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$; on suppose les trois angles du triangle ABC strictement inférieurs à $2\pi/3$. On recherche le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction**

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC}$$

où $\mathrm{MA} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right\|$ désigne la distance euclidienne des points M et A.

1. Montrer que ce minimum est atteint en (au moins) un point P, intérieur au triangle ABC et distinct de A, B et C.

2. Montrer par le calcul différentiel que les angles $\widehat{\mathrm{APB}}$, $\widehat{\mathrm{BPC}}$ et $\widehat{\mathrm{CPA}}$ sont égaux à $2\pi/3$. En déduire que P est unique, et que f admet en ce point un minimum global strict.

3. (*Réservé aux Géomètres*) Sur les côtés du triangle ABC on construit, vers l'extérieur, trois triangles équilatéraux ABC′, BCA′ et ACB′. Montrer que les droites AA′, BB′ et CC′ sont concourantes en P, et que le minimum de f est

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{AA}' = \mathrm{BB}' = \mathrm{CC}' \,.$$

Commentaire[3]**.** Ce problème du plus court chemin reliant trois points peut se concrétiser par une expérience de film de savon, ou par la réalisation mécanique simple suivante.

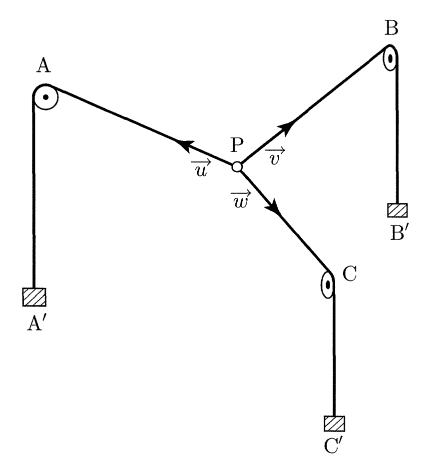


Fig. 171. Équilibre de P et minimum de $f(\mathrm{P}) = \mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$.

Au point P (de masse négligeable) sont attachés trois fils parfaitement flexibles, qui passent sur trois poulies A, B, C et portent trois masses

3. Pour plus de détails, voir S. Hildebrandt, *The calculus of variations today*, The Mathematical Intelligencer vol. 11 n°4, 1989, p. 54-55, ou S. Gueron et R. Tessler, *The Fermat-Steiner problem*, American Math. Monthly 109, May 2002, p. 443-451.

égales en leurs extrémités A′, B′, C′. L'énergie potentielle du système dans un champ de pesanteur uniforme est alors, à un facteur près, $-(\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}')$. Les longueurs PA′, PB′ et PC′ étant fixes, c'est encore, à une constante additive près, $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} = f(\mathrm{P})$. La condition nécessaire d'extremum de f que nous obtiendrons à la question 2 :

$$\operatorname{grad} f(\mathrm{P}) = -\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right) = 0 \ ,$$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}/\mathrm{PA}$ etc., s'interprète physiquement comme la condition d'équilibre du point P soumis aux forces de tension $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des trois fils.

Solution. 1. L'idée est que, la fonction f tendant vers l'infini à l'infini, il suffit de rechercher son minimum sur un compact. Si O est une origine quelconque on a $\mathrm{MA} \geqslant \mathrm{OM} - \mathrm{OA}$ par l'inégalité triangulaire, d'où

$$f(\mathrm{M}) \geqslant 3\mathrm{OM} - f(\mathrm{O})$$

et en particulier $f(\mathrm{M}) > f(\mathrm{O})$ dès que $\mathrm{OM} > (2/3)f(\mathrm{O})$. Sur le disque compact $\mathrm{OM} \leqslant (2/3)f(\mathrm{O})$, la fonction continue f atteint son minimum en (au moins) un point P, qui donne aussi le minimum de f sur tout le plan.

Montrons que P ne peut pas être un sommet du triangle ABC. Deux au moins de ses trois angles sont strictement inférieurs à $\pi/2$, par exemple les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$. Le pied H de la hauteur issue de A est alors entre B et C (strictement), d'où

$$f(\mathrm{H}) = \mathrm{HA} + \mathrm{HB} + \mathrm{HC} = \mathrm{HA} + \mathrm{BC} < \mathrm{BA} + \mathrm{BC} = f(\mathrm{B}) \ .$$

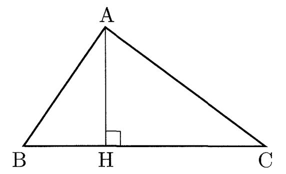


Fig. 172. $f(\mathrm{H}) < f(\mathrm{B})$ et $f(\mathrm{H}) < f(\mathrm{C})$.

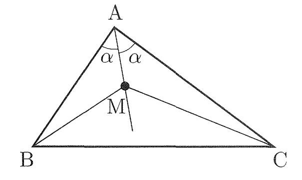


Fig. 173. $f(\mathrm{M}) < f(\mathrm{A})$.

De même $f(\mathrm{H}) < f(\mathrm{C})$; le minimum de f n'est donc atteint ni en B ni en C.

Il n'est pas non plus atteint en A : c'est clair si $\widehat{\mathrm{A}} < \pi/2$ par le raisonnement précédent, mais le cas où $\pi/2 \leqslant \widehat{\mathrm{A}} < 2\pi/3$ demande un autre argument. Considérons par exemple un point M voisin de A sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{A}} = 2\alpha$. On a

$$\mathrm{MB}^2 = \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AM} \cos a + \mathrm{AM}^2$$

d'où, par développement limité de la racine carrée,

$$\mathrm{MB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AM}\cos\alpha + \mathrm{O}(\mathrm{AM}^2)$$

lorsque M tend vers A sur la bissectrice. En évaluant de même MC on obtient

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A}) + (1 - 2\cos\alpha)\mathrm{AM} + \mathrm{O}(\mathrm{AM}^2)\ .$$

Comme $0 < 2\alpha < 2\pi/3$ par hypothèse on a $1 - 2\cos\alpha < 0$, d'où $f(\mathrm{M}) < f(\mathrm{A})$ lorsque M est assez voisin de A sur la bissectrice ; le minimum de f ne peut donc être atteint en A.

Enfin le minimum de f ne peut être atteint en un point P strictement extérieur au triangle ABC : si par exemple P et A sont de part et d'autre de la droite BC, le symétrique P′ de P par rapport à cette droite donne $\mathrm{P'A} < \mathrm{PA}$, $\mathrm{P'B} = \mathrm{PB}$, $\mathrm{P'C} = \mathrm{PC}$, d'où $f(\mathrm{P'}) < f(\mathrm{P})$.

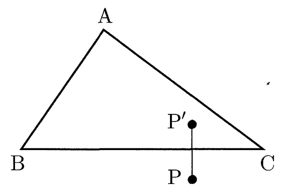


Fig. 174. $f(\mathrm{P'}) < f(\mathrm{P})$.

2. D'après 1 le minimum de f sur le plan est aussi son minimum sur le complémentaire de $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$. Sur cet ouvert la fonction f est de classe C^∞ et on a, en calculant comme à l'Exercice 92,

$$\operatorname{grad} f(\mathrm{P}) = -\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)\ ,$$

avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}/\mathrm{PA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}/\mathrm{PB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\mathrm{PC}}/\mathrm{PC}$ (vecteurs unitaires). La condition nécessaire d'extremum en P s'écrit donc

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0\ .$$

Elle entraîne

$$1 = \overrightarrow{w}^2 = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 = 1 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + 1\,;$$

par suite $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -1/2$, d'où $\widehat{\mathrm{APB}} = 2\pi/3$ et de même pour les angles $\widehat{\mathrm{BPC}}$ et $\widehat{\mathrm{CPA}}$.

Du point P on voit le segment AB sous l'angle $2\pi/3$, donc P appartient à un arc de cercle d'extrémités A et B (*arc capable*), et de même à un arc capable d'extrémités A et C. Ces deux arcs se coupent en deux points au plus ; l'un d'eux est A, l'autre est P (distinct de A d'après 1). Finalement la fonction f atteint son minimum global en un unique point P appelé *point de Fermat* du triangle ABC, intersection des trois arcs capables

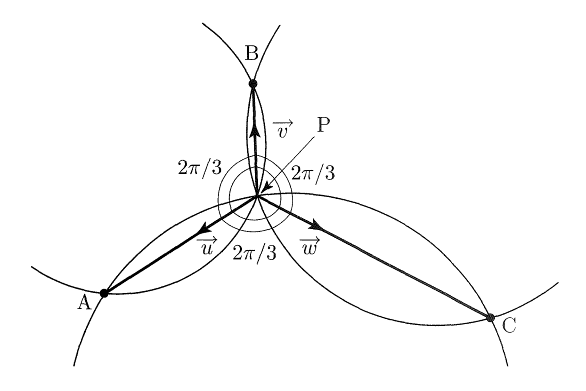


Fig. 175. Point de Fermat et arcs capables.

d'où l'on voit chacun des trois côtés du triangle sous l'angle $2\pi/3$. C'est un minimum strict puisqu'il n'est atteint en aucun autre point.

3. Orientons le plan de façon que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, pris dans cet ordre, forment une base de sens direct. Le point B′ de l'énoncé se déduit alors de C par la rotation de centre A et d'angle $+\pi/3$. Soient M un point quelconque et M′ son image par cette rotation. Le triangle AMM′ est équilatéral, d'où

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) &= \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} = \mathrm{MM'} + \mathrm{MB} + \mathrm{M'B'} \\ &= \mathrm{BM} + \mathrm{MM'} + \mathrm{M'B'} \geqslant \mathrm{BB'} \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire. Si on prend pour M le point de Fermat P (et pour M′ son transformé P′ par la rotation), on a de plus

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}, \overrightarrow{\mathrm{PB}}\right) = 2\pi/3 \ , \ \left(\overrightarrow{\mathrm{PP'}}, \overrightarrow{\mathrm{PA}}\right) = \pi/3$$

(angles orientés de vecteurs), d'où $\left(\overrightarrow{\mathrm{PP'}}, \overrightarrow{\mathrm{PB}}\right) = \pi$ et les points B, P, P′ sont alignés (dans cet ordre).

De même

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{P'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{P'A}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{PC}}, \overrightarrow{\mathrm{PA}}\right) = 2\pi/3 \ , \ \left(\overrightarrow{\mathrm{P'A}}, \overrightarrow{\mathrm{P'P}}\right) = \pi/3 \ ,$$

d'où $\left(\overrightarrow{\mathrm{P'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{P'P}}\right) = \pi$ et les points P, P′, B′ sont alignés (dans cet ordre). Par suite P et P′ appartiennent à la droite BB′ et

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{BP} + \mathrm{PP'} + \mathrm{P'B'} = \mathrm{BB'} \ .$$

On montrerait de même que le point de Fermat appartient aux droites AA′ et CC′, ce qui donne une construction géométrique simple de ce point[4], et que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$.

4. Le point P est aussi l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC′, BCA′, CAB′.

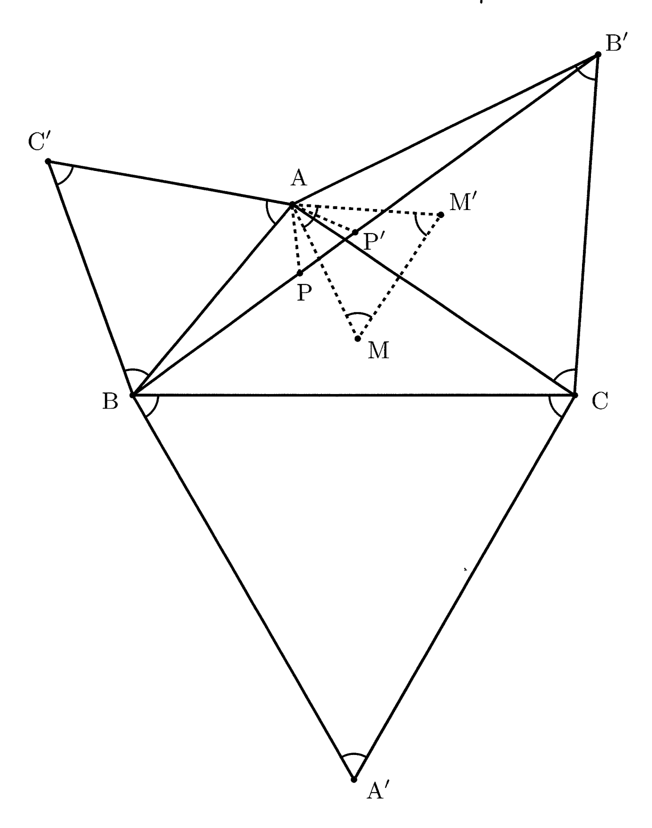


Fig. 176. Géométrie du point de Fermat ; les angles indiqués valent $\pi/3$.

Remarque. Si l'un des angles du triangle ABC (par exemple $\widehat{\mathrm{A}}$) est supérieur ou égal à $2\pi/3$ on peut montrer, en adaptant la méthode de 3, que le minimum de la fonction f est atteint en A.

Exercice 123. ***Perturbation d'un extremum.*** **Soit $(t,x) \mapsto \mathrm{F}(t,x) = f_t(x)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f_0 admet un minimum local strict en un point $x = a$, avec $f_0''(a) > 0$.**

1. Montrer que, pour tout t suffisamment voisin de 0, la fonction f_t admet un minimum local strict en un point $\xi(t)$ voisin de a, et donner un développement limité au premier ordre de la valeur de f_t en ce point.

2. ***Exemple.*** **Illustrer ce qui précède avec $f_t(x) = (x^3/3) - (1+t)x$.**

Solution. 1. La condition nécessaire d'extremum au point $\xi(t)$ s'écrit

$$(f_t)'\,(\xi(t)) = \mathrm{F}'_x(t,\xi(t)) = 0\ .$$

Comme

$$F'_x(0,a) = f'_0(a) = 0 \text{ et } F''_{x^2}(0,a) = f''_0(a) > 0 \ ,$$

cette condition définit une fonction implicite $\xi(t)$: il existe un voisinage V de 0, un voisinage W de a dans $\mathbb{R}$ et une unique fonction $\xi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ de classe C^1, tels que

$$(t \in \mathrm{V}, x \in \mathrm{W} \text{ et } F'_x(t,x) = 0) \iff (t \in \mathrm{V} \text{ et } x = \xi(t))$$

et que la dérivée $F''_{x^2}(t, \xi(t))$ reste strictement positive pour $t \in \mathrm{V}$. La fonction $f_t : x \mapsto F(t,x)$ admet donc un minimum local strict en $x = \xi(t)$.

La dérivée en $t = 0$ de la valeur $f_t(\xi(t)) = F(t, \xi(t))$ s'écrit

$$F'_t(0,a) + F'_x(0,a)\xi'(0) = F'_t(0,a)$$

puisque $F'_x(0,a) = 0$, d'où le développement limité pour $t \to 0$

$$f_t(\xi(t)) = f_0(a) + tF'_t(0,a) + o(t) \ .$$

Remarque. Un calcul classique de dérivée de fonction implicite donnerait

$$F''_{tx}(0,a) + F''_{x^2}(0,a)\xi'(0) = 0$$

d'où le développement limité

$$\xi(t) = a - t\frac{F''_{tx}}{F''_{x^2}}(0,a) + o(t) \ .$$

2. L'étude directe n'offre aucune difficulté : comme

$$(f_t)'(x) = x^2 - (1+t) \text{ et } (f_t)''(x) = 2x \ ,$$

la fonction f_t admet pour tout $t > -1$ un minimum local strict au point $\xi(t) = \sqrt{1+t}$, de valeur

$$(f_t)(\xi(t)) = -\frac{2}{3}(1+t)^{3/2} = -\frac{2}{3} - t + \mathrm{O}(t^2) \ .$$

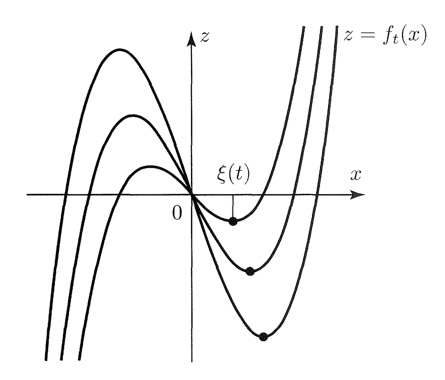


Fig. 177. Minimum de $f_t(x) = (x^3/3) - (1+t)x$.

On peut voir les graphes des fonctions f_t comme les sections verticales (à t constant) de la surface d'équation $z = \mathrm{F}(t,x)$; aux points $x = \xi(t)$ on a $\mathrm{F}'_x = 0$ et le plan tangent à cette surface est parallèle à l'axe des x.

Exercice 124. ***Principe du maximum.*** **On considère l'opérateur différentiel**

$$\mathrm{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

sur un ouvert *borné* Ω de $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$, les a_{ij}, b_i étant des constantes réelles. On suppose la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ symétrique, *positive* (i.e. $\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j \geqslant 0$ pour tous x_i) et non nulle.

Soit u une fonction réelle, de classe C^2 sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On veut montrer le résultat suivant :

si $\mathrm{L}u(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur le bord $\partial\Omega$, c'est-à-dire

$$u(x) \leqslant \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega} \, .$$

1. Si A et B sont deux matrices symétriques positives, montrer que $\mathrm{tr}\, \mathrm{AB} \geqslant 0$.

2. Si le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint en un point a de Ω, montrer que $\mathrm{L}u(a) \leqslant 0$.

3. Conclure en remplaçant $u(x)$ par $v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}$, où ε et λ seront choisis convenablement et i est tel que $a_{ii} > 0$.

4. En déduire que le *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathrm{L}u(x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \\ u(y) = f(y) & \text{pour } y \in \partial\Omega \, , \end{cases}$$

où f est une fonction donnée continue sur $\partial\Omega$, admet au plus une solution u continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^2 sur Ω.

Commentaire. On n'établit ici que le principe du maximum « faible », applicable notamment aux fonctions harmoniques (cas où $\mathrm{L} = \Delta$ est le laplacien de $\mathbb{R}^n$) ou aux solutions de l'équation de la chaleur[5] (cas où $\mathrm{L} = \Delta_x - \partial_t$, avec $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$).

La méthode est présentée ici dans un cadre relativement général, pour y montrer le rôle de la positivité de la matrice A des coefficients. Mais si on cherche seulement à établir le principe du maximum pour les *fonctions*

5. Pour l'équation de la chaleur toutefois, les ouverts Ω qui interviennent naturellement sont non bornés, le temps t allant de 0 à l'infini. Pour l'adaptation à ce cas, voir Körner [27] p. 344 (par une méthode analogue à celle utilisée ici) ou Zuily et Queffélec [40] p. 105 (où l'unicité de la solution est établie par une « intégrale d'énergie »).

harmoniques ($\Delta u = 0$), on pourra sauter la question 1, et se contenter d'une version simplifiée de 3 (voir remarque).

Pour le principe du maximum « fort », voir Zuily et Queffélec [40] p. 458 : en supposant la matrice A *définie positive* on montre que, si $\mathrm{L}u \geqslant 0$ sur Ω et si u atteint son maximum en un point de Ω (ouvert borné connexe), elle est constante dans Ω. On peut ainsi retrouver le principe du maximum pour les fonctions holomorphes (Exercice 120), car leurs parties réelle et imaginaire sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$, grâce à l'égalité $\Delta = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$; voir [40] p.463.

Solution. 1. Étant symétrique réelle, la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale : il existe une matrice de passage P orthogonale (${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}$) telle que $\mathrm{A}' = {}^t\mathrm{PAP} = (a'_{ij})$ soit une matrice diagonale. Soit $\mathrm{B}' = {}^t\mathrm{PBP} = (b'_{ij})$. On a

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' = {}^t\mathrm{PAP}{}^t\mathrm{PBP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{ABP}\ ,$$

d'où

$$\operatorname{tr}\mathrm{AB} = \operatorname{tr}\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \sum_i a'_{ii}b'_{ii}\ .$$

La positivité de A et B est préservée par ce changement de base; il en résulte que $\operatorname{tr}\mathrm{AB} \geqslant 0$ puisque les éléments diagonaux d'une matrice positive sont positifs ou nuls.

2. La fonction u, continue sur le compact $\overline{\Omega}$, y atteint son maximum. Supposons que ce soit en un point a de l'ouvert Ω. D'après les conditions nécessaires d'extremum sur un ouvert (Théorème 7.1), $\mathrm{D}u(a) = 0$ et $-\mathrm{D}^2u(a)$ est une matrice symétrique positive. On en déduit avec 1

$$\mathrm{L}u(a) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{AD}^2u(a)\right) \leqslant 0\ .$$

Ceci établit une première forme du résultat souhaité : si $\mathrm{L}u(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors u atteint son maximum sur le bord $\partial\Omega$, non à l'intérieur.

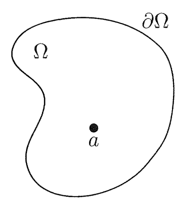


Fig. 178.

3. En perturbant légèrement la fonction u, on va étendre ce résultat aux cas où $\mathrm{L}u \geqslant 0$ (et notamment $\mathrm{L}u = 0$). Si on pose $v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}$ on a, par linéarité de l'opérateur L,

$$\mathrm{L}v(x) = \mathrm{L}u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}\left(a_{ii}\lambda^2 + b_i\lambda\right)\ .$$

Comme A est positive, ses coefficients diagonaux a_{ii} sont tous positifs ou nuls. En fait, A n'étant pas nulle, l'un au moins des a_{ii} est strictement positif : sinon ils seraient tous nuls et le choix de

$$x = (0, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, x_l, 0, \ldots, 0)$$

donnerait

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 2a_{kl} x_k x_l \ ,$$

qui peut changer de signe si $a_{kl} \neq 0$.

Si donc $a_{ii} > 0$ on peut choisir λ tel que $a_{ii}\lambda^2 + b_i\lambda > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a alors

$$\mathrm{L}v(x) > \mathrm{L}u(x) \geqslant 0 \ .$$

D'après 2 la fonction v atteint son maximum sur $\partial\Omega$, d'où l'inégalité

$$u(x) < v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i} \leqslant \max_{y \in \partial\Omega} \left(u(y) + \varepsilon e^{\lambda y_i} \right)$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Comme λy_i est majoré (par M, disons) sur le compact $\overline{\Omega}$ on en déduit

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon e^{\mathrm{M}} \ ,$$

d'où $u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(y)$ en faisant tendre ε vers 0.

Remarque. Si on s'intéresse seulement au laplacien $\mathrm{L} = \Delta$, ou plus généralement aux cas où L ne comporte que des dérivées secondes ($b_i = 0$), on peut se dispenser d'introduire λ en effectuant le raisonnement précédent avec la fonction $v(x) = u(x) + \varepsilon x_i^2$.

4. La différence $u = u_1 - u_2$ de deux solutions u_1 et u_2 du problème de Dirichlet vérifie $\mathrm{L}u = 0$ sur Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après le principe du maximum, on obtient $u(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, et de même $-u(x) \leqslant 0$ en échangeant u_1 et u_2. Par suite $u_1 = u_2$.

Exercice 125. ***Minimum et stabilité.*** **Sur l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on considère le système différentiel du second ordre**

$$x'' = -\operatorname{grad} \mathrm{U}(x) \ , \ x(0) = x_0 \ , \ x'(0) = v_0 \ , \qquad (*)$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable numérique t, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, où $'$ désigne la dérivation par rapport à t, et $\mathrm{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée de classe C^2 (*fonction potentiel*).

Une position d'équilibre a (point critique de U) est dite *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que toute solution de $(*)$ avec $\|x_0 - a\| \leqslant \alpha$ et $\|v_0\| \leqslant \alpha$ soit définie pour tout $t \geqslant 0$, et vérifie $\|x(t) - a\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant 0$: on restera toujours arbitrairement

près de a pourvu que l'on parte suffisamment près de a, avec une vitesse suffisamment faible.

1. Dans cette question préliminaire, on suppose que U est une forme quadratique. Montrer que l'origine est une position d'équilibre stable si et seulement si U possède un minimum strict en ce point.

[On pourra résoudre (∗) dans un système de coordonnées où U est diagonalisée.]

Désormais on ne suppose plus que U est quadratique.

2. Si x est solution de (∗), montrer que l'expression $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\|x'\|^2 + \mathrm{U}(x)$ reste constante.

3. On suppose que U est *minorée* sur $\mathbb{R}^n$. Déduire de 2 que toute solution maximale de (∗) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

[On pourra montrer que $x(t)$ et $x'(t)$ admettent des limites finies aux bornes de l'intervalle de définition, et utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.]

4. On suppose que U admet un *minimum global strict* en un point a. Montrer que a est une *position d'équilibre stable*.

[On choisira les conditions initiales pour rendre assez petite la constante E de 2.]

Commentaire. L'*équation de Newton* (∗) traduit la loi fondamentale de la dynamique du point matériel soumis à une force dérivant d'un potentiel U. La classique *intégrale première de l'énergie* (question 2) permet de relier le comportement des solutions $x(t)$ à la géométrie des surfaces de niveau $\mathrm{E} =$ *constante* dans l'*espace des phases* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la variable (x, x') ; voir dans Arnold [1] §12 une étude détaillée du cas $n = 1$.

En un point critique du potentiel on a $\operatorname{grad} \mathrm{U}(a) = 0$, et le développement de Taylor de $\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(a)$ commence par des termes quadratiques. Ceci motive l'étude faite en 1, qui correspond à une *linéarisation* du système (∗) au voisinage de l'équilibre (cf. Exercices 45 et 46). L'exemple $n = 1$ et $\mathrm{U}(x) = -\cos x$ est celui de l'équation du pendule, déjà rencontrée aux Exercices 45 et 60.

Le résultat de 4 signifie intuitivement que, parti d'une position initiale voisine de l'équilibre, le point matériel ne pourra s'échapper du « puits de potentiel » créé par le minimum de U que si sa vitesse initiale est suffisamment grande. La réciproque de 4 est fausse ; voir le contre-exemple donné à la fin.

Solution. 1. Pour un potentiel quadratique l'équation de Newton est un système linéaire à coefficients constants, et se résout de manière élémentaire. On peut en effet diagonaliser la forme quadratique par un changement linéaire de coordonnées $y = \mathrm{P}x$ dans $\mathbb{R}^n$ (où P est une matrice de passage orthogonale), sous la forme

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 = \mathrm{V}(y) \; .$$

Les valeurs propres λ_j sont réelles.

Pour traduire le système $(*)$ dans les nouvelles coordonnées revenons à la définition du gradient, caractérisé par l'égalité $\mathrm{grad}\,\mathrm{U}(x)\cdot z = \mathrm{DU}(x)z$ pour tout vecteur $z \in \mathbb{R}^n$. On a d'une part, en dérivant la fonction composée $\mathrm{U}(x) = \mathrm{V}(y) = \mathrm{V}(\mathrm{P}x)$,

$$\mathrm{DU}(x)z = (\mathrm{DV}(y) \circ \mathrm{P})\, z = \mathrm{DV}(y)\mathrm{P}z = \mathrm{grad}\,\mathrm{V}(y)\cdot \mathrm{P}z \; .$$

D'autre part, P étant orthogonale,

$$\mathrm{DU}(x)z = \mathrm{grad}\,\mathrm{U}(x)\cdot z = \mathrm{P}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{U}(x)\cdot \mathrm{P}z \; .$$

Par suite

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{V}(y) = \mathrm{P}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{U}(x)$$

par identification. Comme $y'' = \mathrm{P}x''$ le système $(*)$ est donc équivalent à

$$y'' = -\,\mathrm{grad}\,\mathrm{V}(y) \;,\; y(0) = y_0 \;,\; y'(0) = w_0 \;,$$

avec $y_0 = \mathrm{P}x_0$, $w_0 = \mathrm{P}v_0$, c'est-à-dire

$$y_j'' = -2\lambda_j y_j \;,\; y_j(0) = y_{0,j} \;,\; y_j'(0) = w_{0,j}$$

avec $1 \leqslant j \leqslant n$. Les composantes y_j se séparent ; en posant $-2\lambda_j = \omega_j^2$ (où ω_j est réel ou imaginaire pur) on obtient la solution

$$\begin{aligned} y_j(t) &= y_{0,j}\,\mathrm{ch}\,\omega_j t + w_{0,j}\frac{\mathrm{sh}\,\omega_j t}{\omega_j} && \text{si } \omega_j \neq 0 \\ y_j(t) &= y_{0,j} + w_{0,j} t && \text{si } \omega_j = 0 \; . \end{aligned}$$

Si tous les ω_j sont imaginaires purs (non nuls), les facteurs $\mathrm{ch}\,\omega_j t$ et $\mathrm{sh}\,\omega_j t$ sont des fonctions trigonométriques, inférieures à 1 en valeur absolue. Soit C un majorant des $1/|\omega_j|$; il vient

$$\sum_j |y_j(t)|^2 \leqslant \sum_j (|y_{0,j}| + \mathrm{C}|w_{0,j}|)^2 \leqslant (\|y_0\| + \mathrm{C}\,\|w_0\|)^2$$

par l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne, d'où

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| \leqslant \|y_0\| + \mathrm{C}\,\|w_0\| = \|x_0\| + \mathrm{C}\,\|v_0\|$$

pour tout t, puisque P est une matrice orthogonale. Il y a donc stabilité de la position d'équilibre 0.

Si l'un au moins des ω_j est réel, on pourra choisir w_0 de norme arbitrairement petite tel que $|y_j(t)|$ tende vers l'infini quand $t \to +\infty$.

En résumé, l'origine est un équilibre stable si et seulement si les $\lambda_j = -\omega_j^2/2$ sont toutes strictement positives, c'est-à-dire si U est définie positive, ou encore si U admet un minimum strict à l'origine.

2. Soit $t \mapsto x(t)$ une solution de $(*)$, deux fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Le produit scalaire par x' donne

$$x'(t) \cdot x''(t) = -\operatorname{grad} \mathrm{U}(x(t)) \cdot x'(t) = -\left(\mathrm{U}(x(t))\right)'$$

(dérivée de fonction composée), d'où $\mathrm{E}'(t) = 0$ en notant

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\left\|x'(t)\right\|^2 + \mathrm{U}(x(t)) \; .$$

Par suite l'énergie $\mathrm{E}(t)$ est constante sur I. Dans la suite on note E cette constante.

3. Soient U_0 un minorant de U et $\mathrm{I} =]b, c[$ un intervalle ouvert maximal contenant 0 où est définie une solution x de $(*)$. Montrons par l'absurde que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

D'après 2 on a pour $t \in \mathrm{I}$

$$\|x'(t)\| \leqslant \sqrt{2(\mathrm{E} - \mathrm{U}_0)} = \mathrm{M}$$

d'où, par l'inégalité de la moyenne,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leqslant \mathrm{M}|t_1 - t_2|$$

pour tous $t_1, t_2 \in \mathrm{I}$.

Si c était fini, on en déduirait par le critère de Cauchy que $x(t)$ admet une limite finie ℓ lorsque t tend vers c à gauche. Par suite $x''(t) = -\operatorname{grad} \mathrm{U}(x(t))$ tendrait vers $\operatorname{grad} \mathrm{U}(\ell)$, donc serait borné au voisinage de c et, par un raisonnement analogue, la fonction $x'(t)$ admettrait elle aussi une limite finie ℓ'. Le mouvement pourrait alors continuer au-delà de $t = c$: le système différentiel

$$y'' = -\operatorname{grad} \mathrm{U}(y) \; , \; y(c) = \ell \; , \; y'(c) = \ell'$$

admettrait, par le théorème de Cauchy-Lipschitz (Exercice 60, applicable puisque grad U est de classe C^1), une solution y sur un intervalle $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, qui coïnciderait avec x sur $]c - \varepsilon, c[$ par unicité, d'où un prolongement de x en une solution sur l'intervalle $]b, c+\varepsilon[$. Ceci contredit la définition de c. Par suite $c = +\infty$. On montrerait de même que $b = -\infty$, d'où $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Contre-exemple. La fonction $x(t) = 1/(1 - t)$ est solution de l'équation de Newton avec $n = 1$, $\mathrm{U}(x) = -x^4/2$, $x_0 = 1$, $v_0 = 1$, mais n'est

pas prolongeable au-delà de $t = 1$. L'hypothèse « U minorée » est donc essentielle.

4. D'abord $\operatorname{grad} \mathrm{U}(a) = 0$ par la condition nécessaire d'extremum ; l'équation différentielle $x'' = -\operatorname{grad} \mathrm{U}(x)$ admet donc la solution $x(t) = a$, autrement dit le point a est une position d'équilibre. En ajoutant une constante à U si nécessaire, on peut supposer (pour simplifier les notations) que le minimum de U est $\mathrm{U}(a) = 0$.

D'après 3 la solution de $(*)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a d'après 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{U}(x(t)) \leqslant \mathrm{E} = \frac{1}{2} \|v_0\|^2 + \mathrm{U}(x_0) .$$

L'*idée de la solution* est que, pour des conditions initiales convenables (x_0 proche de a et faible vitesse initiale), cette inégalité oblige $x(t)$ à rester voisin de a.

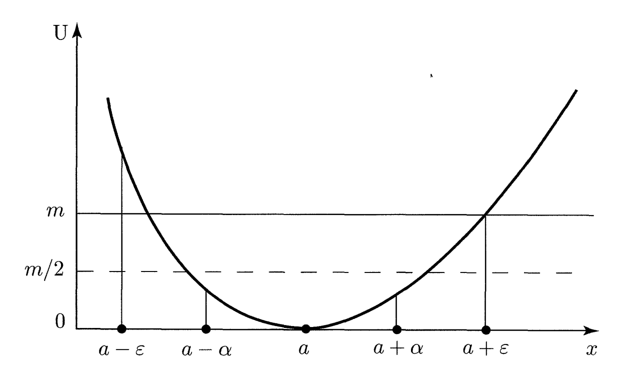


Fig. 179. Puits de potentiel : si $\|x_0 - a\| \leqslant \alpha$ et $\|v_0\| \leqslant \alpha$, le potentiel de $x(t)$ ne peut monter au-dessus de m, d'où $\|x(t) - a\| < \varepsilon$.

Comme U a un minimum strict en a on a $\mathrm{U}(x) > 0$ si $\|x - a\| = \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Le nombre

$$m = \inf_{\|x-a\|=\varepsilon} \mathrm{U}(x)$$

est strictement positif, puisque cette borne inférieure est atteinte grâce à la compacité de la sphère de rayon ε. Choisissons ensuite $\alpha > 0$ assez petit pour que

$$\alpha < \varepsilon \text{ , } \alpha^2 < m \text{ et}$$

$$\|x - a\| \leqslant \alpha \text{ entraîne } \mathrm{U}(x) \leqslant m/2 .$$

Alors les inégalités $\|v_0\| \leqslant \alpha$ et $\|x_0 - a\| \leqslant \alpha$ impliquent

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \|v_0\|^2 + \mathrm{U}(x_0) \leqslant \frac{\alpha^2}{2} + \frac{m}{2} < \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m ,$$

d'où $U(x(t)) < m$ pour tout t et, par définition de m, $\|x(t) - a\|$ ne peut prendre la valeur ε. Comme à l'instant initial $\|x_0 - a\| \leqslant \alpha < \varepsilon$, on a donc

$$\|x(t) - a\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} ,$$

ce qu'il fallait établir.
Contre-exemple. Considérons le potentiel

$$U(x) = \cos^2 \frac{1}{x} \cdot e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ , } U(0) = 0 \text{ ,}$$

de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (cf. Exercice 115 question 1), qui admet un minimum global *non strict* à l'origine. Étant donné $\varepsilon > 0$ choisissons k entier, $k \geqslant 1$, tel que $1/k\pi \leqslant \varepsilon$. En reprenant le raisonnement précédent avec $1/k\pi$ au lieu de ε et $m = U(1/k\pi) = e^{-k^2\pi^2}$ on établira la stabilité de l'équilibre 0. L'hypothèse de minimum strict n'est donc pas nécessaire ici pour assurer la stabilité, à la différence du cas d'un potentiel quadratique.

Exercice 126. ***Distance d'un point à une surface.*** **Soit S une hypersurface de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ définie par une paramétrisation $x = \varphi(u)$, où $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n-1}$, et $D\varphi$ est injective en tout point. Étant donné un point $a \in \mathbb{R}^n$ on étudie la fonction**

$$f(u) = \|\varphi(u) - a\|^2 \text{ .}$$

1. Montrer qu'un point u_0 de U est point critique de f si et seulement s'il existe N, vecteur unitaire normal en $x_0 = \varphi(u_0)$ à S, et un scalaire α tels que

$$a - x_0 = \alpha N \text{ .}$$

2. Dans la situation de 1, établir le développement limité

$$f(u_0 + h) - f(u_0) = \Phi_1(h) - \alpha\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, où Φ_1 et Φ_2 sont les deux *formes quadratiques fondamentales* de S, calculées au point u_0 (Exercice 112 question 1).

3. La fonction f admet-elle un extremum local en u_0 ? Donner une discussion complète pour $n = 2$ (cas d'une courbe plane paramétrée par l'abscisse curviligne).

Solution. 1. En différentiant le carré scalaire qui donne f, on obtient

$$Df(u_0)h = 2\,(\varphi(u_0) - a) \cdot D\varphi(u_0)h \text{ ,}$$

où $h \in \mathbb{R}^{n-1}$ est un vecteur quelconque. Comme l'image de $\mathbb{R}^{n-1}$ par $D\varphi(u_0)$ est l'espace tangent à S au point $x_0 = \varphi(u_0)$, on en déduit que u_0

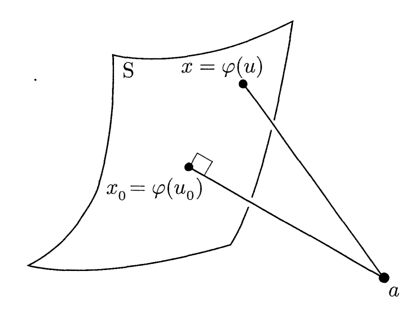


Fig. 180. Distance de a à S.

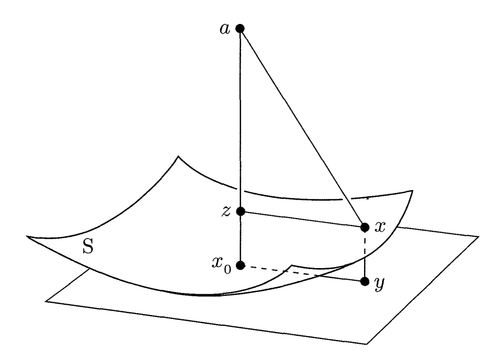


Fig. 181. Étude de $\|x - a\|^2$.

est point critique de f (i.e. $Df(u_0) = 0$) si et seulement si $a - x_0$ est un vecteur normal à S en x_0, donc de la forme αN, c'est-à-dire encore si le point a appartient à la normale à S en x_0.

2. On a alors $f(u_0) = \|x_0 - a\|^2 = \|\alpha \mathrm{N}\|^2 = \alpha^2$. Pour exprimer $f(u_0 + h)$ notons $x = \varphi(u_0 + h)$, y la projection orthogonale de x sur l'espace tangent en x_0 à S, et z sa projection orthogonale sur la normale.

Rappelons la définition des formes quadratiques fondamentales Φ_1 et Φ_2, calculées en u_0 :

$$\Phi_1(h) = \|\mathrm{D}\varphi(u_0)h\|^2$$

$$\Phi_2(h) = \mathrm{N} \cdot \mathrm{D}^2\varphi(u_0)(h, h) .$$

Leur interprétation géométrique (Exercice 112 question 1) donne

$$\|x - z\|^2 = \|y - x_0\|^2 = \Phi_1(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

$$\mathrm{N} \cdot (z - x_0) = \frac{1}{2}\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right) .$$

Or, par le théorème de Pythagore dans le triangle axz,

$$f(u_0 + h) = \|x - a\|^2 = \|x - z\|^2 + \|a - z\|^2$$

et, les vecteurs $a-x_0 = \alpha\mathrm{N}$ et $z-x_0$ étant colinéaires à N, on a simplement

$$\begin{aligned}\|a-z\|^2 &= \|(a-x_0)-(z-x_0)\|^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right)\right)^2 \\ &= \alpha^2 - \alpha\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right) .\end{aligned}$$

En réunissant les résultats obtenus il vient finalement

$$f(u_0+h) - f(u_0) = \Phi_1(h) - \alpha\Phi_2(h) + o\left(\|h\|^2\right) .$$

3. On suppose toujours le point a choisi sur la normale en x_0 à S, avec $a - x_0 = \alpha\mathrm{N}$.

La forme quadratique Φ_1 est définie positive, ce qui permet de récrire le résultat de 2 sous la forme

$$f(u_0+h) - f(u_0) = (1 - \alpha\mathrm{C_N}(h))\,\Phi_1(h) + o\left(\|h\|^2\right) ,$$

où $\mathrm{C_N}(h) = \Phi_2(h)/\Phi_1(h)$ est la courbure normale en x_0 dans la direction du vecteur tangent $\mathrm{D}\varphi(u_0)h$. Soit A_i la matrice de Φ_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$. On a vu à l'Exercice 112 question 2 que, lorsque h varie, $\mathrm{C_N}(h)$ peut prendre toute valeur comprise entre $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$, plus petite et plus grande valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1^{-1}$. Par suite f a un minimum (resp. maximum) local strict en u_0 si $1-\alpha\lambda_{\min}$ et $1-\alpha\lambda_{\max}$ sont tous deux strictement positifs (resp. négatifs). Le résultat dépend donc de la position de a sur la normale en x_0 à S.

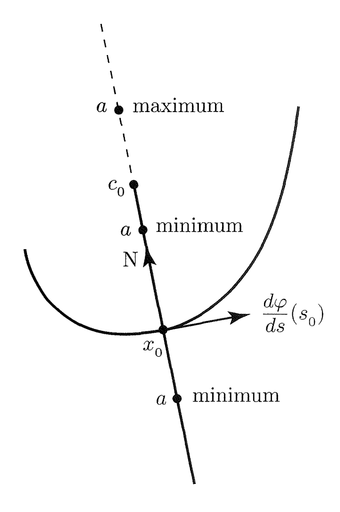


Fig. 182. Cas d'une courbe : discussion de l'extremum de $\|x-a\|^2$.

Pour une courbe de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne $u = s$, on peut supposer le plan orienté et prendre pour N le vecteur unitaire normal directement perpendiculaire au vecteur unitaire tangent $(d\varphi/ds)(s_0)$. On a alors simplement

$$\Phi_1(h) = h^2 \ , \ \Phi_2(h) = \mathrm{N} \cdot \frac{d^2\varphi}{ds^2}(s_0)h^2 = \mathrm{C}h^2 \ ,$$

où C est la courbure (orientée) de la courbe en $x_0 = \varphi(s_0)$. Par suite

$$f(s_0 + h) - f(s_0) = (1 - \alpha\mathrm{C})h^2 + o(h^2) \ .$$

Discussion. Si $\mathrm{C} = 0$ la fonction f admet donc un minimum local strict en s_0. Si $\mathrm{C} \neq 0$, notons R le *rayon de courbure* et c_0 le *centre de courbure* de la courbe en x_0, définis par

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{C}} \ , \ c_0 - x_0 = \mathrm{R}\,\mathrm{N} \ .$$

La fonction f admet donc un minimum local strict en s_0 si $1 - \alpha\mathrm{C} = (\mathrm{R} - \alpha)/\mathrm{R} > 0$ c'est-à-dire si, sur la normale en x_0 à la courbe, le point a est du même côté que x_0 par rapport au centre de courbure. Elle admet un maximum local strict si a est du côté opposé à x_0. Enfin l'étude pour $a = c_0$ nécessiterait d'examiner les termes suivants du développement de f.

Exercice 127. ***Géométrie de la méthode du col.* Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine du plan complexe, avec (pour simplifier les notations) $f(0) = 0$.**

1. On suppose $f'(0) \neq 0$. Montrer que les courbes de niveau respectives de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ (considérées comme fonctions de deux variables réelles) se coupent à l'origine à angle droit.

Montrer que les courbes de niveau de $\mathrm{Re}\, f$ sont lignes de plus grande pente (Exercice 28) pour $\mathrm{Im}\, f$, et *vice versa*.

2. On suppose $f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$. Montrer qu'à l'origine $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ présentent un point col, que leurs courbes de niveau ont un point double, et se coupent sous l'angle $\pi/4$.

Déterminer les directions de plus grande pente de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ à l'origine.

Commentaire. On a vu à l'Exercice 18, et on retrouve en 1 ici, les particularités liées à l'holomorphie de f au niveau de la différentielle première : si l'origine n'est pas point critique ($f'(0) \neq 0$), la fonction f se comporte localement comme $f'(0)z$. On étudie de même en 2 le cas d'un point critique non dégénéré ($f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$), où f se comporte comme $f''(0)z^2/2$.

Les résultats sur les courbes de niveau peuvent être exploités pour l'*étude asymptotique d'intégrales* de la forme

$$F(t) = \int_\gamma e^{tf(z)} g(z)\, dz \ ,$$

où t est un paramètre réel qui tend vers $+\infty$, et γ un chemin d'extrémités a et b dans le plan complexe. Si f est réelle sur γ, cette intégrale peut s'étudier (sous des hypothèses convenables) par la méthode de Laplace : on a vu à l'Exercice 113 que la contribution essentielle à l'intégrale vient des points où $f(z)$ est maximum.

Dans le cas général, avec f et g holomorphes, on cherche d'abord à modifier le chemin de a à b (sans changer l'intégrale, grâce au théorème de Cauchy), de manière à avoir des valeurs de $|e^{tf}| = e^{t\,\mathrm{Re}\, f}$ aussi petites que possible le long du parcours. En interprétant $\mathrm{Re}\, f(z)$ comme une altitude, il s'agit donc d'aller de a à b dans un paysage montagneux[6], en s'élevant le moins possible. L'étude présente, comme le bon sens montagnard, suggère de traverser des cols de $\mathrm{Re}\, f$ en suivant des lignes de plus grande pente de cette fonction ; on suivra donc des courbes de niveau de $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi $\mathrm{Im}\, f$, constant sur γ, sortira de l'intégrale, et on pourra utiliser la méthode de Laplace... Sur cette *méthode du col* (en anglais *steepest descent*) et son application à l'intégrale d'Airy, voir de Bruijn [5] chapitre 5, ou Erdélyi [21] chapitre 2, ou encore Dieudonné [17] chapitre 9.

Solution. 1. Notons $f'(0) = a + ib \neq 0$, avec a et b réels. La formule de Taylor à l'origine

$$f(z) = f'(0)z + O(z^2)$$

se traduit par

$$\mathrm{Re}\, f(x+iy) = ax - by + \cdots$$
$$\mathrm{Im}\, f(x+iy) = bx + ay + \cdots$$

où les $\cdots$ sont d'ordre deux au moins. Les différentielles en $(x, y) = (0, 0)$ de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont donc pas nulles. Cela reste vrai au voisinage, par continuité, et les courbes de niveau de ces fonctions sont bien des sous-variétés (Théorème 5.10). Leurs tangentes en 0, d'équations respectives

$$ax - by = 0 \ , \ bx + ay = 0 \ ,$$

sont orthogonales. Il en est de même, par translation de l'origine, en tout autre point voisin de 0.

6. Dépourvu de sommets, d'après le principe du maximum !

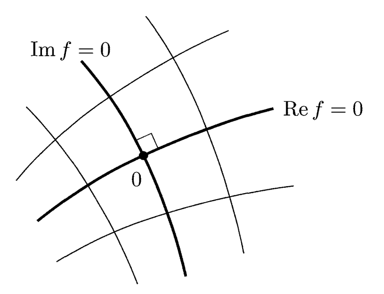


Fig. 183. Courbes de niveau de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ (cas où $f'(0) \neq 0$).

Variante. Comme $f'(0) \neq 0$, le théorème d'inversion locale montre que la fonction f réalise un difféomorphisme local holomorphe. En particulier f^{-1} est une transformation conforme au voisinage de l'origine (Exercice 18). Les courbes de niveau de $\operatorname{Re} f(z)$ et $\operatorname{Im} f(z)$, images par f^{-1} de celles de $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$, se coupent donc à angle droit.

En un point donné voisin de 0 la direction de plus grande pente de $\operatorname{Re} f$ est celle de son gradient (Exercice 28). Or grad$(\operatorname{Re} f)$ est orthogonal à la courbe de niveau de $\operatorname{Re} f$, donc tangent à celle de $\operatorname{Im} f$ d'après ce qui précède. Les courbes de niveau de $\operatorname{Im} f$ sont donc lignes de plus grande pente de $\operatorname{Re} f$, et *vice versa*.

2. Comme $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$, le point critique 0 est isolé : on $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \neq 0$ assez voisin de 0. En ces points, la situation est celle de 1.

Pour l'étude à l'origine, notons maintenant $f''(0) = a + ib \neq 0$. La formule de Taylor

$$f(z) = \frac{1}{2} f''(0) z^2 + \mathrm{O}(z^3)$$

se traduit par

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(ax^2 - 2bxy - ay^2\right) + \cdots$$
$$\operatorname{Im} f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(bx^2 + 2axy - by^2\right) + \cdots$$

où les $\cdots$ sont d'ordre trois au moins. Les matrices hessiennes en 0 de $\operatorname{Re} f$, resp. $\operatorname{Im} f$, sont donc

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix},$$

de signature $(+-)$ et de valeurs propres $\pm|f''(0)|$. En se reportant au résumé sur les courbes de niveau en début de chapitre, on voit que les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ admettent un point col à l'origine, et que les courbes

de niveau d'équations $\operatorname{Re} f(z) = 0$, resp. $\operatorname{Im} f(z) = 0$, y ont un point double. Les termes du second ordre donnent l'équation des tangentes au point double :

$$\operatorname{Re}\left(f''(0)z^2\right) = 0 \text{ , resp. } \operatorname{Im}\left(f''(0)z^2\right) = 0 \text{ ,}$$

c'est-à-dire $f''(0)z^2$ imaginaire pur, resp. réel. Les directions obtenues sont donc celles des racines carrées de $\pm i/f''(0)$, resp. $\pm 1/f''(0)$: elles font entre elles des angles égaux à $\pi/4$.

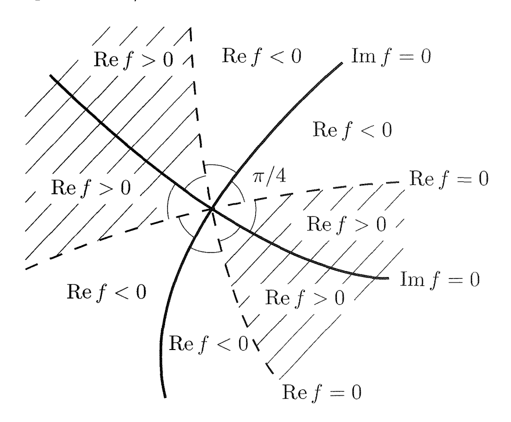


Fig. 184. Courbes de niveau de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ (cas où $f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$).

Si $z = \gamma(t)$ est un arc paramétré dérivable parcouru à vitesse unité, avec $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = v$ et $|v| = 1$, on a $\gamma(t) = vt + o(t)$ lorsque t tend vers 0, d'où

$$\operatorname{Re} f(\gamma(t)) = \frac{t^2}{2} \operatorname{Re}\left(f''(0)v^2\right) + o\left(t^2\right) \ .$$

Le coefficient $f''(0)v^2$, de module $|f''(0)|$, est de partie réelle maximale, resp. minimale, lorsque v est choisi tel que $f''(0)v^2$ soit réel positif, resp. négatif. La croissance (resp. décroissance) la plus rapide de $\operatorname{Re} f(\gamma(t))$ de part et d'autre de 0 s'obtient donc dans la direction de la branche $\operatorname{Re} f > 0$, resp. $\operatorname{Re} f < 0$, de la courbe de niveau $\operatorname{Im} f = 0$ (« plus grandes pentes » de $\operatorname{Re} f$ en 0). De même les plus grandes pentes de $\operatorname{Im} f$ en 0 s'obtiennent dans les directions de $\operatorname{Re} f = 0$.

Exercice 128. ***Mise en boîte à peu de frais.***

1. Établir l'inégalité

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

pour tous $x_i \geqslant 0$, et tous $\alpha_i > 0$ de somme 1. Quand a-t-on égalité ?

[On pourra rechercher le maximum du premier membre, fonction des x_i, sur l'ensemble défini par $\sum_i \alpha_i x_i = 1$.]

2. Comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné (emballage le plus économique) ?

Solution. 1. Les $\alpha_i > 0$ étant fixés, de somme 1, notons

$$f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ , \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - 1 \ .$$

L'ensemble K défini par les conditions $x_1 \geqslant 0$,..., $x_n \geqslant 0$ et $g(x) = 0$ est un fermé contenu dans le produit des intervalles $0 \leqslant x_i \leqslant 1/\alpha_i$; c'est un *compact* de $\mathbb{R}^n$. La fonction f atteint donc son maximum sur K en (au moins) un point $a = (a_1, \dots, a_n)$. Comme f prend sur K des valeurs strictement positives, on a $f(a) > 0$, donc $a_i > 0$ pour tout i.

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur l'*ouvert* $x_1 > 0$,..., $x_n > 0$ de $\mathbb{R}^n$, et la différentielle $\mathrm{D}g(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ne s'annule jamais. On peut donc appliquer le Théorème 7.2 sur cet ouvert, donnant une condition nécessaire d'extremum en a de $f(x)$, lié par $g(x) = 0$. La condition $\mathrm{D}f(a) = \lambda \mathrm{D}g(a)$ s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i \frac{f(a)}{a_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lambda \alpha_i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

d'où $f(a) = \lambda a_1 = \cdots = \lambda a_n$. Comme $f(a) > 0$ et $g(a) = 0$ on en déduit que le seul point d'extremum est $a_1 = \cdots = a_n = 1$. Finalement

$$f(x) \leqslant f(a) = 1 \text{ pour tout } x \in \mathrm{K} \ ,$$

strictement pour $x \neq a$. L'inégalité demandée s'en déduit par homogénéité, en remplaçant x par tx avec $t > 0$.

S'il y a égalité :

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \ ,$$

avec $x_i \geqslant 0$, $\alpha_i > 0$ et $\sum_i \alpha_i = 1$, alors ou bien le second membre est nul (d'où $x = 0$), ou bien on peut se ramener par homogénéité au cas où il vaut 1, d'où $x = a = (1, \dots, 1)$ d'après ce qui précède. En résumé, *il y a égalité si et seulement si* $x_1 = \cdots = x_n$.

Pour $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$, on obtient la classique *inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique* de n nombres positifs.

Variante. La convexité de la fonction exponentielle (Exercice 42) permet d'écrire

$$\exp\left(\sum_i \alpha_i \ln x_i\right) \leqslant \sum_i \alpha_i \exp(\ln x_i)$$

pour $x_i > 0$, d'où une preuve directe de l'inégalité.

2. Si x, y, z sont les trois côtés de la boîte, son volume est $\mathrm{V} = xyz$ et sa surface est $\mathrm{S} = 2(yz + zx + xy)$. On pourrait rechercher le minimum de

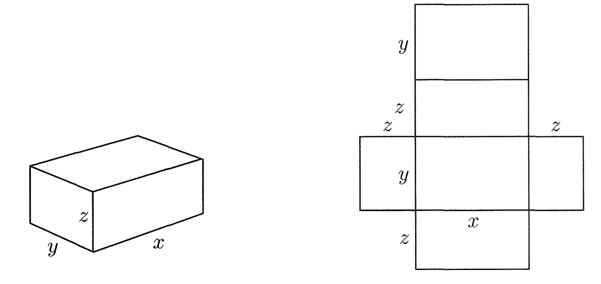


Fig. 185. Mise en boîte.

S lié par la valeur donnée de V, mais on peut aussi appliquer directement le résultat précédent. L'inégalité de 1, avec $n = 3$, $\alpha_i = 1/3$, donne en effet

$$\mathrm{V}^{-1/3} = \left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{S}}{6\mathrm{V}} ,$$

d'où $\mathrm{S} \geqslant 6\mathrm{V}^{2/3}$, avec égalité si et seulement si $x = y = z$. L'emballage le plus économique est donc *cubique.*

Exercice 129. ***Directions principales d'une quadrique.*** **On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|$. Étudier les extremums de $f(x) = \|x\|^2$ sur la quadrique S d'équation $\mathrm{Q}(x) = 1$, où Q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.**

Commentaire. On recherche ici la distance de l'origine à une hypersurface, sur l'exemple simple d'une quadrique (ellipsoïde). La méthode des extremums liés fait apparaître aussitôt le lien avec la recherche de valeurs et vecteurs propres ; en comparant avec le point de vue paramétrique de l'Exercice 126, on reconnaît les deux méthodes esquissées comme introduction au Théorème 7.2.

Par homogénéité ce problème équivaut à la recherche des extremums de la fonction $\mathrm{Q}(x)/\|x\|^2$, c'est-à-dire à celle des meilleures constantes C et C′ dans l'inégalité d'équivalence des normes (cf. Chapitre 1)

$$\mathrm{C}\,\|x\| \leqslant \sqrt{\mathrm{Q}(x)} \leqslant \mathrm{C}'\,\|x\| \ .$$

Solution. Soit A la matrice (symétrique) de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $\mathrm{Q}(x) = {}^t x \mathrm{A} x$. La différentielle de Q en un point x est donnée par $\mathrm{DQ}(x)h = 2\,{}^t h \mathrm{A} x$ (Exercice 15), d'où $\mathrm{DQ}(x)x = 2\mathrm{Q}(x)$ (ce qui résulte aussi de l'identité d'Euler, cf. Exercice 21). En particulier $\mathrm{DQ}(x)$ ne s'annule en aucun point de S, qui est donc une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^n$, et on peut appliquer le théorème de l'extremum lié : s'il y a extremum de f en a sur S, il existe nécessairement un scalaire λ tel que

$$\mathrm{D}f(a) = \lambda \mathrm{DQ}(a) ,$$

c'est-à-dire $a = \lambda \mathrm{A}a$, avec bien sûr $\mathrm{Q}(a) = 1$. En multipliant à gauche par ${}^t a$ on en déduit $f(a) = \|a\|^2 = \lambda > 0$. Par suite a doit être un vecteur propre de A, de norme $\sqrt{\lambda}$, associé à la valeur propre $1/\lambda$.

Les candidats à l'extremum sont donc les intersections de S avec les sous-espaces propres de A (« *directions principales* » de la quadrique). Pour discuter on peut introduire, par changement de base orthonormale, de nouvelles coordonnées (x'_i) sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \ , \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 \ ,$$

où $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres (strictement positives) de A. L'inégalité immédiate

$$\lambda_1 f(x) \leqslant \mathrm{Q}(x) \leqslant \lambda_n f(x)$$

montre que $1/\lambda_n \leqslant f(x) \leqslant 1/\lambda_1$ sur S. Le maximum global $1/\lambda_1$ de f est atteint en tout point a de S tel que $\mathrm{A}a = \lambda_1 a$, et le minimum global $1/\lambda_n$ en tout point b de S tel que $\mathrm{A}b = \lambda_n b$.

Mais si λ_j est une valeur propre strictement comprise entre λ_1 et λ_n, une direction propre associée c donne $f(c) = 1/\lambda_j$, qui n'est donc pas un extremum global de f.

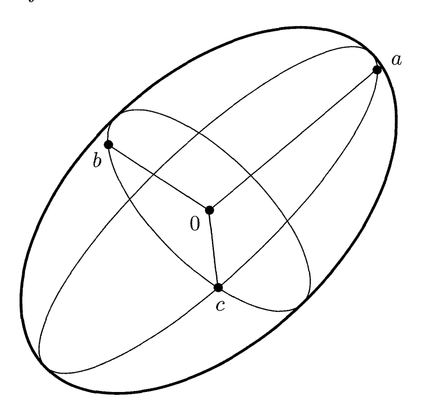


Fig. 186. Extrémums de $\|x\|^2$ sur un ellipsoïde.

Remarque. Un point tel que c ne donne même pas un extremum local de f. En se restreignant au plan des vecteurs a et c on a en effet, en coordonnées (x'_i),

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_j x_j'^2 = 1$$

$$f(x) - f(c) = x_1'^2 + x_j'^2 - \frac{1}{\lambda_j} = \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_j} x_1'^2 \geqslant 0 \ .$$

De même, en se restreignant au plan de b et c,

$$f(x) - f(c) = \frac{\lambda_j - \lambda_n}{\lambda_j} x_n'^2 \leqslant 0 .$$

Les valeurs de f peuvent donc être supérieures ou inférieures à $f(c)$, selon la direction dans laquelle on traverse le point c sur S.

Exercice 130. ***Inégalité de Hadamard.*** **L'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On note $f(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ de vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{E}$.**

1. Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par

$$\|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1$$

est atteint, et strictement positif.

2. Montrer par le théorème des extremums liés que, si le maximum de f est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$, les v_i forment une base orthonormale de E.

3. En déduire l'*inégalité de Hadamard*

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \|v_1\| \cdots \|v_n\| ,$$

pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Quand a-t-on égalité ?

Commentaire. On peut donner diverses preuves de l'inégalité de Hadamard, notamment en restant dans le cadre de l'algèbre linéaire ; voir aussi Mneimné et Testard [32] p. 294 pour une preuve élégante à partir... d'intégrales gaussiennes.

Géométriquement elle exprime que, pour des côtés de longueur donnée, les parallélépipèdes de volume maximum sont rectangles.

Solution. 1. L'ensemble X, produit des sphères unité de E, est un compact de $\mathrm{E}^n = \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}$. La fonction f, continue sur E^n (et même de classe C^∞ car polynomiale en les composantes des v_i), atteint donc son maximum sur X. Soient e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{X}$ et $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, ce maximum est au moins égal à 1.

2. On peut voir ce maximum comme un extremum de f lié par les conditions

$$g_1(v_1, \ldots, v_n) = 0 , \ \ldots \ , g_n(v_1, \ldots, v_n) = 0 ,$$

en notant $g_i(v_1, \ldots, v_n) = \|v_i\|^2 - 1$. En tout point $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{X}$ les différentielles

$$\mathrm{D}g_i(v_1, \ldots, v_n)(h_1, \ldots, h_n) = 2v_i \cdot h_i$$

sont indépendantes comme formes linéaires en $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{E}^n$, puisque

$$\mathrm{D}g_i(v_1, \ldots, v_n)(0, \ldots, 0, v_j, 0, \ldots, 0) = 2\delta_{ij}$$

(symbole de Kronecker). Par le Théorème 5.10 X est une sous-variété de $\mathrm{E}^n = \mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - n$, et le Théorème 7.2 donne la condition nécessaire d'extremum de f au point $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{X}$: il existe des coefficients réels λ_i tels que

$$\mathrm{D}f(v_1, \ldots, v_n)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (v_i \cdot h_i) \qquad (*)$$

pour tous vecteurs $h_i \in \mathrm{E}$.

Or f est *linéaire* par rapport à chacun des v_i ; en prenant tous les h_j nuls sauf le i-ième on a donc

$$\mathrm{D}f(v_1, \ldots, v_n)(0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

(i-ième différentielle partielle de f), et l'égalité $(*)$ s'écrit encore

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda_i \, (v_i \cdot h_i)$$

pour tout i et tout $h_i \in \mathrm{E}$. En choisissant $h_i = v_i$ on a en particulier $\lambda_i = f(v_1, \ldots, v_n)$ pour tout i, d'où $\lambda_i \geqslant 1$ d'après 1. Le choix $h_i = v_j$ avec $j \neq i$ donne ensuite $v_i \cdot v_j = 0$. Le maximum cherché de f ne peut donc être atteint qu'en une base orthonormale.

3. Inversement, si les v_i forment une base orthonormale de E la matrice de vecteurs colonnes $(v_1, \ldots, v_n)$ est orthogonale, donc de déterminant 1 ou -1 selon l'orientation de la base des v_i par rapport à la base canonique. Il en résulte, avec 1 et 2, que le maximum de f sur X vaut 1, et qu'il est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$ si et seulement si les v_i forment une base orthonormale directe.

Par homogénéité par rapport à chacun des v_i on en déduit l'inégalité

$$f(v_1, \ldots, v_n) \leqslant \|v_1\| \cdots \|v_n\|$$

pour tous $v_i \in \mathrm{E}$ et, en changeant v_1 en son opposé, la même majoration pour $|f|$.

Enfin l'égalité

$$|f(v_1, \ldots, v_n)| = \|v_1\| \cdots \|v_n\|$$

est satisfaite si et seulement si un des v_i est nul, ou bien s'ils sont tous non nuls et

$$f\left(\pm\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right) = 1 \; .$$

D'après 2 ce dernier cas se produit si et seulement si les v_i forment une base orthogonale de E.

Exercice 131. ***Entropie maximum.*** **On donne des réels $a_1, \dots, a_n, a$, avec $n \geqslant 3$, les a_k n'étant pas tous égaux entre eux. Soit E l'ensemble des $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que**

$$p_1 > 0 ,\dots, p_n > 0 \ , \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = a \ .$$

On suppose E non vide.

1. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a)\, e^{(a_k - a)x} \ , \ x \in \mathbb{R} \ ,$$

est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

[On observera que certains a_k sont strictement supérieurs à a et d'autres strictement inférieurs.]

2. Rechercher le maximum sur E de la fonction

$$\mathrm{H}(p) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k \ .$$

[On pourra utiliser 1 pour déterminer les multiplicateurs de Lagrange, et observer que $-$H est une fonction convexe sur E.]

Commentaire. L'*entropie* $\mathrm{H}(p_1, \dots, p_n)$ est une fonction importante en calcul des probabilités, en mécanique statistique ou en théorie de l'information. En oubliant un instant la condition $\sum_k a_k p_k = a$, on peut montrer par la méthode de 2 ci-dessous que le maximum de $\mathrm{H}(p)$ avec la seule contrainte $\sum_k p_k = 1$ s'obtient lorsque les p_k sont tous égaux à $1/n$. Si on interprète les p_k comme des probabilités, c'est la situation où l'incertitude sur le résultat de l'expérience est maximale ; le jeu de dés, par exemple, serait beaucoup moins « aléatoire » si les probabilités d'apparition des six faces étaient inégales...

On peut donc voir l'entropie comme une mesure de l'incertitude d'une expérience. Le problème étudié ici est la recherche de l'entropie maximale, avec la contrainte supplémentaire que l'espérance d'une certaine variable aléatoire (de valeurs a_1,..., a_n) ait une valeur donnée a.

Solution. 1. L'ensemble E n'étant pas vide, il existe des $p_k > 0$ tels que $\sum_k (a_k - a) p_k = 0$. Si tous les nombres $a_k - a$ étaient positifs ou nuls, ils devraient donc être tous nuls et les a_k seraient tous égaux à a, ce qui est exclu par l'hypothèse. Certains $a_k - a$ sont donc strictement négatifs ; de même certains autres sont strictement positifs.

Il en résulte que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ .$$

De plus la dérivée

$$f'(x) = \sum_k (a_k - a)^2 e^{(a_k - a)x}$$

est strictement positive pour tout x, et f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. D'après l'hypothèse les formes linéaires $p \mapsto \sum p_k$ et $p \mapsto \sum a_k p_k$ ne sont pas proportionnelles. La condition nécessaire d'extremum lié de H sur E en un point p s'écrit : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{DH}(p) = \lambda(1, \dots, 1) + \mu(a_1, \dots, a_n) \ ,$$

c'est-à-dire, après changement de λ en $\lambda + 1$,

$$-\ln p_k = \lambda + \mu a_k \ , \ 1 \leqslant k \leqslant n \ .$$

Comme $p \in \mathrm{E}$ on doit avoir de plus

$$\sum_k e^{-(\lambda + \mu a_k)} = 1 \ , \ \sum_k (a_k - a) e^{-(\lambda + \mu a_k)} = 0 \ ,$$

ce qu'on peut transformer en

$$e^{\lambda} = \sum_k e^{-\mu a_k} \ , \ f(-\mu) = 0$$

où f est la fonction de 1. D'après 1 ces équations déterminent les multiplicateurs λ et μ de manière unique. On a alors

$$p_k = \frac{e^{-\mu a_k}}{\sum_j e^{-\mu a_j}} \ , \ \mathrm{H}(p) = \lambda + \mu a \ .$$

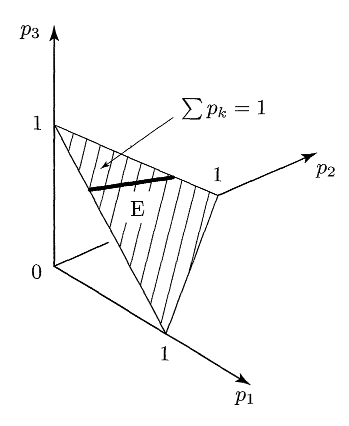


Fig. 187. Le convexe E, pour $n = 3$.

Par ailleurs la fonction $-\mathrm{H}$ est *convexe* sur l'ouvert $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$, car sa matrice hessienne est diagonale avec $-\partial^2\mathrm{H}/\partial p_k^2 = 1/p_k > 0$, donc définie positive (cf. Exercice 108). D'après les hypothèses, l'intersection des hyperplans $\sum p_k = 1$ et $\sum a_k p_k = a$ est un $(n-2)$-plan de $\mathbb{R}^n$, et E est un ouvert convexe de ce $(n-2)$-plan. La condition nécessaire d'extremum lié détaillée plus haut exprime que $\mathrm{DH}(p)v = 0$ pour tout vecteur v tangent en p à E, ce qui revient à dire que la restriction de $-\mathrm{H}$ à E admet p pour point critique. Cette restriction est une fonction convexe ; on en déduit par l'Exercice 119 que $-\mathrm{H}$ atteint en p un minimum global sur E, ce qu'il fallait.

Exercice 132. ***Une partie de billard.*** **Montrer qu'il existe sur un billard elliptique une trajectoire fermée à trois rebonds.**

[On pourra rechercher un triangle de périmètre maximum inscrit dans l'ellipse.]

Solution. Il s'agit de trouver un triangle inscrit dans l'ellipse dont chaque côté se déduise du précédent par rebond sur le bord, i.e. par symétrie par rapport à la normale à l'ellipse au point d'impact. Pour un billard circulaire les solutions sont évidemment les triangles équilatéraux inscrits. Pour le cas général d'un billard elliptique, on aura recours à un argument de compacité et au théorème des extremums liés.

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni du produit scalaire usuel, on note $\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|$ la distance euclidienne des points A et B. Si A, B, C sont trois points d'une ellipse donnée E, le périmètre du triangle ABC :

$$f(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$$

est une fonction continue sur le compact $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Elle atteint donc son maximum en au moins un triplet $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$. De tels points A, B, C sont distincts : si par exemple A et B étaient confondus, tout point B′ de E autre que A ou C donnerait $\mathrm{AB}' + \mathrm{B}'\mathrm{C} > \mathrm{AC}$, d'où $f(\mathrm{A},\mathrm{B}',\mathrm{C}) > f(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$.

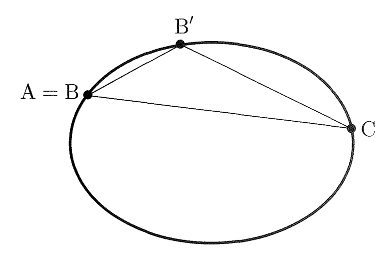


Fig. 188. $f(\mathrm{A},\mathrm{B}',\mathrm{C}) > f(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$.

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^6$ formé des triplets de points deux à deux distincts ; la fonction f est de classe C^1 sur U. Soit $g(x, y) = 0$ une

équation implicite de E, avec $g(x,y) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) - 1$ par exemple. Alors $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$, définie par les équations

$$g(\mathrm{A}) = 0 \ , \ g(\mathrm{B}) = 0 \ , \ g(\mathrm{C}) = 0\,;$$

les différentielles $\mathrm{D}g(\mathrm{A})$, $\mathrm{D}g(\mathrm{B})$, $\mathrm{D}g(\mathrm{C})$, vues comme formes linéaires sur $\mathbb{R}^6$, sont en effet indépendantes en tout point de $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Un triplet $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ où f atteint son maximum appartient à l'ouvert U comme on a vu, ce qui permet d'écrire la condition nécessaire d'extremum lié (Théorème 7.2) :

$$\mathrm{D}f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

pour tous vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{D}g(\mathrm{A})\vec{a} = 0$, $\mathrm{D}g(\mathrm{B})\vec{b} = 0$, $\mathrm{D}g(\mathrm{C})\vec{c} = 0$, c'est-à-dire tangents à l'ellipse en A, B et C respectivement.

Notons $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}/\mathrm{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}/\mathrm{BC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}/\mathrm{CA}$. En différentiant $\mathrm{AB} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ par rapport aux variables A et B, et de même BC et CA, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \vec{u} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \vec{v} \cdot \left(\vec{c} - \vec{b}\right) + \vec{w} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \\ &= (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{b} + (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (cf. Exercice 92).

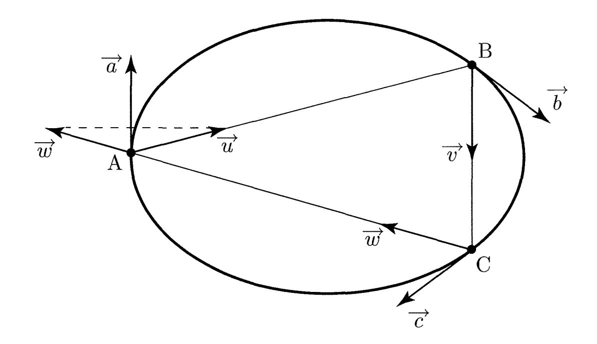


Fig. 189. Une trajectoire de billard à trois rebonds.

En prenant $\vec{b}$ et $\vec{c}$ nuls, la condition d'extremum lié entraîne donc que $\vec{w} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{a}$ lorsque $\mathrm{D}g(\mathrm{A})\vec{a} = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont même projection sur la tangente en A à l'ellipse, et de même en B et C. C'est la condition de réflexion (rebond) en ces points, et ABC est donc une trajectoire de billard fermée à trois rebonds.

Compléments. On montrerait de même que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe une trajectoire de billard fermée à n rebonds ; pour $n = 2$ les solutions sont les deux axes de l'ellipse. Pour découvrir les fascinantes mathématiques du billard, voir la brochure de S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et Synthèses 1, Société Mathématique de France 1995 (en langue anglaise, comme l'indique l'orthographe du titre). Voir aussi *Mathématiques en situation, issues de l'épreuve de modélisation de l'agrégation*, Springer 2001, p. 123.

Exercice 133. ***Un peu de calcul des variations.* Soit E l'espace des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un intervalle compact $\mathrm{I} = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et**

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))\, dx \ .$$

On renvoie à l'Exercice 47 pour l'existence et le calcul de la différentielle $\mathrm{D}\mathcal{F}$.

On suppose ici qu'une fonction $f \in \mathrm{E}$ réalise le minimum de $\mathcal{F}$ « à extrémités fixes » : les nombres α et β étant donnés, on suppose que $\mathcal{F}(f) \leqslant \mathcal{F}(g)$ pour toute $g \in \mathrm{E}$ telle que $g(a) = f(a) = \alpha$ et $g(b) = f(b) = \beta$.

1. Montrer que $\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = 0$ pour toute fonction $h \in \mathrm{E}$ telle que $h(a) = h(b) = 0$.

2. Soit F une fonction réelle continue sur I, telle que

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)h'(x)\, dx = 0$$

pour toute $h \in \mathrm{E}$ telle que $h(a) = h(b) = 0$. Montrer que F est constante sur I.

[On pourra considérer $h(x) = \int_a^x (\mathrm{F}(t) - m)\, dt$, où m est la moyenne de F sur $[a, b]$.]

3. En intégrant par parties l'expression de $\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h$, montrer que f doit vérifier l'*équation différentielle d'Euler* :

$$\frac{d}{dx}\left(\partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)\right) = \partial_2\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))\ ,\ x \in \mathrm{I}\ ,$$

où $\partial_2\mathcal{L}$ et $\partial_3\mathcal{L}$ sont les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à sa deuxième et troisième variable respectivement.

4. *Exemple.* Étudier le cas où $\mathcal{L}(x, f, f') = \sqrt{1 + f'^2}$.

Commentaire. La recherche d'une fonction qui rende minimum[7] la *fonctionnelle* $\mathcal{F}$ définie par un *lagrangien* $\mathcal{L}$ apparaît dans de nombreux problèmes mathématiques ou physiques : plus court chemin d'un point à un

7. Ou, plus généralement, qui soit point critique de $\mathcal{F}$.

autre sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (géodésiques), principe de Fermat en optique, principe de moindre action de Hamilton en mécanique... C'est un problème d'extremum sur une espace de fonctions, de dimension infinie.

La question 2 (*lemme de Du Bois-Reymond*) permet de transformer la condition nécessaire d'extremum (à extrémités fixes) $\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = 0$ en l'équation d'Euler, sans hypothèse supplémentaire de différentiabilité.

Pour en savoir plus, et pour l'étude d'exemples, voir Avez [3] p. 106-119, Cartan [8] p. 287-323, Schwartz [37] p. 303-344, ou Valiron [39] p. 370-405.

Solution. 1. Il s'agit d'un problème d'extremum lié : minimum de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des $g \in \mathrm{E}$ qui prennent des valeurs données en a et b. Le Théorème 7.2 n'a été donné ici qu'en dimension finie, mais il est facile de refaire le raisonnement dans notre situation.

Si $\mathcal{F}$ atteint son minimum en f, alors en particulier $\mathcal{F}(f) \leqslant \mathcal{F}(f+th)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction $h \in \mathrm{E}$ telle que $h(a) = h(b) = 0$, car $f + th$ prend mêmes valeurs que f en a et b. La fonction numérique $t \mapsto \mathcal{F}(f + th)$ atteint donc son minimum en $t = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est différentiable sur E (Exercice 47), cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où la condition nécessaire

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{F}(f+th)\right|_{t=0} = \mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = 0 \ .$$

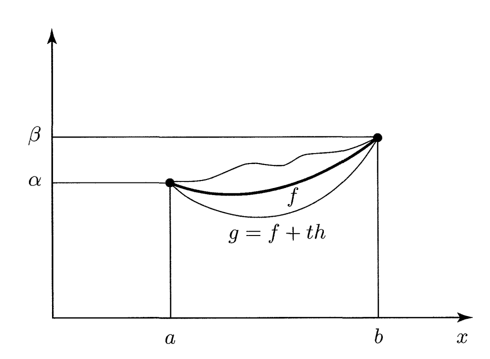


Fig. 190. Variations à extrémités fixes, ou le sourire de la fin.

2. Soient

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{F}(x)\,dx \ , \ h(x) = \int_a^x (\mathrm{F}(t) - m)\,dt \ .$$

Alors h est de classe C^1 sur I et $h(a) = h(b) = 0$. D'après l'hypothèse on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)h'(x)\,dx = 0 \ .$$

Comme $m\int_a^b h'(x)dx = 0$ évidemment, on en déduit par différence

$$\int_a^b (\mathrm{F}(x) - m)\, h'(x)\, dx = \int_a^b (\mathrm{F}(x) - m)^2\, dx = 0 \ ,$$

et la fonction continue réelle $\mathrm{F} - m$ est donc identiquement nulle sur I.

Remarque. Si F était supposée de classe C^1, on pourrait donner à cette question une solution plus naturelle en intégrant par parties, et en prenant pour h une fonction à support voisin d'un (hypothétique) point où F' ne serait pas nulle.

3. On utilise maintenant l'expression de la différentielle $\mathrm{D}\mathcal{F}$ obtenue à l'Exercice 47 :

$$\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = \int_a^b (uh + vh')\, dx \ ,$$

avec

$$u(x) = \partial_2\mathcal{L}(x, f(x,), f'(x)) \ , \ v(x) = \partial_3\mathcal{L}(x, f(x,), f'(x)) \ ,$$

fonctions continues sur I d'après les hypothèses. Introduisons une primitive U de u pour pouvoir intégrer par parties. Il vient, compte tenu de $h(a) = h(b) = 0$,

$$\mathrm{D}\mathcal{F}(f)h = \int_a^b (\mathrm{U}'h + vh')\, dx = \int_a^b (v - \mathrm{U})h'\, dx \ .$$

D'après 1 cette intégrale est nulle pour toute h et, d'après 2, la fonction $v - \mathrm{U}$ est constante sur I. Elle est donc dérivable sur I ; comme U l'est déjà, on voit que v *est nécessairement dérivable sur* I et vérifie $v' - u = 0$. C'est l'équation d'Euler.

4. La fonctionnelle

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \ ,$$

avec $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$ fixés, donne la longueur du graphe de f entre les points (a, α) et (b, β) du plan euclidien. Ici $\partial_2\mathcal{L} = 0$, et la condition nécessaire d'extremum en f est, d'après 3, que la fonction

$$\partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

soit dérivable sur I, de dérivée nulle[8]. Par suite f' est constante sur I, et f est nécessairement la fonction affine telle que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

On a vu à l'Exercice 42 question 3 que cette fonction réalise effectivement le minimum de $\mathcal{F}(f)$: le plus court chemin de (a, α) à (b, β) dans le plan euclidien est la ligne droite.

8. Cela revient à dire que le graphe de f est de courbure nulle (Exercice 105 question 2).

Bibliographie

L'astérisque * signale les livres plus difficiles, niveau maîtrise ou au-delà. Les étudiants de licence pourront toutefois tirer profit de certaines parties de ces ouvrages.

Livres de cours

[1] Arnold, V., *Équations différentielles ordinaires*, quatrième édition, Éditions MIR, 1988.

[2] Arnold, V., *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Éditions MIR, 1976.

[3] Avez, A., *Calcul différentiel*, Masson, 1983.

[4] Berger, M. et Gostiaux, B., **Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, deuxième édition, Presses Universitaires de France, 1992.

[5] Bruijn, N.G. de, *Asymptotic methods in analysis*, Dover, 1981.

[6] Candelpergher, B., *Fonctions d'une variable complexe*, Armand Colin, 1995.

[7] Carmo, M. do, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[8] Cartan, H., *Cours de calcul différentiel*, nouvelle édition, Hermann, 1977.

[9] Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.

[10] Choquet, G., *Cours d'analyse : topologie*, Masson, 1964.

[11] Coddington, R. et Levinson, N., **Theory of ordinary differential equations*, Tata McGraw-Hill, 1990.

[12] Courant, R. et Hilbert, D., **Methods of mathematical physics*, volume II, Interscience Publishers, 1962.

[13] Demailly, J.-P., *Analyse numérique et équations différentielles*, deuxième édition, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[14] Demazure, M., **Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, 1989.

[15] Devaney, R., *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1992.

[16] Devaney, R., **An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition, Addison-Wesley, 1989.

[17] Dieudonné, J., *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1968.

[18] Dieudonné, J., **Éléments d'analyse*, tome 1, Gauthier-Villars, 1969.

[19] Dieudonné, J., **Éléments d'analyse*, tome 3, Gauthier-Villars, 1974.

[20] Dixmier, J., *Cours de mathématiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars, 1968.

[21] Erdélyi, A., *Asymptotic expansions*, Dover, 1956.

[22] Faraut, J., *Calcul intégral*, Belin, 2000.

[23] Ferrier, J.-P., *Mathématiques pour la licence*, Masson, 1984.

[24] Gramain, A., *Intégration*, Hermann, 1988.

[25] Horn, R. et Johnson, C., **Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[26] Hubbard, J. et West, B., *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[27] Körner, T.W., *Fourier analysis*, Cambridge University Press, 1990.

[28] Lafontaine, J., **Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[29] Lang, S., *Analyse réelle*, InterEditions, 1977.

[30] Lelong-Ferrand, J. et Arnaudiès, J.-M., *Cours de mathématiques*, tome 1 : algèbre, Dunod, 1977.

[31] Lelong-Ferrand, J. et Arnaudiès, J.-M., *Cours de mathématiques*, tome 3 : géométrie et cinématique, Dunod, 1977.

[32] Mneimné, R. et Testard, F., **Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[33] Pham, F., **Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, InterEditions, 1992.

[34] Pommellet, A., *Agrégation de mathématiques, cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[35] Rudin, W., **Analyse réelle et complexe*, troisième édition, Dunod, 1998.

[36] Rudin, W., *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience, 1995.

[37] Schwartz, L., *Analyse II : calcul différentiel et équations différentielles*, nouvelle édition, Hermann, 1997.

[38] Tauvel, P., *Algèbre pour l'agrégation interne*, Masson, 1996.

[39] Valiron, G., **Équations fonctionnelles, applications*, Jacques Gabay, 1989.

[40] Zuily, C. et Queffélec, H., **Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Recueils d'exercices corrigés

[41] Chambert-Loir, A., Fermigier, S. et Maillot, V., *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : analyse 1*, deuxième édition, Masson, 1997.

[42] Chambert-Loir, A. et Fermigier, S., *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : analyse 2*, Masson, 1995.

[43] Chambert-Loir, A. et Fermigier, S., *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : analyse 3*, Masson, 1996.

[44] El Mabsout, B., *Calcul différentiel, exercices*, Masson, 1984.

[45] Gonnord, S. et Tosel, N., *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[46] Makarov, B.M., Goluzina, M.G., Lodkin, A.A. et Podkorytov, A.N., *Selected problems in real analysis*, American Mathematical Society, 1992.

[47] Moisan, J. et Vernotte, A., *Topologie et séries*, Ellipses, 1991.

[48] Moisan, J., Vernotte, A. et Tosel, N., *Suites et séries de fonctions*, Ellipses, 1992.

[49] Rideau, F., *Exercices de calcul différentiel*, Hermann, 1979.

[50] Tissier, A., *Mathématiques générales*, Bréal, 1991.

Un peu d'histoire

[51] Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Masson, 1984.

[52] Collette, J.-P., *Histoire des mathématiques*, deux volumes, Vuibert, 1979.

[53] Dieudonné, J. (sous la direction de –), *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, nouvelle édition, Hermann, 1986.

[54] Hauchecorne, B. et Suratteau, D., *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, 1996.

Index

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD
B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL
Dépôt légal : mai 2003 - N° d'imprimeur : 14031
Imprimé en France

PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL (F. Rouvière, Cassini 2003)

ERRATA À LA DEUXIÈME ÉDITION (mis à jour le 1 février 2008)
"ligne n" = n-ème ligne à partir du haut de la page
"ligne -n" = n-ème ligne à partir du bas.
On ne donne ici que la version corrigée du texte.
p. 29, *ligne -6* : $R_\alpha^{-1} A R_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
p. 34, *ligne 20* : $\rho(u)^n = \rho(u^n) \leq \|u^n\|$
p. 39, *ligne -6* : et U un ouvert de E.
p. 84, *ligne 15* : $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)$
p.102, *ligne 10* : f' étant positive et décroissante
p.103, *dernière ligne* : $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$.
p.109, *ligne -11* : (*ii*) les différentielles $Df_k(x)$ convergent dans $\mathcal{L}(E, F)$, *uniformément* pour $x \in U$.
p.112, *ligne 9* : $\frac{d}{dx}\left(\int_J f(x,t)\ dt\right) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$.
p.112, *ligne 15* : $\int_J \varphi(t)\ dt < \infty$.
p.114, *ligne 8* : majorer $|\partial f / \partial x|$
p.114, *ligne -2* : $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,v,x) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$
p.116, *ligne 16* : un plus court chemin
p.117, *ligne -8* : segment $[\alpha, \beta]$
p.142, *ligne 5* : $|(F^{-1})'(a)| = 1/|F'(a)| < 1$
p.146, *ligne 2* : pour $x > 0$
p.156, *ligne -3* : supprimer ceux du milieu...
p.159, *ligne -7* : $(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1})$
p.159, *ligne -6* : $n \geq 0$, $p \geq 1$
p.166, *ligne 9* : on entrevoit en 3
p.169, *ligne 4* : inférieure ou égale à 1
p.170, *ligne -12* : des fonctions $t \mapsto y(t)$ continues de I dans $\mathbb{R}^m$,
p.199, *ligne 14* : un domaine de validité
p.213, *ligne -4* : $\|DF(x)\| \leq \varepsilon$ pour $\|x\| \leq r$
p.215, *ligne 11* : $\|x\| \leq r$ entraîne $\|DF(x)\| \leq \varepsilon$;
p.216, *ligne -12* : $\|x\| \leq r$ entraîne $\left\|Df(0)^{-1} f(x)\right\| \leq (1+\varepsilon) r$.
p.217, *ligne 5* : f^{-1} est lipschitzienne sur W.
p.224, *lignes 13 et 14* : le rang est au moins r en tout point x assez proche de a.
p.224, *ligne -9* : son noyau est un sous-espace
p.246, *ligne -5* : (contenu dans V_0)
p.266, *ligne -3* : $f'_z(a,b,c) \neq 0$.
p.271, *ligne -9* : $Z = \psi'(a) X$
p.276, *ligne -2* : Si Y est donné dans S
p.310, *ligne5* : $\overrightarrow{T} \cdot (d\overrightarrow{T}/ds) = 0$
p.344, *figure 153* : e^{-t} (et non 1) en ordonnée du second graphe
p.354, *ligne -12* : $x \mapsto X = I + x$
p.372, *ligne 12* : ce minimum est nul ou f est constante sur U ;
p.374, *lignes -4 et -3* : $f(\lambda + \lambda', \mu + \mu') - f(\lambda, \mu) = \sum_i (\lambda' x_i + \mu')^2 \geq 0$,
p.377, *dernière ligne* : $\cos \alpha$
p.387, *lignes -5 et -4* : ... sur un intervalle $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. Le raccord des fonctions x et y et de leurs deux premières dérivées en $t = c$ permettrait ainsi de prolonger x en une solution de (*) sur l'intervalle $]b, c+\varepsilon[$, ce qui contredirait la définition de c.

REMARQUES

p.116, Exercice 41. Il serait mieux de dire "*un* plus court chemin" plutôt que "*le* plus court chemin", car il n'y a pas en général unicité d'un chemin de longueur minimale.

Pour la norme "de Manhattan" $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ dans le plan il y a en effet une multitude de trajets possibles pour aller du point α (0-ème rue, 0-ème avenue) au point β (p-ème rue, q-ème avenue) en empruntant rues et avenues de New-York, tous de longueur minimale $\|\beta - \alpha\|_1 = p + q$. On peut noter aussi que tout chemin continûment dérivable $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec $a \leq t \leq b$, $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$ et $x(t)$, $y(t)$ fonctions *croissantes*, a pour longueur (question 4)

$$L = \int_a^b (x'(t) + y'(t))dt = (x(b) - x(a)) + (y(b) - y(a)) = \|\beta - \alpha\|_1 \ .$$

Mais le segment de droite est bien l'unique plus court chemin dans le cas familier de la norme euclidienne $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$: si γ passe par un point λ hors du segment $[\alpha, \beta]$ on a

$$L \geq \|\alpha - \lambda\|_2 + \|\lambda - \beta\|_2 > \|\alpha - \beta\|_2 \ ;$$

cette inégalité triangulaire stricte se vérifie par le théorème de Pythagore, en considérant la projection orthogonale de λ sur $[\alpha, \beta]$.

p.**162**, *lignes -6 et suivantes. On peut simplifier la fin de la démonstration, en remplaçant "Pour en déduire $F(a) = a$ ..." par :*
Comme F est continue sur X on a $\lim F(a_n) = F(a)$ d'où

$$a = \lim a_n = \lim F_n(a_n) = \lim(1 - t_n)F(a_n) + t_n x_0 = F(a) \ ,$$

donc a est un point fixe de F.

p.**174**. *Voici (d'après R. Brown, Bull. Amer. Math. Soc. 41, April 2004, p.267) une variante pour parvenir au résultat de la question 4 sans passer par 2 et 3 : un meilleur choix de norme conduit directement à une application contractante.*
Soit donc à résoudre le système différentiel

$$y' = f(t, y) \ , \ y(t_0) = x$$

sur un intervalle *compact* I, la fonction f étant k-lipschitzienne en y. En notant

$$F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \ ds$$

le problème équivaut, d'après la question 1, à la recherche d'un point fixe de F sur l'espace E des fonctions continues sur I, c'est-à-dire $y \in E$ et $F(y) = y$.
Munissons E de la norme

$$\|y\|_k = \max_{t \in I} \left(e^{-k|t-t_0|} \, \|y(t)\| \right) \ ,$$

au lieu de la norme classique $\max_{t \in I} \|y(t)\|$. Soit ℓ la longueur de l'intervalle I. Comme $e^{-k\ell} \leq e^{-k|t-t_0|} \leq 1$ pour $t \in I$, la nouvelle norme est équivalente à l'ancienne, et l'espace E est encore complet. Pour $y, z \in E$, $t \in I$ et $t \geq t_0$ on a

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) \ ds \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
e^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\| \, ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k \|y(s) - z(s)\| \, ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} ds \ \ \|y-z\|_k \\
&\leq \left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right) \|y-z\|_k \ .
\end{aligned}$$

Pour $t \in I$ et $t \leq t_0$ on obtient de même, en prenant soin d'écrire $\int_t^{t_0}$ plutôt que $\int_{t_0}^t$ dans les majorations,

$$e^{k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq \left(1 - e^{k(t-t_0)}\right) \|y-z\|_k \ .$$

Pour tout $t \in I$ on a donc $e^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq \left(1 - e^{-k|t-t_0|}\right) \|y-z\|_k$ d'où, en passant au max sur I,

$$\|F(y) - F(z)\|_k \leq \left(1 - e^{-k\ell}\right) \|y-z\|_k \ .$$

Ainsi F est contractante sur E muni de la norme $\|.\|_k$ et, par le théorème du point fixe, le problème posé admet une solution unique.

Avec cette deuxième édition, ce sont 133 exercices et leurs corrigés détaillés, commentés, illustrés de 190 croquis, qui sont maintenant proposés au lecteur (qui n'en demandait pas tant...) : c'est avant tout par la pratique d'exemples, de difficulté variée, que ce livre aborde l'étude du calcul différentiel à plusieurs variables.

Écrit à l'intention des étudiants en licence de mathématiques, des candidats à l'agrégation ou aux concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques, il leur offre aussi un panorama commenté du cours, nombre de remarques heuristiques, en insistant notamment sur les liens étroits du calcul différentiel avec la géométrie (courbes et surfaces), ou avec certaines questions de la mécanique ou de la physique.

Le « petit guide » de Rouvière est un livre qui veut faire aimer et comprendre le calcul différentiel à ses lecteurs. Je crois que c'est très réussi. J'aimais déjà le calcul différentiel avant de lire ce livre. Aussi je l'ai testé sur mes étudiants, ils en sont enchantés.

[...] Le livre est bien écrit, drôle et souvent passionnant, un vrai plaisir.

Michèle Audin, *Gazette des mathématiciens.*

Collection enseignement des mathématiques

28 €
ISBN 2-84225-069-9



Graphisme : Massin